우일신 又日新

매일
조금씩
새로워지기를
바라며

파본형
월간
N제

thinkers' Group for better thinking

25년 4월호

공통/수학2

극한/연속 30제

정답 및 해설지

우일신又日新

매일 조금씩 새로워지기를 바라며

파본형 월간 N제

25년 4월호

공통/수학2

극한/연속 30제

※ 정답 및 해설은 문제 하단에 적힌 넘버링 기준으로 작업되어 있습니다.

▶ 10회 정답

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
(9번)	(10번)	(11번)	(12번)	(13번)	(14번)	(15번)	(20번)	(21번)	(22번)
⑤	④	②	②	①	③	①	30	26	19

▶ 11회 정답

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(9번)	(10번)	(11번)	(12번)	(13번)	(14번)	(15번)	(20번)	(21번)	(22번)
②	④	③	②	②	⑤	①	12	16	91

▶ 12회 정답

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
(9번)	(10번)	(11번)	(12번)	(13번)	(14번)	(15번)	(20번)	(21번)	(22번)
③	②	③	③	②	③	③	2	6	97

01

정답 ⑤

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(|x|)}{x^3}$$

의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)+f(|x|)}{x^3}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)+f(|x|)}{x^3}$$
$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to 0+}\frac{2f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)+f(-x)}{x^3}$$

에서 함수 $f(x)$는 $f(x)=ax^4+bx^3$ 꼴이어야 한다.
대입해서 계산하면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{2f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0+}\frac{2ax^4+2bx^3}{x^3}$$
$$=2b,$$

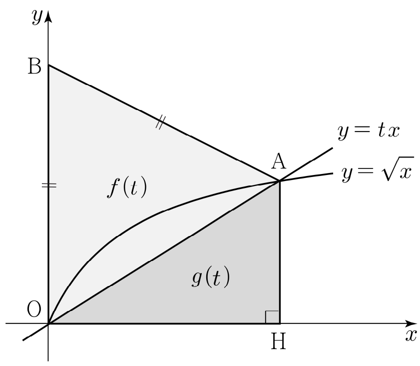
$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)+f(-x)}{x^3}=\lim_{x\to 0+}\frac{2ax^4}{x^3}$$
$$=0$$

이므로 $b=0$ 이고, $f(1)=2$ 이므로 $a=2$ 이다.
따라서 $f(x)=2x^4$ 이므로 $f(2)=32$ 이다.

$\therefore\ 32$

02

정답 ④



점 A의 좌표를 구하기 위해 두 식을 연립하면

$$tx=\sqrt{x}\quad\to\quad x=\frac{1}{t^2}$$

이므로 점 A의 좌표는 $A\left(\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t}\right)$이다.

즉, 삼각형 OAH의 넓이는

$$g(t) = \frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{AH} = \frac{1}{2t^3}$$

점 B의 좌표를 $B(0, a)$로 두면 $\overline{OB} = \overline{AB}$이므로

$$a = \sqrt{\frac{1}{t^4} + \left(\frac{1}{t} - a\right)^2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2t^3} + \frac{1}{2t}$$

즉, 삼각형 OAB의 넓이는

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times (\text{점 A의 } x \text{좌표}) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2t^3} + \frac{1}{2t}\right) \times \frac{1}{t^2} \\ &= \frac{t^2+1}{4t^5} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{2t^3}}{\frac{t^2+1}{4t^5}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{2t^2}{t^2+1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

이다.

$\therefore$ 2

03

정답 ②

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & (x \le 1) \\ x - a^2 & (x > 1) \end{cases}$$: 연? 불?

에 대하여 함수

$$g(x) = \frac{3a^2 + 2a - x}{f(x)}$$: 분수함수 꼴!
(분모) $\neq 0$ 주의 !

가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

① $x = 1$에서 연속이어야 하고,
② 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq 0$이어야 한다.

