

2026

OWL. ARCHIVE

2026 학년 도 수 능 대 비

부영이 N제 | 기하

주 저자 | 기하이바라

소수 과목인 만큼 심혈을 기울여 만들었습니다.

가장 **실전같은 N제**, 가장 **수능과 가까운 N제**를 추구합니다.

수험생의 시간 가치를 최고로 끌어올려줄 수 있는 단 하나의 N제 —

부영이 N제가 여러분의 **성적 상승의 디딤돌**이 되어드리겠습니다.



sudo

머리말

안녕하세요...

기하이바라라고 합니다.

배포해도 아무도 안 풀 과목, 기하입니다.

저도 왜 제작했는지 잘 모르겠습니다.

한 분이라도 풀어주시면 감사하겠습니다.

후기라도 한번 남겨 주십시오...

검토 및 표지 담당해 주신 낭경탈출프로젝트님, 검토를 맡아주신
xyo님, 갑종배당이자소득세님께 감사의 인사를 드립니다.

2026

OWL. ARCHIVE

2026 학년도 수능 대비
부엉이 N제 | 기하

주 저자 | 기하이바라

소수 과목만 면과 심화를 기울어 만들었습니다.

가장 실전같은 N제, 가장 수능과 가까운 N제를 추구합니다.

수험생의 시간 가치를 최대로 끌어올려 줄 수 있는 단 하나의 N제 —

부엉이 N제가 여러분의 성적 상승의 디딤돌이 되어드리겠습니다.



sudo

목차

1. 이차곡선

2. 벡터

3. 공간도형

Chapter 1.

이차곡선

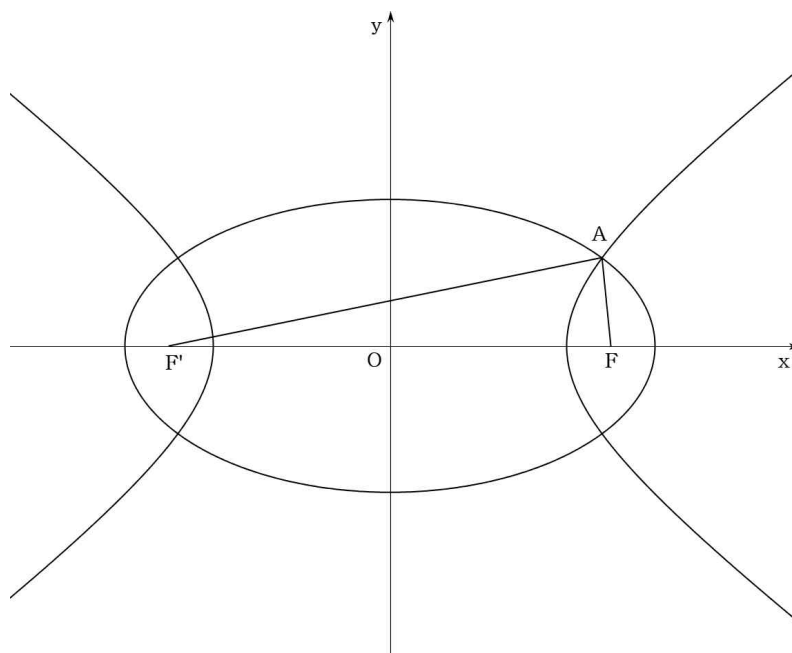
Chapter 1.

이차곡선

01

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 과 만나는 제1 사분면 위의 점을 A 라 하자. 두 점

F (5, 0), F' (-5, 0) 에 대하여 삼각형 AF'F의 넓이는? [3점]



① $3\sqrt{7}$

② $6\sqrt{2}$

③ 9

④ $3\sqrt{10}$

⑤ $3\sqrt{11}$

Comment >

쌍곡선과 타원이 초점을 공유하고 있다.

길이 비를 미지수로 놓고 각각의 정의를 적용해 볼 수 있지 않을까?

그러면 이등변삼각형이 보인다.

Chapter 1.

이차곡선

02

초점이 F 인 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 A 는 제1사분면에 있고, 삼각형 AOF 의 넓이가 8 이다.

선분 AF 의 중점 M 에서 y 축에 내린 수선의 발이 B 일 때, $\angle AMB = \theta$ 라 하자. $\cos \frac{\theta}{2}$ 의 값을

구하시오. (단, O 는 원점이다.) [3점]

① $\frac{2}{5}$

② $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

③ $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Comment >

하던 대로 진행하다 보면 원이 보인다.

그러면 원주각을 이용할 수 있지 않을까?

Chapter 1.

이차곡선

03

두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$) 이고인 쌍곡선에서의 꼭짓점을 각각 A , B 라 할 때,
제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 C' 이라 하자. $2\overline{AB} = \overline{AF'}$,
 $\overline{F'C'} = 5\overline{FC'}$, $\overline{CF'} = \overline{CA} + 4$ 일 때, 점 C 의 y 좌표의 값은? (단, 점 A 의 x 좌표는 점 B 의
 x 좌표보다 크고, 점 C 의 x 좌표는 c 보다 작다. [3점])

① $4\sqrt{5}$

② $4\sqrt{6}$

③ $4\sqrt{7}$

④ $8\sqrt{2}$

⑤ 12

Comment >

길이 관계가 복잡해 보이지만 최대한 간단하게
바꿔보자.

그러면 이등변삼각형이 보일 것이다.

Chapter 1.

이차곡선

04

두 초점이 각각 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$) 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 점 $A(0, 6)$ 에

하여 $\overline{AF'} = \overline{FF'}$ 이고, 쌍곡선의 한 점근선과 직선 AF 가 서로 평행하다. 직선 AF 와

쌍곡선이 만나는 점을 P 라 할 때, 선분 $F'P$ 의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{3}$

② $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

③ $3\sqrt{3}$

④ $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

⑤ $4\sqrt{3}$

Comment >

해주어야 할 것을 진행하다 보면 정삼각형이 보인다.

05

좌표평면 위의 두 점 $A(2, 3)$, $B(8, 3)$ 에 대하여 점 P 가 $\overline{PA} + \overline{PB} = 10$ 을 만족시킨다. 점 P 가 나타내는 도형을 E 이라 할 때, 직선 OA 와 평행하고 E 에 접하는 직선 l 이 y 축과 만나는 점을 C 라 하자. 삼각형 ABC 의 넓이는? (단, O 는 원점이고, 점 C 의 y 좌표는 양수이다.) [3점]

① $\frac{5}{2}$

② 3

③ $\frac{7}{2}$

④ 4

⑤ $\frac{9}{2}$

Comment >

평행이동의 아이디어는 어디서나 활용 가능하다.

이 경우처럼 타원 자체를 평행이동 한 상황 역시
대비하여야 한다.

06

두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$) 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ 위의 제1 사분면 위의 점 A 와

선분 FF' 위의 점 D 에 대하여, $\angle F'AD = \angle FAD$, $\overline{F'D} : \overline{DF} = t : 4$ 를 만족시킨다.

$\overline{AF'} = \overline{FF'}$ 이고 $\overline{AF} = t$ 일 때, 선분 AF 의 길이는? (단, t 는 실수이다.) [3점]

- ① $2(\sqrt{5}-1)$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2(\sqrt{5}+1)$ ④ $2(\sqrt{5}+2)$ ⑤ $2(\sqrt{5}+3)$

Comment >

각의 이등분선과 복합되어 있는 문제이다.

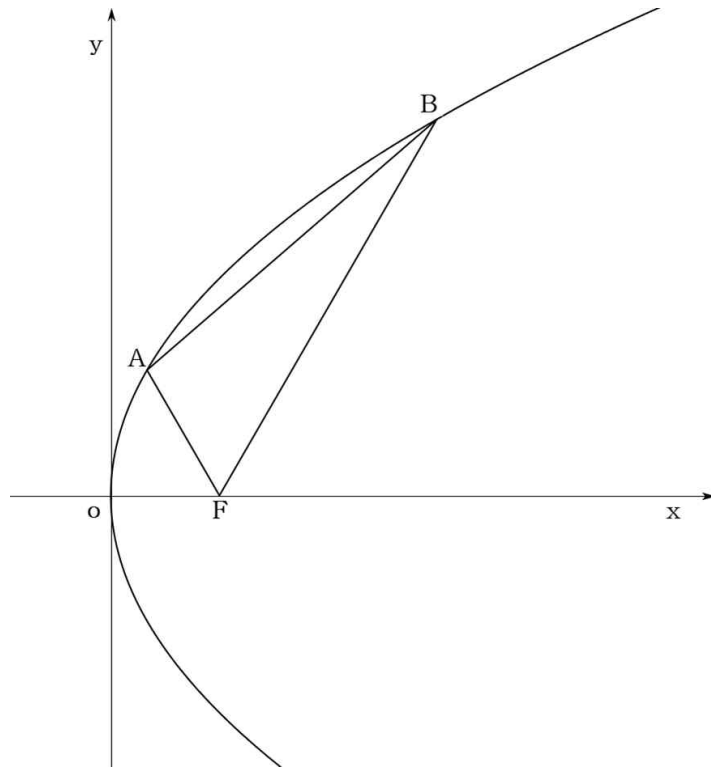
평가원에서도 출제된 주제이기도 하니 나올 가능성은
낮지만 공부해두도록 하자.

Chapter 1.

이차곡선

07

그림과 같이 초점이 F 인 포물선 $y^2 = 12x$ 위에 서로 다른 제1사분면 위의 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 가 있다. $\overline{AF} : \overline{BF} = 1 : 3$ 이고 $\angle AFO + \angle BFO = \pi$ 일 때, 삼각형 AFB 의 외접원의 반지름의 길이는? (단, $a < 3$, $c > 3$ 이고 O 는 원점이다.) [3점]



- ① $\frac{4\sqrt{17}}{3}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $\frac{4\sqrt{19}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

Comment >

각을 따질 때 우회적으로도 볼 수 있다.

식을 변형해 보는 것도 능력이다.

Chapter 1.

이차곡선

08

초점이 $F(p, 0)$ ($p > 0$)인 포물선 $y^2 = 4px$ 위에 제1사분면 위의 점 A 가 있다. 직선 AF 와 y 축과의 교점을 B , 직선 AF 와 직선 $x = -p$ 와의 교점을 C 라 하자. 선분 BC 의 중점을 D 라 하고 점 D 에서 x 축에 내린 수선의 발을 D' 이라 할 때, $\overline{DD'} = 6$ 이다. $2\overline{AF} = 3p$ 일 때, 삼각형 FDD' 의 넓이는? [3점]

- ① $4\sqrt{2}$ ② $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $\frac{11\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

Comment >

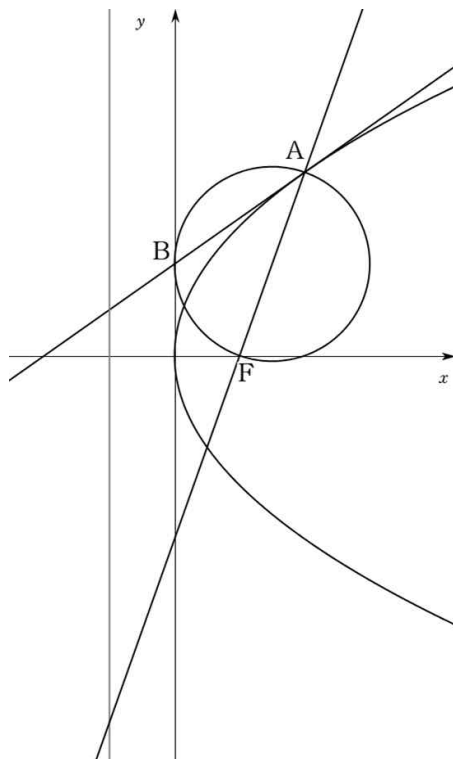
특별한 것 없이 주어진 조건을 따라가면 된다.