① $x = 1$ 에서의 연속성 조사

함수 $g(x)$의 $x = 1$에서의 함/우/좌를 조사하면

$$(\text{함}) = g(1) = \frac{3a^2 + 2a - 1}{1 + a}$$

$$(\text{우}) = g(1^+) = \frac{3a^2 + 2a - 1}{1 - a^2}$$

$$(\text{좌}) = g(1^-) = \frac{3a^2 + 2a - 1}{1 + a}$$

이므로 $x = 1$에서 연속이려면

$$3a^2 + 2a - 1 = 0 \quad \text{또는} \quad 1 + a = 1 - a^2$$

각각의 방정식을 풀어보면

$$a = 0 \quad \text{또는} \quad a = \frac{1}{3} \quad \text{또는} \quad a = -1$$

분모인 $(1+a)$와 $(1-a^2)$이 모두 0이 되는 값이므로 제외!

② 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq 0$

$a = 0$이면

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \le 1) \\ x & (x > 1) \end{cases}$$

이므로 $f(0) = 0$이 되어 (분모) $= 0$이 되는 순간이 존재하므로 모순!

$a=\frac{1}{3}$ 이면

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3} & (x\le 1) \\ x-\frac{1}{9} & (x>1) \end{cases}$$

이므로 (분모)$=0$ 이 되는 순간이 존재하지 않는다. (조건 만족)

(이때 $f\left(\frac{1}{9}\right)=0$ 이라고 착각하지 말자. 정의역에 포함되지 않는다.)

따라서 $a=\frac{1}{3}$ 이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3} & (x\le 1) \\ x-\frac{1}{9} & (x>1) \end{cases}, \quad g(x)=\frac{1-x}{f(x)}$$

이므로 $(g(a)=)\,g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}$ 이다.

$\therefore\ \frac{3}{2}$

04

정답 ②

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} f(2x) & (x\le 0) \\ \{f(x)\}^2 & (x>0) \end{cases}$$

이므로 조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^6} &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\times\{f(x)\}^2}{x^6} \quad \leftarrow g(x)=\{f(x)\}^2 \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^6} \\ &= 8 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2 인 이차함수이다.

$$f(x)=2x^2+\cdots$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-g(x)}{|x|}-\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-g(x)}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-\{f(x)\}^2}{x}-\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(2x)}{-x} \\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)\{1-f(x)\}}{x}+\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(2x)}{x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)\{1-f(x)\}}{x},\quad \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(2x)}{x}$$

의 값이 각각 존재해야 한다. 이때

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)\{1-f(x)\}}{x}$$

의 값이 존재하므로 $f(0)=0$ 또는 $f(0)=1$

(1) $f(0)=0$ 인 경우

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)\{1-f(x)\}}{x}+\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(2x)}{x} \\ &= f'(0)+\{-f'(0)\} \\ &= 0\ (\ne 2) \end{aligned}$$

(모순)

(2) $f(0)=1$ 인 경우

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)\{1-f(x)\}}{x}+\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(2x)}{x} \\ &= \{-f'(0)\}+\{-f'(0)\} \\ &= -2f'(0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

에서 $f'(0)=-1$

(1), (2)에 의해 최고차항의 계수가 2 인 이차함수 $f(x)$ 가

$$f(0)=1,\quad f'(0)=-1$$

을 만족시키므로 $f(x)=2x^2-x+1$ $(=2x^2+f'(0)x+f(0))$

따라서 $f(2)=7$ 이다.

$\therefore\ 7$

05

정답 ①

Step 1 집합 A^C 의 원소의 개수는 3 이다.

$f(x)=(x-a)(x-b)$ 에 대하여 $f(a)=f(b)=0$ 이므로

함수 $\dfrac{1}{f(x)}$ 은 $x=a,\ x=b$ 에서 불연속이다. 이때

$$A=\left\{k \,\middle|\, \text{함수 } \frac{1}{f(x)} \text{ 은 열린구간 } (k,\ k+3) \text{ 에서 연속이다.}\right\}$$

의 원소에 대해 생각해보면 $\dfrac{1}{f(x)}$ 가 $x=a$ 에서 불연속이므로

$\dfrac{1}{f(x)}$ 은 열린구간 $(a-2,\ a+1)$ 에서 연속이 아니고

$\dfrac{1}{f(x)}$ 은 열린구간 $(a-1,\ a+2)$ 에서 연속이 아니다.

(b에 대해서 생각해도 동일한 결론 도출 가능)

따라서 a와 b 사이의 거리가 충분히 크면 집합 A^C 는

$$A^C=\{a-2,\ a-1,\ b-2,\ b-1\}$$

이므로 원소의 개수는 4 가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

즉, 집합 A^C 의 원소의 개수가 3 이려면 $b=a+1$

* Remark

두 칸 차이나면 안되나? 이런 생각이 들 수 있지만

직접 확인해보면 된다. 만약 $b=a+2$ 이면

$\dfrac{1}{f(x)}$ 은 열린구간 $(a-2,\ a+1)$ 에서 연속이 아니고

$\dfrac{1}{f(x)}$ 은 열린구간 $(a-1,\ a+2)$ 에서 연속이 아니고

$\dfrac{1}{f(x)}$ 은 열린구간 $(a,\ a+3)$ 에서 연속이 아니고

$\dfrac{1}{f(x)}$ 은 열린구간 $(a+1,\ a+4)$ 에서 연속이 아니므로

집합 A^C 의 원소의 개수는 4 가 된다.

Step 2 집합 A^C 의 모든 원소의 합은 9 이다.

$b=a+1$ 이므로 $f(a)=f(a+1)=0$ 이 되어 함수 $\dfrac{1}{f(x)}$ 는

$$x=a,\quad a+1$$

에서 불연속이다. 집합 A^C 의 원소를 추론하기 위해 구간의 길이가 3 인 열린구간을 설정해서 $\dfrac{1}{f(x)}$ 의 연속성을 관찰하면

$\dfrac{1}{f(x)}$ 은 열린구간 $(a-2,\ a+1)$ 에서 연속이 아니고

$\dfrac{1}{f(x)}$ 은 열린구간 $(a-1,\ a+2)$ 에서 연속이 아니고

$\dfrac{1}{f(x)}$ 은 열린구간 $(a,\ a+3)$ 에서 연속이 아니다.

즉, 집합 A^C 는 $A^C=\{a-2,\ a-1,\ a\}$ 이므로 조건 (나)에 의해

$$(a-2)+(a-1)+a=9 \quad \rightarrow \quad a=4$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=(x-4)(x-5)$ 이므로 $f(7)=6$

$\therefore\ 6$

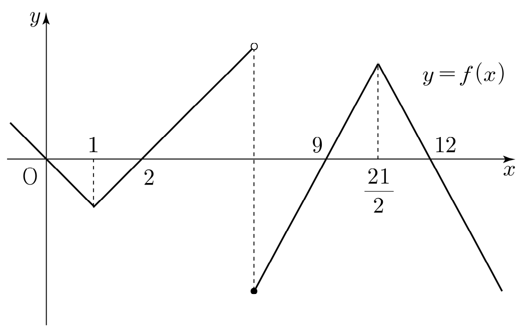
06

정답 ③

함수

$$f(x)=\begin{cases} |x-1|-1 & (x<a) \\ 3m-m|2x-21| & (x \geq a) \end{cases}$$

의 그래프는 다음과 같다.



함수

$\underline{f(x)}$ $\times$ $\underline{f(x-k)}$

$x=a$에서 불! $x=a+k$에서 불!

가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 따지기 위해 k의 값의 부호에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $k>0$ 인 경우

함수 $f(x)f(x-k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 곱함수 연속성에 의해 $f(a+k)=f(a-k)=0$

① $a+k=9,\ a-k=2$ → 모순 ($\because$ a는 자연수)
② $a+k=9,\ a-k=0$ → 모순 ($\because$ a는 자연수)
③ $a+k=12,\ a-k=2$ → $a=7,\ k=5$
④ $a+k=12,\ a-k=0$ → $a=6,\ k=6$

(2) $k<0$ 인 경우

함수 $f(x)f(x-k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 곱함수 연속성에 의해 $f(a+k)=f(a-k)=0$이어야 한다.