Chapter 1.

이차곡선

09

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 위의 점 중 제1사분면 위의 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 ABF의 외접원의 반지름의 길이는 3이다. 점 A에서 준선 l에 내린 수선의 발을 A', 직선 AF가 포물선과 만나는 A가 아닌 점을 C, 준선 l과 직선 AF의 교점을 D라 하자. $\overline{AC} = \overline{A'C}$ 일 때, 선분 A'D의 길이는? (단, A는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



① $8\sqrt{2}$

② $9\sqrt{2}$

③ $10\sqrt{2}$

④ $11\sqrt{2}$

⑤ $12\sqrt{2}$

Comment >

포물선의 접선 성질이 쓰이는 문제이다.

평가원에서 이 사실을 아는지 아닌지로 변별하지는
않을 듯 하나 공부하는 중이므로 알고 들어가도록
하자.

Chapter 1.

이차곡선

10

두 초점이 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ ($c > 0$)이고, 단축의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 타원을 C 라 하자.

점 $A(3, 0)$ 에서 타원 C 에 그은 접점을 P, P' 이라 할 때, 선분 PP' 의 길이는 $4\sqrt{2}$ 이다.

사각형 $PP'PA$ 의 둘레의 길이는 $\alpha\sqrt{3}$ 이다. α 의 값을 구하시오. (단, 점 P 의 y 좌표는 점

P' 의 y 좌표보다 크며, α 는 유리수이다.) [4점]

Comment >

타원이 등장하면 대칭성을 활용하자.

타원의 식을 작성하는 것도 두려워하지 말도록 하자.

Chapter 1.

이차곡선

11

양수 a 에 대하여 그림과 같이 두 포물선

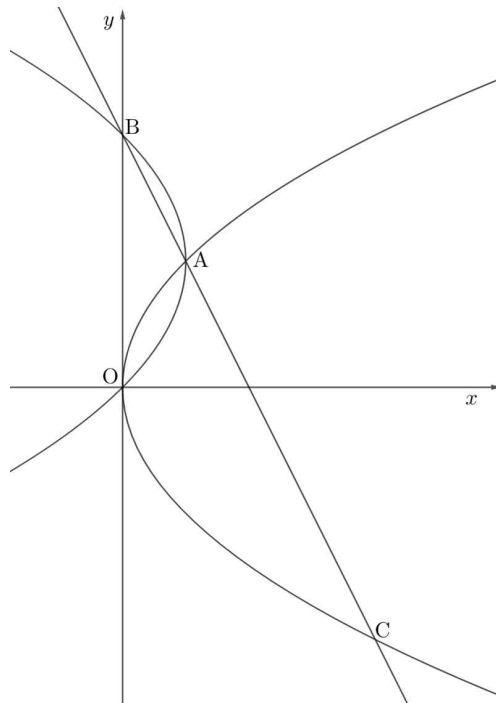
$$C_1 : y^2 = 4x, \quad C_2 : (y-a)^2 = -4(x-1)$$

가 원점 O 와 제 1사분면에서 위의 점 A 에서 만난다. 포물선 C_2 가 y 축과 만나는 점 중 O 가

아닌 점을 B 라 하고, 직선 AB 가 포물선 C_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 C 라 하자. 점

C 에서 포물선 C_1 의 준선에 내린 수선의 발을 C' 이라 할 때, 삼각형 $BC'C$ 의 넓이는?

(단, O 는 원점이다.) [4점]



① 18

② 20

③ 22

④ 24

⑤ 26

Comment >

포물선과 직선끼리는 연립 또한 가능하다.

식으로 관계를 뽑아낼 수 있음을 기억하도록 하자.

Chapter 1.

이차곡선

12

좌표평면 위에 초점이 각각 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$) 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 P 에

대하여 $\overline{OP} = \overline{OF'}$ 을 만족시키는 제1사분면 위의 점 P 를 P' 이라 하고, 직선 $P'F$ 가 쌍곡선과

만나는 점 중 점 P' 이 아닌 점을 Q 라고 하자, $\overline{F'Q} = 10$ 일 때, 점 F 를 초점으로 하고 점 P' 을

지나는 포물선 l 이 존재한다. 점 P' 에서 포물선 l 의 준선에 내린 수선의 발을 R 이라 할 때,

삼각형 $P'RO$ 의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{10}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 포물선 l 의 꼭짓점은 선분

OF 위에 존재하고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Comment >

주어진 조건을 따라가면 무난하게 풀리는 문제이다.

Chapter 1.

이차곡선

13

두 초점이 $F(0, \sqrt{11})$, $F'(0, -\sqrt{11})$ 이고, 단축의 길이가 6인 타원이 있다. 이 타원이 직선 $y = \frac{1}{6}x + 3$ 과 만나는 점 중 x 좌표가 양수인 점을 A , 점 A 에서 y 축에 내린 수선의 발을 A' , 점 A 에서 타원에 접하는 직선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하자. y 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 삼각형 APB 의 둘레가 최소일 때, $\tan(\angle A'AP) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Comment >

타원은 기본적으로 대칭이다.

이에 더해서 반사 성질을 이용해 볼 수 있다.

Chapter 1.

이차곡선

14

좌표평면 위에 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 과 두 점

F , F' 을 꼭짓점으로 하고 단축의 길이가 $2\sqrt{a^2+2}$ 인 타원이 존재한다. 쌍곡선 위의 두

점 $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ 와 쌍곡선과 타원의 제1사분면 위의 교점 $C(p, q)$ 가

$\overline{AC} + \overline{BC} = 2\sqrt{a^2+4}$ 를 만족시킬 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, c 는 양수이다.) [4점]

Comment >

타원의 식을 작성할 수 있다.

그 후에는 연립까지.

Memo >

Chapter 2.

벡터

Chapter 2.

벡터

15

좌표평면 위에 초점이 각각 $F(\sqrt{10}, 0)$, $F'(-\sqrt{10}, 0)$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ 위의

제1 사분면 위의 점 A 에 대하여 점 P 가 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{10}$ 을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PF'}|$ 의

최댓값은? (단, O 는 원점이다.) [3점]

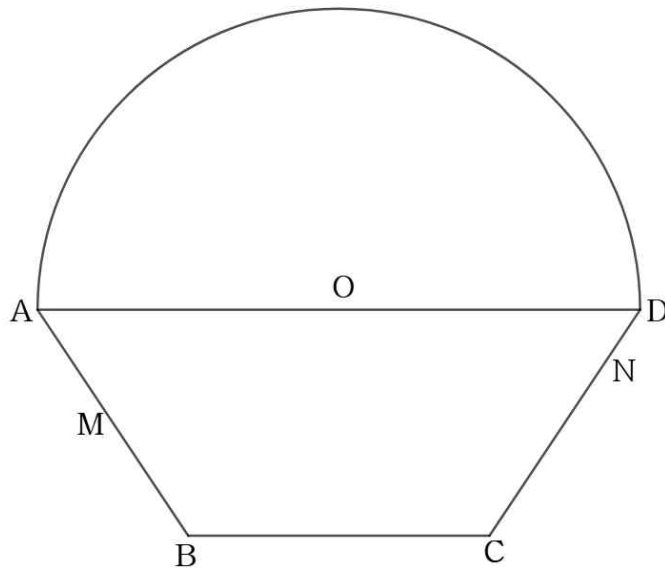
- ① 8 ② $2+2\sqrt{10}$ ③ $2+2\sqrt{11}$ ④ $2+4\sqrt{3}$ ⑤ $2+2\sqrt{13}$

Comment >

원이 보이면 기본적으로 원의 중심을 기준으로
벡터분해를 해야한다.

16

그림과 같이 평면에서 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2$, $\overline{AD} = 4$ 인 사각형 ABCD와 선분 AD를 지름으로 하는 반원이 있다. 두 선분 AD, AB의 중점을 각각 O, M이라 하고, 선분 CD의 3:1 내분점을 N이라 하자. 호 AD 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BP}$ 의 최댓값은? [3점]



- ① $\sqrt{43}+4$ ② $2\sqrt{11}+4$ ③ $3\sqrt{5}+4$ ④ $\sqrt{46}+4$ ⑤ $\sqrt{47}+4$

Comment >

역시 원이 보이면 원의 중심으로 벡터분해

Chapter 2.

벡터

17

한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF 에 대하여 선분 BE 위의 두 점 P, Q는 다음을 만족시킨다.

$$8\overrightarrow{AP} = 5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AE}, \quad 4\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AE}$$

선분 AF의 중점을 M, 선분 CD의 중점을 N이라 할 때, $\overrightarrow{MR} : \overrightarrow{RN} = 1 : 3$ 을 만족시키는 선분 MN 위의 점 R이 있다. 선분 FE의 중점을 S라 할 때, $|\overrightarrow{QS} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{CE}|$ 의 값은? [3점]

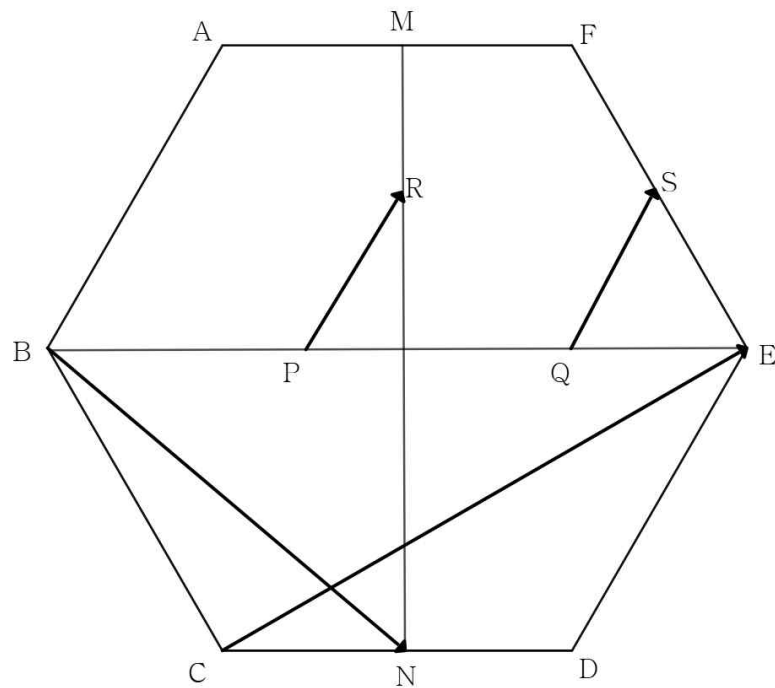
① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10



Comment >

벡터의 시점은 항상 자유롭다.

다르게 보이는 벡터라도 같은 벡터일 수 있다.

Chapter 2.

벡터

18

좌표평면에서 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB 위의 점 M, 선분 AC 위의 점 N이 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]

(가) $|\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{AN}| \sin(\angle BAC) = 4$

(나) $4\overrightarrow{NM} = 3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}$

(다) $3\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$

① 20

② 22

③ 24

④ 26

⑤ 28

Comment >

짜치는 문제지만 이렇게 낼 수도 있지 않을까?

Chapter 2.

벡터

19

두 수직인 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 에 대하여 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$, $|\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{10}$ 일 때, 두 벡터 $3\vec{a} + 2\vec{b}$ 와 $-4\vec{a} + k\vec{b}$ 가 서로 수직이 되도록 하는 상수 k 의 값은? [3점]

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

Comment >

단순한 계산 문제

Chapter 2.

벡터

20

좌표평면 위의 세 점 A, B, C 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [3점]

(가) $\overrightarrow{AB} = (3, 4), \overrightarrow{BC} = (-2, -1)$

(나) 선분 CA 의 중점을 M 이라 할 때, $\overrightarrow{OM} = (4, 3)$ 이다.

① 54

② 55

③ 56

④ 57

⑤ 58

Comment >

시점을 하나로 통일해 볼까?

Chapter 2.

벡터

21

두 초점이 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 y 축 위의 점 $A\left(0, \frac{20}{3}\right)$ 이 있다.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{FA}$ 를 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형을 l 이라 하자. 도형 l 이 쌍곡선의 한 점근선과 평행할 때, 도형 l 과 쌍곡선과의 교점을 C 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 점 D 가

존재할 때, 사각형 $CF'DF$ 의 둘레의 길이가 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, t, k 는 실수이고

p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $\overrightarrow{F'O} \cdot \overrightarrow{DC} = 34$

(나) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{F'C}$

Comment >

벡터에 관한 독특한 표현이 등장하였다.

의미하는 바를 공부해 두도록 하자.

Chapter 2.

벡터

22

$\overline{AB} = \sqrt{10}$, $\overline{AD} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$ 인 평행사변형 ABCD 에서 선분 AB 의 중점을 M, 선분 AD 의 중점을 N, 선분 BC 의 중점을 O, 선분 BC 를 1 : 3 로 내분하는 점을 P 라 하자. 두 선분 AP, NM 의 교점을 X 라 하고 두 선분 DO, CN 의 교점을 Y 라 할 때, $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{DY} = 0$ 를 만족시킨다. $\angle BAD = \alpha$ 라 할 때, $\cos \alpha = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $\alpha < \frac{\pi}{2}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Comment >

사교 좌표계를 의도한 문제이다.

나올 가능성은 작으니 알고만 가도록 하자.

Chapter 2.

벡터

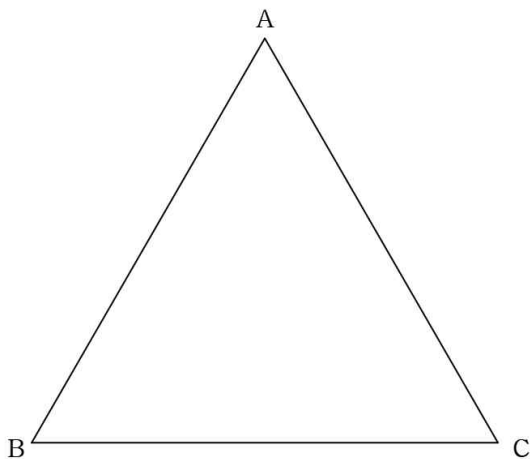
23

그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad \overrightarrow{BP} = s\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{BC} \quad (0 \leq s \leq \frac{1}{2}, 0 \leq t \leq \frac{1}{2})$$

$$(나) \quad \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} \geq 8$$

점 Q는 두 선분 BC와 CA위를 움직인다. $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ}$ 를 만족시킬 때,
 $|\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{CR}|^2$ 의 최댓값을 구하시오 [4점]



Comment >

전부 기출에서 나왔던 소재들이다. 어려움을 겪었다면
기출 공부를 다시 하도록 하자.

Chapter 2.

벡터

24

초점이 점 $F(a, 0)$ ($-7 < a < 1$)이고 준선이 $x = -7$ 인 포물선 위의 점 $P(0, b)$ ($b > 0$)에 대하여 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 하자. x 축 위의 점 $A(1, 0)$ 에 대하여 $\overline{AP} = \overline{PH}$ 일 때, $|\overrightarrow{HQ}| = 2$ 를 만족시키는 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{AP}$ 의 최댓값을 구하시오.

[4점]

Comment >

단원 복합형 문제는 겹보기 난이도만 높을 것이다.

겉먹지 말도록.

Chapter 2.

벡터

25

좌표평면에서 $A(8, 6)$, $B(-4, -1)$, $C(-6, -3)$ 에 대하여 세 점 P , Q , R 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{AP}| = 1$

(나) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$

(다) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QR}$ 이고 $\overline{BQ} = 3\sqrt{2}$ 이다.

점 Q , R 이 제3사분면 위의 점일 때, 사각형 $BCRQ$ 변 위를 움직이는 점 S 에 대하여

$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OS}|$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $(M-1)^2$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

Comment >

도형의 이동은 빈출 소재이다.

Chapter 2.

벡터

26

좌표평면에서 $A(4, 6)$, $B(10, 2)$ 에 대하여 두 점 P , Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$|\overrightarrow{AP}| = 2, |\overrightarrow{BQ}| = 1$$

$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P , Q 를 P' , Q' 이라 할 때, 선분 $P'A$ 위를 움직이는 점을 X , 선분 $Q'B$ 위를 움직이는 점을 Y 라 하자. 함수 $y = -x - 1 (-1 \leq x \leq 0)$ 의 그래프 위를 움직이는 점 Z 에 대하여 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OZ}$ 를 만족시키는 점 C 가 나타내는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{65}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Comment >

자취가 나타내는 영역의 넓이를 구하는 것은 빈출 소재이다.

Chapter 2.

벡터

27

좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 마름모 ABCD가 존재한다.

$$\left| \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \right| = 10, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 72$$

선분 AC와 BD의 교점을 M이라 할 때, 점 P와 사각형 ABCD 변 위 또는 내부에 있는 점 Q는

다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP}) = 0$$

$$(나) \quad -12 \leq \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MQ} \leq 12$$

$$(다) \quad -18 \leq \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MQ} \leq 18$$

$|\overrightarrow{PQ}|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m=a+\sqrt{b}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]

Comment >

상당히 복잡해 보인다. 이럴 때는 성분화를 시켜서 접근할 수 있지 않을까?

Memo >

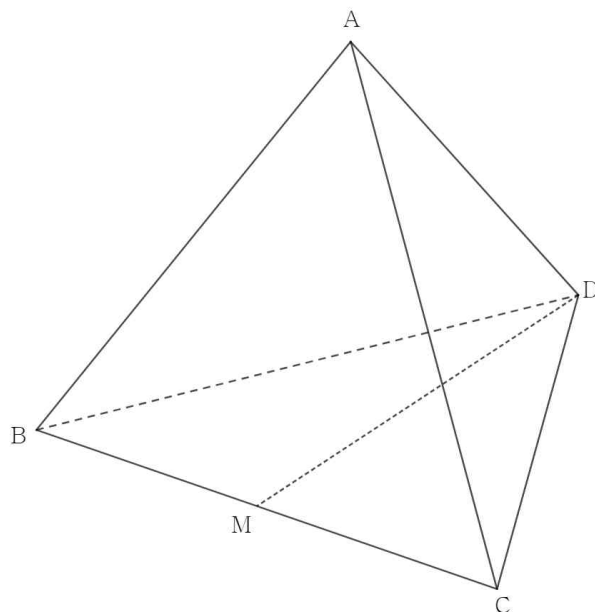
Chapter 3.

공간도형

Chapter 3. 공간도형

28

그림과 같이 정사면체 $ABCD$ 에서 삼각형 ABC 의 무게중심을 G , 선분 BC 의 중점을 M 이라 할 때, 선분 MD 의 중점인 점 N 이 존재한다. 선분 GN 과 평면 BCD 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은? [3점]



① $\frac{4}{9}$

② $\frac{5}{9}$

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{7}{9}$

⑤ $\frac{8}{9}$

Comment >

기본적인 단면화 문제이다.

Chapter 3. 공간도형

29

좌표공간에서 xy 평면 위의 원 $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$ 위의 점 P 와 구

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 1$ 위의 점 Q 에 대하여 선분 PQ 의 길이의 최댓값은? [3점]

- ① $2\sqrt{14}+1$ ② $\sqrt{57}+1$ ③ $\sqrt{58}+1$ ④ $\sqrt{59}+1$ ⑤ $2\sqrt{15}+1$

Comment >

원이나 구가 등장하면 중심을 생각하도록 하자.

Chapter 3. 공간도형

30

z 축 위에 중심이 있는 반지름이 3인 구 A 의 xy 평면 위로의 정사영을 A' 이라 하고, 점 $B(2, 4, 0)$ 를 지나는 직선이 도형 A' 과 오직 한 점에서 만날 때 그 점을 C 라 하고, 도형 A' 위의 한 점을 D 라 하자. 삼각형 BCD 의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 D 를 D_0 라 할 때, BCD_0 의 넓이는? (단, 점 C 의 x 좌표는 음수이다.) [3점]

- ① 9 ② $3\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{11}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{13}$

Comment >

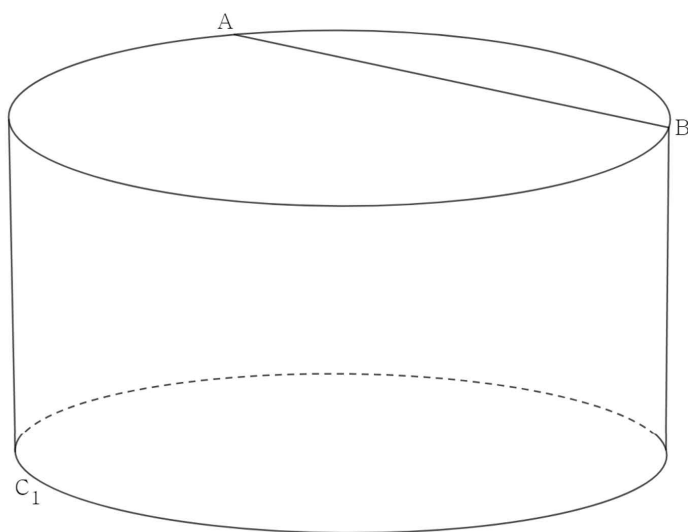
특정한 값이 정해지지 않더라도 정사영을 통하여 확정
지을 수 있다.

Chapter 3.

공간도형

31

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 5, 높이가 4인 원기둥이 있다. 원기둥의 윗면의 둘레 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 길이가 8이다. 원기둥의 아랫면을 C_1 이라 할 때, C_1 위의 한 점을 P라고 하자. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 선분 PM의 길이의 최댓값은? [3점]



① $6\sqrt{2}$

② $2\sqrt{19}$

③ $4\sqrt{5}$

④ $2\sqrt{21}$

⑤ $2\sqrt{22}$

Comment >

간단한 눈풀기용 문제이다.

Chapter 3.

공간도형

32

좌표공간에 두 점 $A(2, 1, 1)$, $B(a, 1, -1)$ 가 있다. xy 평면 위의 점 P 와 yz 평면 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값이 11일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

Comment >

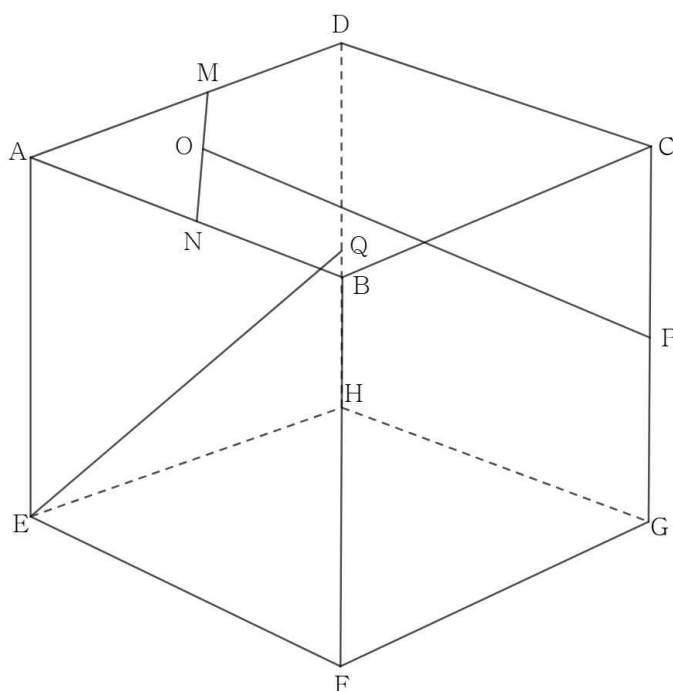
대칭이동은 공간에서도 사용할 수 있다.

Chapter 3.

공간도형

33

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 선분 AB , AD , CG 의 중점을 각각 M , N , P , 선분 MN 의 중점을 O , 선분 DH 의 중점을 Q 라고 하자. 두 직선 OP 와 EQ 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos^2 \theta$ 의 값은? [3점]



① $\frac{8}{55}$

② $\frac{9}{55}$

③ $\frac{2}{11}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{12}{55}$

Comment >

복잡해 보이는 그림이 주어졌다. 그렇지만 결국 요구하는 것은 평행이동과 삼수선 정리이다.

Chapter 3.

공간도형

34

좌표공간의 두 점 $A(1, 3, 6)$, $B(-1, -1, 2)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 구 S 위에 서로 다른 세 점 P, Q, R 가 있다. 선분 AB 의 중점 M 에서 평면 PQR 에 내린 수선의 발이 삼각형 PQR 의 무게중심이고, $\overline{PQ} = 4$ 일 때, 사면체 $MPQR$ 의 부피는? [3점]

- ① 4 ② $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{11}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{13}}{3}$

Comment >

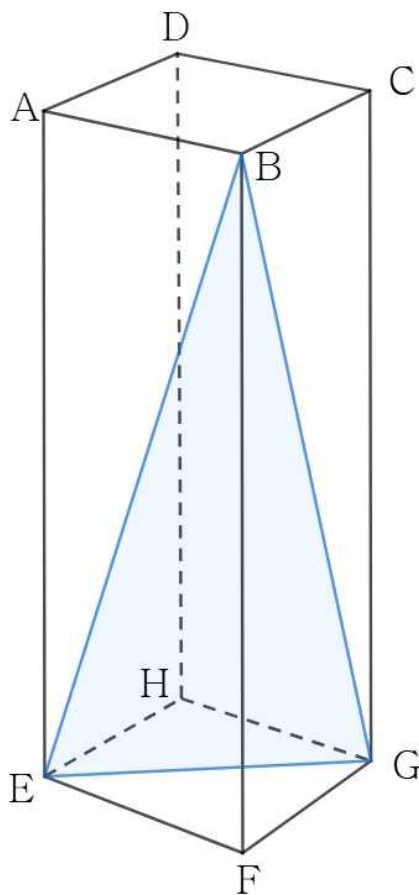
구의 중심에서 구 위의 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형에 수선의 발을 내렸더니 무게중심이다. 그러면 삼각형은 어떤 삼각형일까?

Chapter 3. 공간도형

35

그림과 같이 직육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 삼각형 EGB 의 평면 $ABFE$ 으로의 정사영의 넓이를 S_1 , 평면 $BCGF$ 으로의 정사영의 넓이를 S_2 , 평면 $ABCD$ 으로의 정사영의 넓이를 S_3 라 하자.

$\overline{AB} = 3$, $S_1 : S_2 : S_3 = 9 : 6 : 2$ 일 때, 사각형 $BFGC$ 의 넓이는? [3점]



① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

Comment >

정사영의 넓이를 이용해 길이를 우회적으로 구해낼 수 있다.

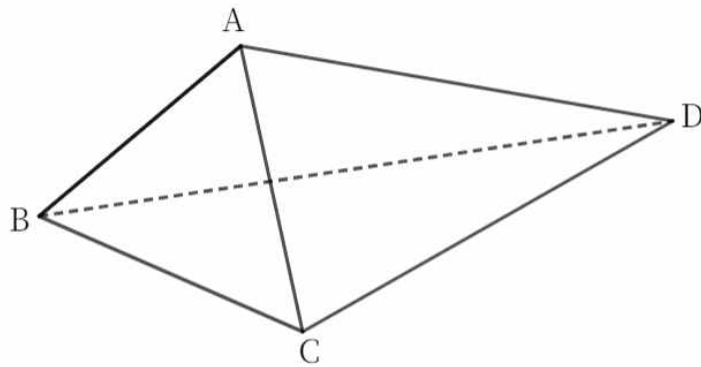
Chapter 3.

공간도형

36

그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$, $\overline{AD} = 6$ $\overline{BC} \perp \overline{AD}$ 인 사면체 ABCD 에 대하여 선분 BC 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{MD} = 4\sqrt{3}$ 이다. 점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발을 A' 이라 할 때, $\overline{MA'} = \sqrt{3}$ 이다. 직선 AM 과 직선 CD 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때,

$\sin \theta = \frac{q}{p} \sqrt{130}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Comment >

직선과 직선과의 각은 결국 평행이동이다.

Chapter 3.

공간도형

37

반지름의 길이가 1, 2, 3 인 외접하는 세 구 S_1, S_2, S_3 의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3 라 할 때,
 S_1, S_2, S_3 와 모두 접하는 평면 α 가 존재한다. 평면 $O_1O_2O_3$ 와 평면 α 가 이루는 각의 크기를
 θ 라 할 때, $\cos^2 \theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Comment >

직접 각을 구하기 어려우면 정사영의 넓이 비를 이용할 수
있지 않을까?

Chapter 3.

공간도형

38

좌표공간에 외접하는 두 개의 구

$$S_1 : x^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2, \quad S_2 : x^2 + (y+1)^2 + (z-8)^2 = r^2$$

가 있다. x 축을 지나는 평면 α 와 구 S_1 이 만나서 생기는 원을 C_1 라 하고, x 축을 지나는 평면 β 와 구 S_2 이 만나서 생기는 원을 C_2 라 하자. 원 C_1, C_2 의 넓이가 최대가 될 때, C_1, C_2 를 각각 C_1', C_2' 라 하고, C_2' 일 때의 평면 β 를 β' 이라 하자. 원 C_1' 의 평면 β' 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p} \sqrt{65} \pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Comment >

구 두 개, 평면 두 개, 원 두 개...

주어진 것이 많다. 호흡이 길 수는 있지만 잘 따라가도록 하자.

Chapter 3.

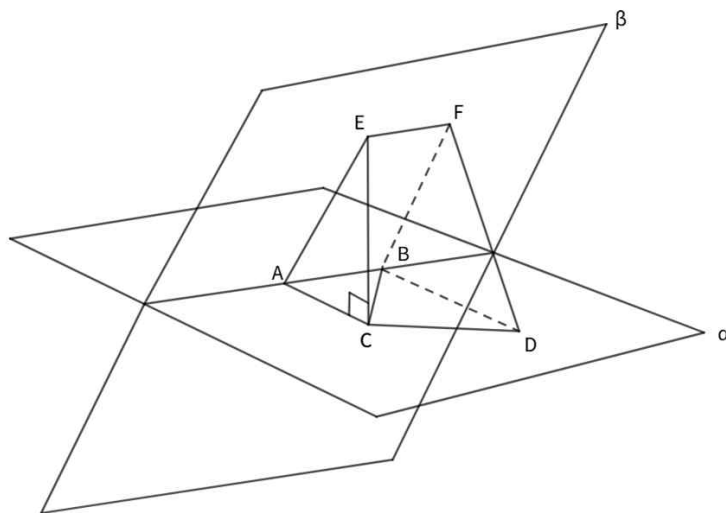
공간도형

39

그림과 같이 직선 l 을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 두 평면 α , β 가 있다. 직선 l 위의 두 점 A , B 와 평면 α 위의 두 점 C , D , 평면 β 위의 두 점 E , F 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 두 선분 AC , BD 는 서로 평행하다.
- (나) 점 E 에서 평면 α 에 내린 수선의 발은 C 이다.
- (다) 사각형 $ABFE$ 는 직사각형이다.

$\overline{AE} = 8$, $\overline{BD} = 10$, $\overline{CD} = 3\sqrt{6}$ 일 때, 평면 FCD 와 평면 β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Comment >

평면 사이의 각을 구할 때, 정사영의 넓이를 우회적으로
이용할 수 있다.

Chapter 3.

공간도형

40

한 변의 길이가 6인 정육각형 ABCDEF를 밑면으로 하고 높이가 6인 정육각뿔

O-ABCDEF와 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구 S가 있다. 선분 OA의 중점을 M이라 할 때, 점 O를 지나며 평면 MCE와 평행한 평면 α 와 구 S가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 선분 OD를 5:1로 내분하는 점 N이라 할 때, 원 C의 평면 FBN 위로의 정사영의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{10\sqrt{13}}{13}\pi$ ② $\frac{11\sqrt{13}}{13}\pi$ ③ $\frac{12\sqrt{13}}{13}\pi$ ④ $\sqrt{13}\pi$ ⑤ $\frac{14\sqrt{13}}{13}\pi$

Comment >

복잡한 도형일수록 단면화를 잘 시키도록 하자.

Chapter. 1 이차곡선									
01	⑤	02	⑤	03	②	04	④	05	②
06	③	07	⑤	08	②	09	⑤	10	8
11	②	12	8	13	59	14	5		

Chapter. 2 벡터									
15	②	16	①	17	⑤	18	③	19	①
20	①	21	71	22	115	23	669	24	68
25	53	26	98	27	100				

Chapter. 3 공간도형									
28	④	29	③	30	③	31	③	32	①
33	①	34	③	35	④	36	14	37	59
38	383	39	21	40	③				

1. 타원과 쌍곡선이 보이므로 길이를 전부 표시하도록 하자.

$\overline{AF'}=a$ 라고 하면, 타원과 쌍곡선이 초점을 공유하므로 각각의 정의에 의해서 $\overline{AF}=12-a$, 쌍곡선의 정의에 의해서 $\overline{AF}=-8+a$, 이 둘이 같으므로 $a=10$ $\overline{FF'}=10$,

$\overline{AF}=2$ 이므로 $3\sqrt{11}\times2\times\frac{1}{2}=3\sqrt{11}$

[정답] ⑤

2. 삼각형 AOF의 넓이가 8이라는 것을 본 순간 밑변을 OF로 두고 밑변의 길이가 4이므로 높이가 4라는 것을 떠올릴 수 있다. 포물선의 식에 대입해 보면 A의 x 좌표가 1임을 구할 수 있고, 각각의 점을 전부 좌표로 나타낼 수

있다. $F(4, 0)$, $A(1, 4)$, $M(\frac{5}{2}, 2)$, $B(0, 2)$ 라고 할 수

있으므로 $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MF}$ 라는 사실을 알 수 있다.

따라서 삼각형 ABF의 외접원의 중심이 M이다.

각 AMB는 중심각이고 구하고자 하는 값은

원주각이다. 그런데 $\angle AFO$ 도 동위각으로 θ 이므로

$\angle AFB$ 는 $\frac{\theta}{2}$ 이다. 삼각형 BFO를 보면 $\overline{BO}=2$,

$\overline{FO}=4$ 이므로 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

[정답] ⑤

3. 선분 AB를 a 라고 놓으면 선분 AF'의 길이는 $2a$ 가 되게 되고, 선분 BF'의 길이는 a 가 되므로 대칭을 이용하면 선분 AF의 길이도 a 이므로 선분 FF'의 길이는 $3a$ 가 된다.

다음으로 선분 FC'의 길이를 b 라고 놓으면 선분 F'C'의 길이는 $5b$ 가 된다. 따라서 선분 FF'의 길이는 $6b$ 이므로 $3a=6b$ 를 만족시키고, 선분 AC'은 b 임을 알 수 있다.

따라서 삼각형 CAF는 이등변삼각형이므로, $\overline{CF'}=\overline{CF}+4$ 를 만족한다. 따라서 $b=2$ 이다. 쌍곡선의 방정식은 주축의

길이가 4이고 $c=6$ 이므로 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 이다. 점 C의

x 좌표는 4이고, 대입하면 $y=4\sqrt{6}$

[정답] ②

4. $\overline{AF'}=\overline{FF'}$ 이므로 쌍곡선이 y 축 대칭이라는 점을 활용하면, $\overline{AF'}=\overline{AF}$ 이다. 따라서 삼각형 AFF'은 정삼각형이다. 쌍곡선의 한 점근선의 기울기와 직선 AF가

서로 평행하므로 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$ ($a>0, b>0$), $a^2+b^2=12$

두 식을 연립하면 $a=\sqrt{3}$

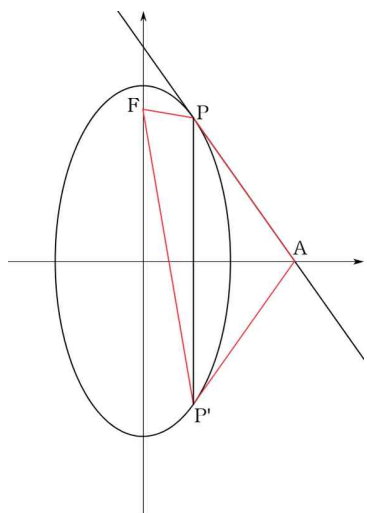
$\angle F'FP=\frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 F'FP에서 코사인법칙을

적용해주면 $(\alpha-2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2-8\sqrt{3}(\alpha-2\sqrt{3})\cos\frac{\pi}{3}=\alpha^2$
 $\therefore \alpha=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ($\because \alpha>0$)

[정답] ④

5. 점 P가 나타내는 도형 E는 초점의 중점이 (5, 3)이면서 장축의 길이가 10인 타원이다. 따라서 초점의 중점이 (0, 0)이라 가정하고 접선의 방정식을 세운 후 평행이동을

10. 타원의 장축의 길이를 $2a$ 라 하면, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 이다. 선분 PP' 의 중점을 M 이라 할 때, 선분 PM 의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 점 P 의 좌표를 $(k, 2\sqrt{2})$ 라고 하면 점 P 는 타원 위의 점이므로 $\frac{k^2}{3} + \frac{8}{a^2} = 1$ 이다. 또한 점 P 에서의 접선의 방정식은 $\frac{k}{3}x + \frac{2\sqrt{2}}{a^2}y = 1$ 이고, 접선이 $A(3, 0)$ 을 지나므로 $k = 1$ 따라서 $a^2 = 12$ 이므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$ 이다. $\overline{PM} = 2\sqrt{2}$, $\overline{MA} = 2$ 이므로 삼각형 PMA 에 대하여 피타고라스를 적용하면 $\overline{PA} = 2\sqrt{3}$ 이다. 선분 PF 와 $P'A$ 은 x 축 대칭이고, 선분 PF 와 $P'F$ 의 합은 타원의 대칭성을 통해 타원의 장축의 길이와 같으므로 사각형 $PFP'A$ 의 둘레의 길이는 $4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ 따라서 α 의 값은 8이다.



[정답] 8

11. 포물선 C_2 는 원점을 지나는 상황이므로 $(0, 0)$ 을 대입해 보면,
 $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 (\because a > 0)$
 따라서 $A(1, 2)$, $B(0, 4)$ 이므로 직선 AB 의 식을 작성할 수 있다. $\Rightarrow y = -2x + 4$
 점 C 의 좌표를 구하기 위해서 포물선 C_1 과 연립하면
 $(-2x + 4)^2 = 4x$, $x^2 - 5x + 4 = 0 \therefore x = 1, 4$
 따라서 점 C 의 x 좌표는 4이다. 점 C' 역시 좌표를 구해보면 $C'(-1, -4)$ 이다. 점 B 에서 선분 CC' 까지 내린 수선의 발을 B' 이라 하면, 삼각형 $BC'C$ 의 넓이는 밑변을 선분

CC' 의 길이 만큼 갖고 높이를 선분 BB' 의 길이 만큼 갖는 삼각형의 넓이이다. 따라서 $5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 20$
 [정답] ②

12. $\overline{F'Q} = 10$ 이라 하였으므로 쌍곡선의 성질에 의해서 $\overline{FQ} = 6$ 이다. $\overline{OP'} = \overline{OF'} = \overline{OF}$ 이므로 $\angle F'P'F = \frac{\pi}{2}$ 이다. 선분 $P'F$ 의 길이를 a 라고 하고, 삼각형 $F'P'Q$ 에 대하여 피타고라스의 정리를 사용하면 $(a+4)^2 + (a+6)^2 = 10^2$, $a = 2$ 구하는 것은 삼각형 $P'RO$ 의 넓이이므로 점 P' 에서 x 축에 수선의 발을 내린 점을 P'' 이라 할 때, 밑변을 $\overline{RP'}$ 로 하고 높이가 $\overline{P'P''}$ 인 삼각형의 넓이를 구하면 된다.
 $\overline{FF'} \times \overline{P'P''} = \overline{P'F'} \times \overline{P'F}$, $\overline{P'P''} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$
 $\frac{3\sqrt{10}}{5} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \therefore p + q = 8$

[정답] 8

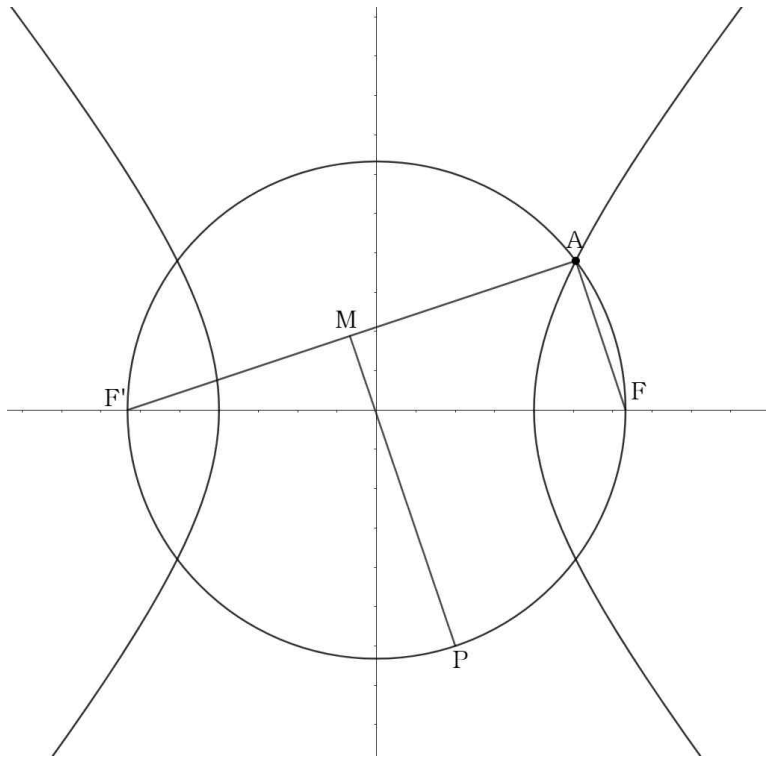
13. 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1$ 임을 알 수 있다. 타원과 직선의 교점을 구해야 하므로 식을 투용해서 대입하고 진행하는 것이 맞아 보인다. 그러면 A 의 좌표는 $A(2, \frac{10}{3})$ 임을 알 수 있다. 구하고자 하는 것은 삼각형 APB 의 둘레의 최솟값이다. 타원은 y 축 대칭인 도형인데, 마침 y 축 위에 P 가 있으므로 y 축을 기준으로 대칭이동을 시켜보면, A 를 타원 위의 또 다른 점으로 대칭이동 시킬 수 있고, 이 점을 A'' 이라 하면 $A''PA'$ 의 값은 $A'AP$ 와 같으므로 이 각을 구하면 된다. $P'(0, \frac{30}{13})$ 이므로 $\tan \theta$ 는 $\frac{20}{39}$ 임을 알 수 있다. $\therefore p + q = 59$

[정답] 59

14. 타원의 방정식을 구해보면 $\frac{x^2}{a^2+4} + \frac{y^2}{a^2+2} = 1$ 이다. 점 C가 $\overline{AC} + \overline{BC} = 2\sqrt{a^2+4}$ 를 만족시키므로 점 A, B는 타원의 초점이다. 따라서 타원의 초점은 $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$ 이므로 $a = \sqrt{2}$ 이다. 따라서 타원의 방정식과 쌍곡선의 방정식이 정해졌으므로 연립을 통해서 C를 구할 수 있다.
 $C(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ 이므로 $a^2 = 3+2=5$

[정답] 5

15. 점 P가 나타내는 도형은 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원이다. 점 A와 F'의 중점을 M이라 할 때, $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PF'}| = 2|\overrightarrow{PM}|$ 이다.



따라서 $|\overrightarrow{PM}|$ 이 최대가 되는 순간은 다음과 같은 상황이다.
 $\overline{AF} = 2$ 이므로 $\overline{OM} = 1$ 이다. $2(1 + \sqrt{10}) = 2 + 2\sqrt{10}$

[정답] ②

16. 반원이 등장하였으니, 원의 중심을 기준으로 벡터 분해하는 것이 우선이다.
 $\overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP}$ 로 생각을 해보자
 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BO}$ 는 고정이므로, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP}$ 만 고려하면 된다. 즉 $\overrightarrow{MN}$ 과 $\overrightarrow{OP}$ 가 평행할 때가 최댓값이 된다. 벡터들을

성분화하여 표현하면 $\overrightarrow{MN} = (\frac{13}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, $\overrightarrow{BO} = (1, \sqrt{3})$

$$\frac{13}{4} + \frac{3}{4} + \sqrt{(\frac{13}{4} \times 2)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2)^2} = \sqrt{43} + 4$$

[정답] ①

17. $\overrightarrow{QS}$ 와 $\overrightarrow{PR}$ 은 같은 벡터이므로

$$|\overrightarrow{QS} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{CE}| = |\overrightarrow{QS} \cdot (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CE})| \text{라고 할 수 있다.}$$

성분화를 시키면 $\overrightarrow{QS} = (1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BN} = (4, -2\sqrt{3})$,
 $\overrightarrow{QS} = (6, 2\sqrt{3})$

$$1 \times 10 + \sqrt{3} \times (-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 10$$

[정답] ⑤

18. $|\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{AN}| \sin(\angle BAC) = 4$ 라 하였다.

두 변의 길이가 a, b 이고 끼인각이 θ 인 삼각형의 넓이는,

$$S = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \theta \text{이므로, 두 변의 길이가 } AM, AN \text{인}$$

삼각형의 넓이로 해석할 수 있다. 따라서 삼각형 AMN의 넓이는 2이다. (나), (다) 조건에 따라 점 M은 선분 AB의 1:3내분점, 점 N은 선분 AB의 1:2내분점이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $2 \times 12 = 24$

[정답] ③

19. 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 수직이라고 하였으므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이다.

$$\text{역시 } (3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-4\vec{a} + k\vec{b}) = 0 \text{ 이므로 } -12|\vec{a}|^2 + 2k|\vec{b}|^2 = 0$$

위의 두 식도 제곱을 해주면

$$4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 5, |\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 = 10$$

$$|\vec{a}|^2 = 1, |\vec{b}|^2 = 1 \text{ 이므로 } \therefore k = 6$$

[정답] ①

20. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ 라 하자.

$\overrightarrow{OA} = (a, b)$, $\overrightarrow{OB} = (c, d)$, $\overrightarrow{OC} = (e, f)$ 라 하면 세 식을

이용하여 미지수들을 확정 지을 수 있다.

$$c - a = 3, d - b = 4, e - c = -2, f - d = -1, a + e = 8,$$

$$b + f = 6$$

$$\text{식을 전부 연립하면 } c = \frac{13}{2}, d = \frac{11}{2}, e = \frac{9}{2}, f = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \frac{24}{2} \times \frac{9}{2} = 54$$

[정답] ①

21. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{FA}$ 라고 하였으므로 점 P는 점 F, A를
지나는 직선의 방정식이다. 이 직선의 방정식이 쌍곡선의
점근선 중 하나와 평행하다고 하였으므로 쌍곡선의 점근선은

$$y = \pm \frac{4}{3}x \text{임을 알 수 있다. 따라서 쌍곡선의 방정식은}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{이다. (가) 조건을 보게 되면 } |\overrightarrow{F'O}| = 5 \text{인}$$

벡터이므로 x 축으로 정사영을 내렸을 때의 $\overrightarrow{DC}$ 의 크기는

$$\frac{34}{5} \text{가 되어야 한다. 직선 AC는 } y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} \text{ 이므로 점}$$

$$C \text{의 } x \text{좌표는 } \frac{17}{5} \text{이다.}$$

(나) 조건을 보게 되면 $\overrightarrow{F'C}$ 와 $\overrightarrow{FD}$ 는 평행하므로 점 D는 점
C의 원점 대칭인 사실을 알 수 있다.

선분 CF의 길이를 a 라 하면 사각형 CF'DF의 둘레의 길이는
쌍곡선의 정의를 활용하여 $4a + 12$ 라고 쓸 수 있다.

$$\text{직각삼각형의 답을 활용하면 } a = \frac{8}{3} \text{이므로 사각형}$$

$$CF'DF \text{의 둘레의 길이는 } \frac{68}{3} \therefore p + q = 71$$

[정답] 71

22. 그냥 풀기는 복잡해 보이니 사교좌표계를 사용하도록
하자. 점 A(0,0)로 두고 시작하면 B(1,0), C(1,1), D(0,1)이

$$\text{된다. 마찬가지로 점 } M(\frac{1}{2}, 0), N(0, \frac{1}{2}), O(1, \frac{1}{2}),$$

$P(1, \frac{1}{4})$ 이므로 이 점들을 이용하여 각각의 직선의

방정식과의 교점을 구할 수 있다. 따라서 $X(\frac{2}{5}, \frac{1}{10})$,

$$Y(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \text{이므로 } \overrightarrow{XY} = (\frac{1}{10}, \frac{13}{20}), \overrightarrow{DY} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) \text{이다.}$$

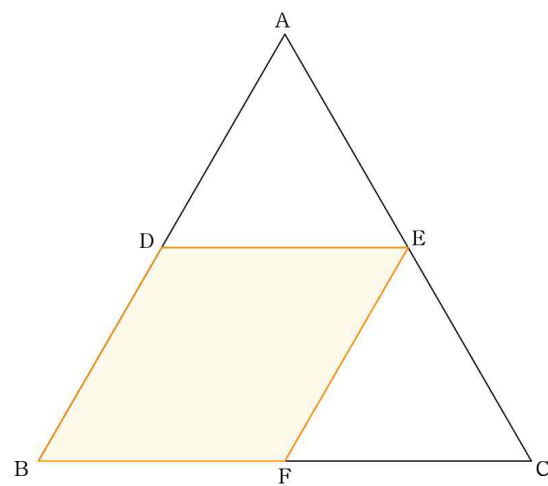
$$(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{4}\overrightarrow{b}) \cdot (\frac{1}{10}\overrightarrow{a} + \frac{13}{20}\overrightarrow{b}) = 0$$

$$\frac{1}{20} \times 10 - \frac{13}{80} \times \frac{160}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{40}{3} \times \cos \alpha = 0$$

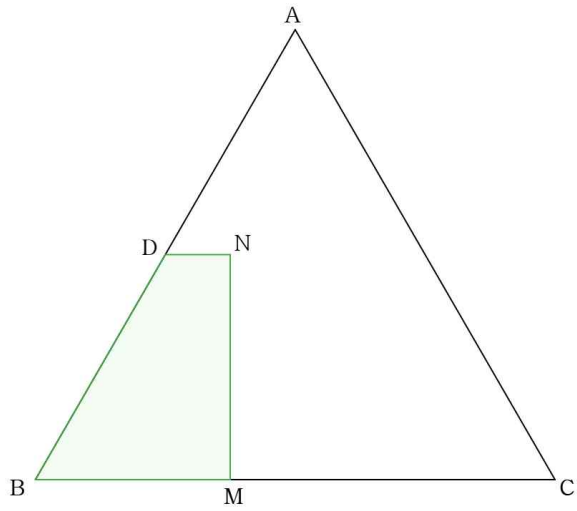
$$\therefore \cos \alpha = \frac{43}{72}, p + q = 115$$

[정답] 115

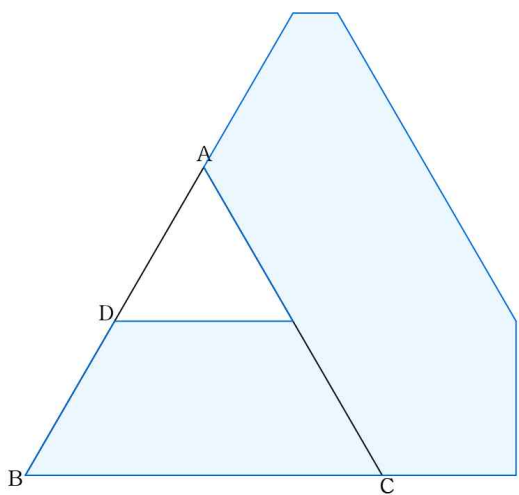
23. 주어진 도형은 간단해 보이지만 (가), (나) 조건은
까다로워 보인다. 하나씩 해석해 보도록 하자. (가) 조건에서
P점의 자취를 쫓다. 따라서 P점의 자취를 그려보는 것이
우선일 것이다. 선분 AB의 중점을 D, 선분 AC의 중점을
E, 선분 BC의 중점을 F라 할 때, (가) 조건에 의해서 점
P는 평행사변형 BFED 둘레 또는 내부에 있는 점이다.



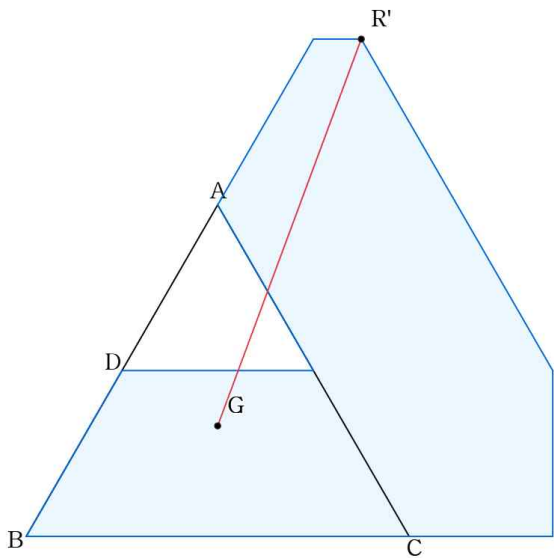
(나) 조건은 복잡해 보인다. 우선 생각해 봐야 할 점
은 비슷한 벡터가 존재하느냐인데 $\overrightarrow{PA}$ 와 $\overrightarrow{AP}$ 는 관련성
이 있어 보인다. 시점이 전부 P이므로 $\overrightarrow{AP}$ 의 시점을
P로 바꿔보도록 하자. 그러면 $\overrightarrow{PA}$ 로 묶을 수 있다.
 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} \geq 8$ 따라서 (가), (나) 조
건을 전부 만족하는 P의 자취는 다음과 같다.



이제 점 R의 자취를 구해보도록 하자. 점 R은 점 P의 자취를 점 Q의 자취만큼 이동시킨 도형의 자취이다.



따라서 파란색 면적만큼의 자취를 갖는다. 삼각형 ABC의 무게중심을 Q라 할 때 $|\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{CR}|^2 = 9|\overrightarrow{GR}|^2$ 따라서 R의 자취 중에서 점 G와의 거리의 최댓값을 구하면 된다. 최댓값을 가질 때의 R을 R'이라 할 때 다음과 같은 상황일 때가 $\overrightarrow{GR'}$ 이다.



$$\text{따라서 } 9|\overrightarrow{GR'}|^2 = 9 \times \left\{ \left(\frac{14}{\sqrt{3}} \right)^2 + 9 \right\} = 588 + 81 = 669$$

[정답] 669

24. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ 이므로 (단,) 조건에 의해서 초점 F는 A가 될

수 없으므로 $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{PB}$ 인 점이 된다. 따라서 $a = -1$ 이다.
원이 등장하였으므로 원의 중심으로 벡터분해를 해야한다.

$(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BQ}) \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{AP}$ 가 되므로 성분화를 통하여 각 벡터를 나타내면

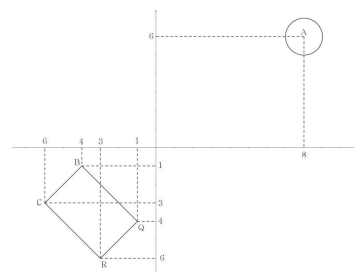
$$\overrightarrow{FB} = (-6, 4\sqrt{3}), \overrightarrow{AP} = (-1, 4\sqrt{3}) \text{이다.}$$

$$\therefore 6 + 48 + 7 \times 2 = 68$$

[정답] 68

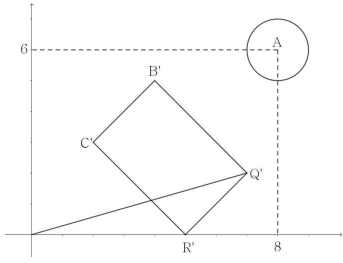
25. (가) 조건을 해석하면 점 P의 자취는 점 A를 중심으로 하면서 반지름이 1인 원의 자취이다. 다음으로 (나) 조건을 보게 되면 점 Q의 자취는 점 B를 지나며 선분 BC와 수직인 직선 위의 점이다. 점 R의 자취도 마찬가지로 점 C를 지나고 선분 BC와 수직인 직선 위의 점이다.

(다) 조건을 통해서 사각형 BCRQ는 직사각형임을 알 수 있다. 단, 케이스가 두가지가 있는데 점 Q, R이 제3사분면 위의 점이라고 하였으므로 다음과 같은 케이스로 고정된다.



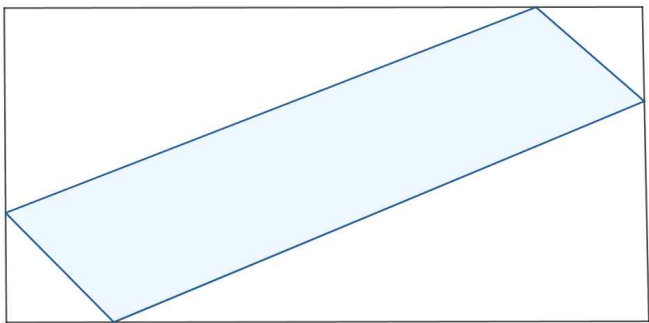
구하고자 하는 값은 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OS}|$ 의 최댓값이다. $\overrightarrow{OP}$ 를 보고 우선 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ 로 분해하는 것이 우선이다. 이렇게 되면 $\overrightarrow{AP}$ 는 신경 쓸 필요가 없다. 어차피 반지름 1인 원 위의 점이므로 $\overrightarrow{OS}$ 의 최댓값의 1을 더해주면 된다. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OS}$ 의 최댓값을 따지기 위해서 직사각형만 평행이동 시켜주면 된다.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS'} = \overrightarrow{OS'}$ 으로 변형시켜서 생각해 보면, 다음과 같이 평행이동 시킨 직사각형을 $B'C'R'Q'$ 가 그려진다. 점 Q' 일 때 원점 O에서의 거리가 최대이다. 따라서 M은 $\sqrt{7^2 + 2^2} + 1 = \sqrt{53} + 1$
 $\therefore (M-1)^2 = (\sqrt{53} + 1 - 1)^2 = 53$



[정답] 53

26. $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ 는 기울기가 $\frac{4}{7}$ 이고 각각 길이가 2, 1인 선분
위를 움직이는 점의 자취이다.
 $\overrightarrow{OZ}$ 는 제3사분면에만 존재하는 점들의 자취이므로 역벡터를
이용하여 $\overrightarrow{Z'O}$ 제1사분면 위의 점으로 바꾸어 표현할 수 있다.
따라서 점 C가 나타내는 영역의 넓이는 $\overrightarrow{OZ'}$ 의 자취를
기울기가 $\frac{4}{7}$ 이고 길이가 3인 선분 위를 움직이는 점만큼의
자취를 끌고 지나간 영역의 넓이가 된다.



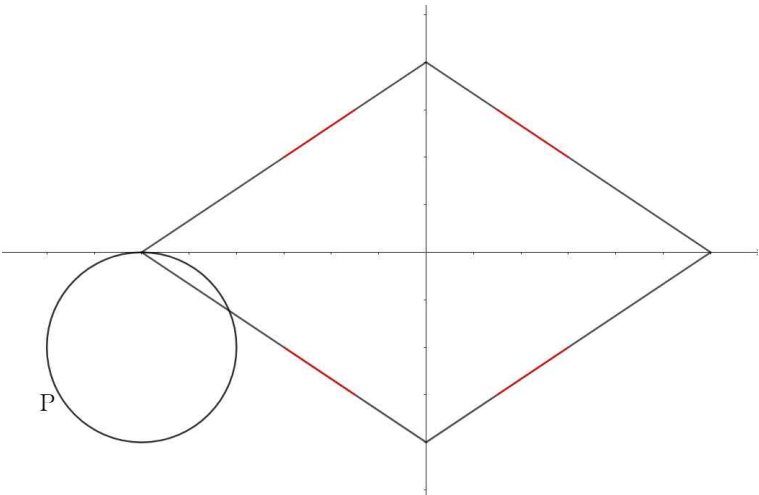
구해야할 것은 파란색 영역의 넓이 S 이므로 전체
사각형에서 삼각형 4개를 빼는 것으로 구해보도록 하자.
큰 직각삼각형 변의 넓이를 각각 $4a$, $7a$ 라고 하면,
 $S = (7a+2) \times (4a+2) - 4 - 28a$, $3^2 = (7a)^2 + (4a)^2$
두 식을 연립하면 $S = \frac{33}{65} \sqrt{65}$, $\therefore 33 + 65 = 98$

[정답] 98

27. 조건을 전부 파악해보면 마름모 ABCD는 한 대각선의
길이가 12, 나머지 대각선의 길이는 8인 마름모이다.
(가) 조건을 해석하기 위해 점 P를 (x, y) 라 놓고 벡터 식을
작성해보자.
이를 위해 대각선의 교점을 $(0, 0)$ 이라 하고 각각의 점을
좌표로 표시하면 $\Rightarrow A(-6, 0)$, $B(0, -4)$, $C(6, 0)$, $D(0, 4)$

이를 (가) 조건에 대입하면 $\Rightarrow (x+6, y) \cdot (x+6, y+4) = 0$
따라서 점 P의 자취는 $(x+6)^2 + (y+2)^2 = 4$ 를 방정식으로
갖는원이다.

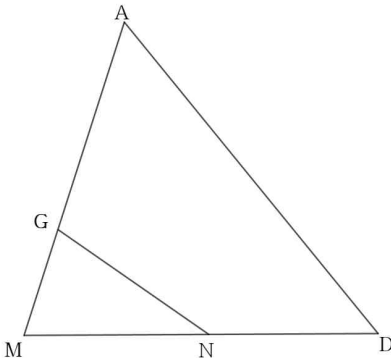
다음으로 (나) 조건과 (다) 조건을 만족시키는 점 Q의 범위를
빨간색으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 원 위의 점으로부터 빨간색 선 위의 점까지의 거리의
최솟값과 최댓값을 구하면 된다.
빨간색 선 위의 점 중 거리가 원의 중심과의 거리가
최소가 되는 점은 $(-3, -2)$ 이므로 거리를 구하면
 $\sqrt{(-6 - (-3))^2 + (-2 - (-2))^2} = 3$
원의 반지름은 2이므로 $3 - 2 = 1$
 $\therefore m = 1$
최대가 되는 점은 $(3, 2)$ 이므로 마찬가지로 거리를 구하면
 $\sqrt{(-6 - (3))^2 + (-2 - (2))^2} = \sqrt{97}$
원의 반지름은 2이므로 $\sqrt{97} + 2$
 $\therefore M = \sqrt{97} + 2$
따라서 $M = 2 + \sqrt{97}$, $m = 1 \therefore a + b = 100$

[정답] 100

28.



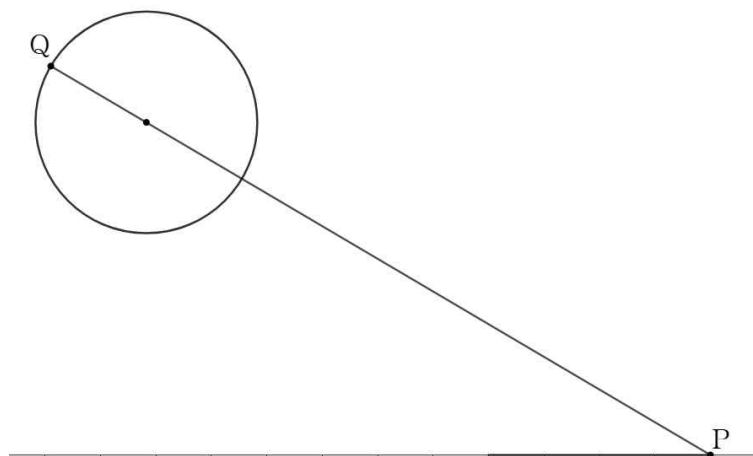
평면 MAD를 보게 되면 다음과 같다.

따라서 구하는 값은 $\angle GNM$ 의 코사인 값이다.

$$\overline{GM}=6a \text{라 하면 } \overline{MN}=9a, \overline{GN}=9a \text{ 이므로 } \cos\theta=\frac{7}{9}$$

[정답] ④

29. 다음 그림과 같이 평면 OPQ에서 보았을 때 다음과 같이 구의 중심을 지나며 원의 가장 반대편 점을 지날 때가 최댓값을 가진다.



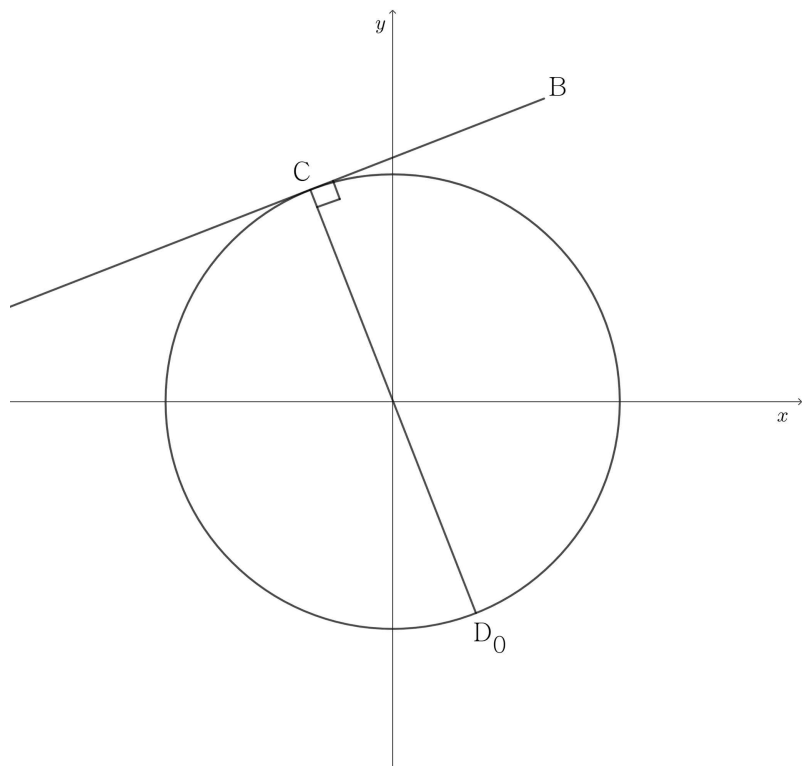
$$\therefore \sqrt{7^2+3^2}+1=\sqrt{58}+1$$

[정답] ③

30. 구 A의 z 좌표를 a 라 하면 $x^2+y^2+(z-a)^2=9$ 라고 방정식을 세울 수 있다. 구 A를 xy 평면 위로 정사영을 내리게 되면 이 도형은 $x^2+y^2=9$ 의 방정식을 갖는 원의 둘레와 내부를 모두 포함하는 도형이 되게 된다.

문제에서는 이를 A' 이라 정의하였다. 도형 A' 과 오직 한 점에서 만나는 점을 C라고 했으므로 점 B에서의 접선은 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 C에서 접한다는 의미가 된다. 점 B는 xy 평면 위의 점이므로 xy 평면 위에서만 생각하면 된다. 이제 원 위를 움직이는 점 D를 생각해보자.

삼각형의 밑변을 $\overline{BC}$ 로 놓게 되면, 높이는 점 D에서 직선 BC까지의 거리가 된다. 즉 이 값이 최대가 되는 경우는 다음 그림처럼 선분 CD가 원의 지름이 되는 경우이다.

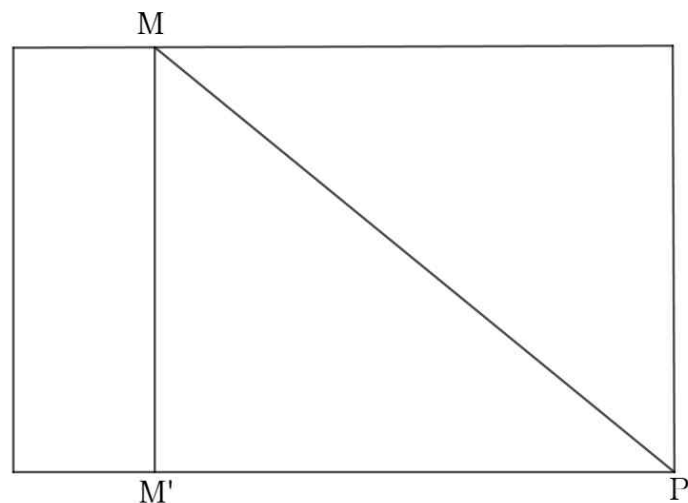


원점을 O라 하면 $\overline{OB}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ 라 할 수 있고

$\overline{OC}=3$ 이므로 $\overline{BC}=\sqrt{11}$ 이다. $\overline{CD_0}=6$ 이므로 삼각형 BCD_0 의 넓이는 $\sqrt{11}\times 6\times \frac{1}{2}=3\sqrt{11}$ 이다.

[정답] ③

31. 다음 그림과 같이 점 M에서 평면 C_1 에 내린 수선의 발을 M'이라 할 때 다음과 같이 평면 MM'P를 가질 때 선분 PM의 길이가 최대가 된다.



선분 AB의 길이가 8이라 하였으므로 평면 C_1 이 아닌 밑면을

C_2 라 할 때, 원 C_2 의 중심 O에 대하여 $\overline{MO}=3$ 이다.

따라서 $\overline{M'P}=8$ 이고 $\overline{MM'}=4$ 이므로

$$\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$$

[정답] ③

32. $B(a, 1, -1)$ 을 yz 평면에 대해 대칭이동 하면
 $B'(-a, 1, -1)$, $B'(-a, 1, -1)$ 을 xy 평면에 대해
 대칭이동 하면 $B''(-a, 1, 1)$ 따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은
 $\overline{AB''}$ 의 최솟값과 같다.

$$\sqrt{(2 - (-a))^2 + (1 - 1)^2 + (1 - 1)^2} = |a + 2|$$

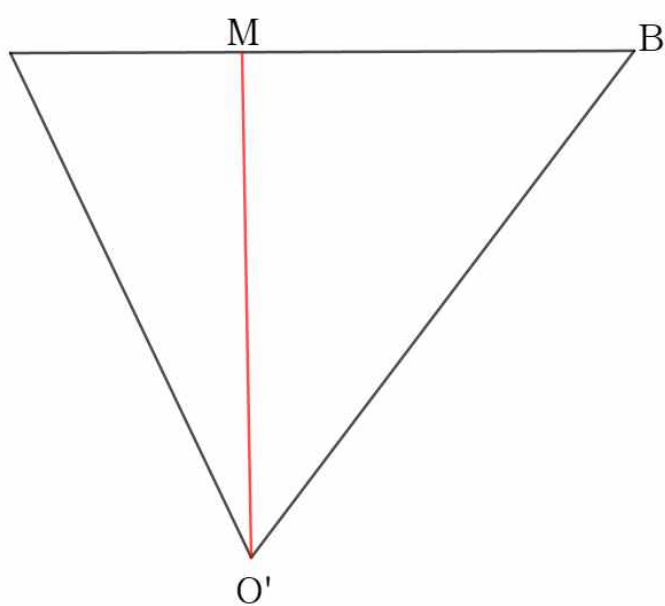
a 는 양수이므로 $a = 9$

[정답] ①

33. 선분 OP 와 선분 EQ 의 교점이 존재하지 않으므로 선분
 EQ 를 평행이동 시키도록 하자 따라서 구하는 것은 직선
 OP 와 FP 가 이루는 각의 크기이다. $\overline{OP} = \sqrt{22}$,
 $\overline{OF} = \sqrt{26}$, $\overline{PF} = 2\sqrt{5}$ 이므로 코사인 법칙을 적용해주면
 $26 = 22 + 20 - 4\sqrt{110}\cos\theta \therefore \cos^2\theta = \frac{8}{55}$

[정답] ①

34. 중점 M 에서 내린 수선의 발이 삼각형 PQR 위의 무게
 중심 위로 떨어지므로 삼각형 PQR 는
 정삼각형이다. 따라서 밑면의 넓이는 $4\sqrt{3}$ 이다.



구해야 할 것은 빨간색 선분의 길이인 높이이다.

$$\sqrt{3^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

따라서 사면체 $MPQR$ 의 부피는

$$4\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{11}{3}} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{11}}{3} \text{이다.}$$

[정답] ③

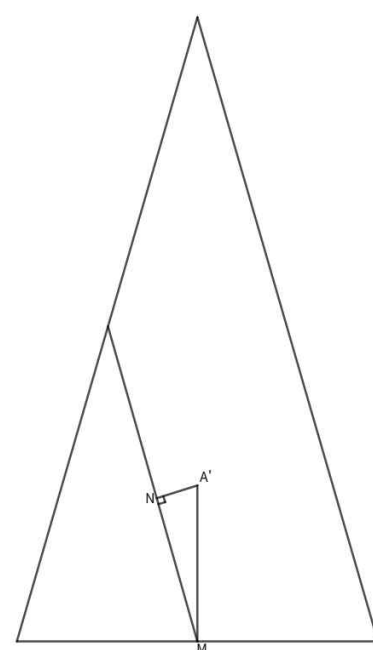
35. $S_1 = 3 \times \overline{BF}$, $S_2 = \overline{FG} \times \overline{BF}$, $S_3 = 3 \times \overline{FG}$ 이다.

넓이 비가 나와 있으므로 계산하면 $\overline{BF} = 9$, $\overline{FG} = 2$ 이다.

$$\therefore 9 \times 2 = 18$$

[정답] ④

36. 삼각형 ABC 는 이등변삼각형이고 선분 BC 와 AD 는
 수직이다. 따라서 선분 BC 와 MD 도 수직이다. $\overline{MD} = 4\sqrt{3}$,
 $\overline{MA} = \sqrt{3}$, $\overline{AD} = 6$, $\overline{AM} = 2\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 $AA'D$,
 AMD 는 직각삼각형이고 ABC 는 정삼각형이다. 직선 AM 과
 직선 CD 가 이루는 예각의 크기를 구하기 위해 평행이동을
 해 주어야 한다. 점 A' 에서 이 직선에 내린 수선의 발을
 N 이라고 하면 $\frac{\overline{MN}}{\overline{AM}}$ 의 값이 구하고자 하는 세타의 코사인
 값을 알 수 있다. 따라서 코사인 값은 $\frac{3}{\sqrt{39}}$ 이고 사인값을
 구하면 $\frac{\sqrt{130}}{13}$ 임을 알 수 있다.

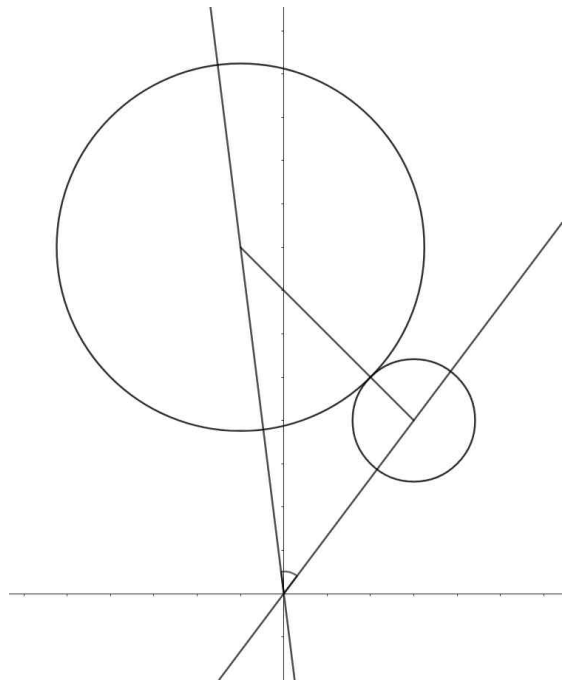


[정답] 14

37. 원상의 넓이와 정사영의 넓이의 비를 이용하여 $\cos\theta$ 를 구하면, 삼각형 $O_1O_2O_3$ 의 넓이는 6, O_1, O_2, O_3 를 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 O_1', O_2', O_3' 이라 하면 $\overline{O_3'O_2'}=2\sqrt{6}, \overline{O_3'O_1'}=2\sqrt{3}, \overline{O_2'O_1'}=2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 $O_1'O_2'O_3'$ 의 넓이는 $\sqrt{23}$ 이다. 따라서 $\cos\theta = \frac{\sqrt{23}}{6}$ 이므로 $\cos^2\theta = \frac{23}{36} \therefore p+q=59$

[정답] 59

38. 두 구가 외접한다고 주어졌으므로 r 의 값을 구하면 $r=3\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다. 따라서 yz 평면을 보게 되면 다음과 같은 상황이다



따라서 표시된 각 만큼이 평면 α 와 β 가 이루는 각이다. 원점을 O , S_1 과 S_2 의 중심을 각각 A, B 라 하면 삼각형 OAB 를 통해서 $\cos\theta$ 를 알아낼 수 있다.

$$32 = 65 + 25 - 10\sqrt{65}\cos\theta, \cos\theta = \frac{29}{325}\sqrt{65}$$

C_1' 의 넓이는 2π 이므로 정사영의 넓이는 $\frac{58}{325}\sqrt{65}\pi$ 이다.

$$\therefore p+q=383$$

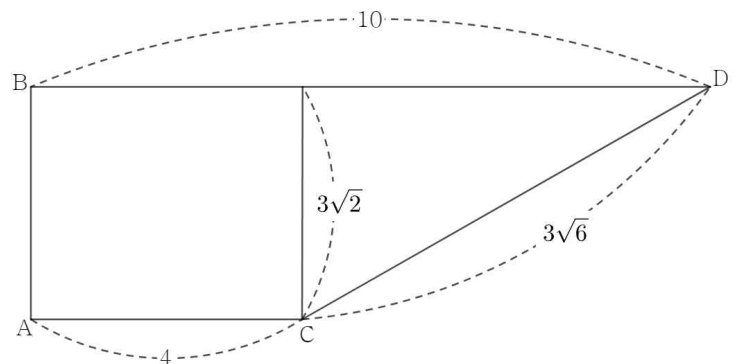
[정답] 383

39. 사각형 $ABFE$ 는 직사각형이므로

$AB \perp AE, AB \perp BF$ 이고, 선분 AB 와 선분 EF 는 평행하다.

$\overline{AE}=8, \cos(\angle EAC)=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{AC}=4, \overline{EC}=4\sqrt{3}$ 이다.

상황 파악을 위해서 평면 α 에서 보도록 하자. 사각형 $ACDB$ 는 다음과 같은 상황임을 알 수 있다.



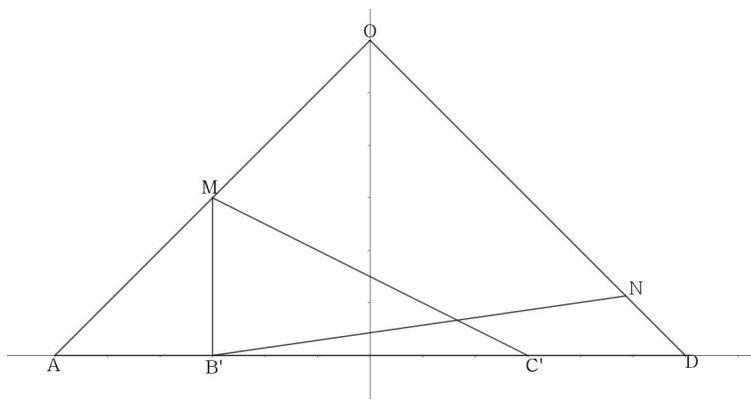
문제에서 요구하는 것은 평면 β 와 평면 FCD 가 이루는 각의 크기이다. 평면 FCD 를 연장하여 교선을 찾고 삼수선 정리를 사용하는 것은 어려워 보인다. 따라서 삼각형 FCD 의 넓이와 삼각형 FCD 를 평면 β 에 정사영 시켜서 생긴 도형의 넓이를 나누어서 생각해 보도록 하자.

우선 삼각형 FCD 의 넓이를 구하기 위해서 삼수선 정리를 이용하자. 점 F 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 F' , F' 에서 선분 CD 로 수선의 발을 M 이라고 하면 선분 $\frac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{FM}$ 으로 삼각형 FCD 의 넓이를 구할 수 있다. $\overline{FM}=4\sqrt{3}, \overline{F'M}=2\sqrt{6}$ 이므로 삼각형 FCD 의 넓이는 $9\sqrt{10}$ 이다. 이제 삼각형 FCD 정사영의 넓이를 구해야 한다. 점 C 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 C' , 점 D 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 D' 이라 하면 높이는 $3\sqrt{2}$ 이고 밑변의 길이는 $\overline{FD'}$ 인 삼각형 $FC'D'$ 이 나오게 된다. $\overline{FD'}=3$ 이므로 삼각형 $FC'D'$ 의 넓이는

$$\frac{9\sqrt{2}}{2} \text{이다. 따라서 } \cos\theta \text{는 } \frac{\frac{9\sqrt{2}}{2}}{9\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}, \cos^2\theta = \frac{1}{20} \therefore p+q=21$$

[정답] 21

40. 평면 OAD 로 단면화를 시키면 다음과 같다.



즉 정사영의 넓이를 구하기 위해선 평면 MCE와 FBN이

이루는 각을 구해야 하므로

단면화 그림에서 직선 MC'과 직선 B'N이 이루는 각의

크기를 구하면 된다.

$\overrightarrow{MC'} = (6, -3)$, $\overrightarrow{B'N} = (8, 1)$ 이므로 내적을 활용해주면

$$48 - 3 = \sqrt{65} \sqrt{45} \cos \theta, \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

원의 넓이는 4π 이므로 평면 FBN 위로의 정사영의 넓이는

$$4 \times \pi \times \frac{3}{13} \sqrt{13} = \frac{12}{13} \sqrt{13} \pi$$

[정답] ③