① $a+k=2,\ a-k=9$ → 모순 ($\because$ a는 자연수)
② $a+k=2,\ a-k=12$ → $a=7,\ k=-5$
③ $a+k=0,\ a-k=9$ → 모순 ($\because$ a는 자연수)
④ $a+k=0,\ a-k=12$ → $a=6,\ k=-6$

이때 (1), (2)에서 함수 $f(x)f(x-k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 순서쌍 (a,k)의 개수가 4이므로 아래의 **(3) 케이스**에서 한 쌍이 나와야 한다.

(3) $k=0$ 인 경우

함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$(a-2)^2=(2ma-18m)^2$$
$$\to\ a-2=18m-2ma \qquad \cdots ㉠$$

이때 ㉠을 만족시키는 두 자연수 $a\,(2<a<9)$, m 의 값은 $a=8,\ m=3$뿐이다.

(1), (2), (3)에 의해 자연수 m의 값은 $m=3$이다.

$\therefore\ m=3$

* Remark ($f(x)$가 연속인 상황에 대한 판단)
만약 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 함수 $f(x)f(x-k)$가 연속이 되도록 하는 정수 k는 무수히 많으므로 조건을 만족시킬 수 없다!

07

정답 ①

모든 실수 t에 대하여

$$\lim_{x\to t}\left|\frac{x}{f(x)}\right|$$

의 값이 존재하므로 모든 실수 t에 대하여

(1) $\displaystyle\lim_{x\to t+}\left|\frac{x}{f(x)}\right|=\lim_{x\to t-}\left|\frac{x}{f(x)}\right|$
(2) $f(t)\neq 0$ ← $f(0)=0$은 가능하다. 분자에 x가 있기 때문!

을 모두 만족시키는 a의 값을 구해줘야 한다.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to t+}\left|\frac{x}{f(x)}\right|=\lim_{x\to t-}\left|\frac{x}{f(x)}\right|$

함수

$$f(x)=\begin{cases} 6ax+6 & (x\le a)\\ x^3+11x & (x>a)\end{cases}$$

와 모든 실수 t에 대하여

$$\lim_{x\to t+}\left|\frac{x}{f(x)}\right|=\lim_{x\to t-}\left|\frac{x}{f(x)}\right|$$

을 만족시키려면 경계가 되는 $t=a$인 상황만 관찰해도 충분하다.
(경계가 아닌 점에서는 당연히 보장!)

① $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to a-}\frac{x}{f(x)}$

$$\lim_{x\to a+}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to a-}\frac{x}{f(x)}\ \to\ a^3+11a=6a^2+6$$
$$\to\ a=1,\ 2,\ 3$$

② $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{x}{f(x)}=-\lim_{x\to a-}\frac{x}{f(x)}$

$$\lim_{x\to a+}\frac{x}{f(x)}=-\lim_{x\to a-}\frac{x}{f(x)}\ \to\ a^3+11a=-(6a^2+6)$$
$$\to\ a=-1,\ -2,\ -3$$

(2) $f(t) \neq 0$

$x > a$ 일 때, $f(x)$ 는

$$f(x) = x(x^2+11)$$

이므로 $f(0)=0$ ← $f(t)=0$ 인 점이 발생했지만 $\lim_{x\to t}\left|\frac{x}{f(x)}\right|$ 의 분자에 x 가 있기 때문에 약분되어 문제가 되지 않음!

$x < a$ 일 때, $f(x)$ 는

$$f(x) = 6(ax+1)$$

이므로 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = 0$ ← $f(t)=0$ 인 점이 발생했지만 $x<a$ 의 범위에 포함되는지 아닌지 판단 필요!

$$-\frac{1}{a} < a \;\to\; a > 0$$

이므로 $a>0$ 이면 $f(t)=0$ 인 점이 생기게 된다. 즉, $a<0$

(1), (2)에 의해 조건을 만족시키는 a 의 값은

$$a = -3,\ -2,\ -1$$

이므로 그 합은 -6 이다.

$\therefore\ -6$

08

정답 30

Step 1 조건 (가)와 (나) 해석

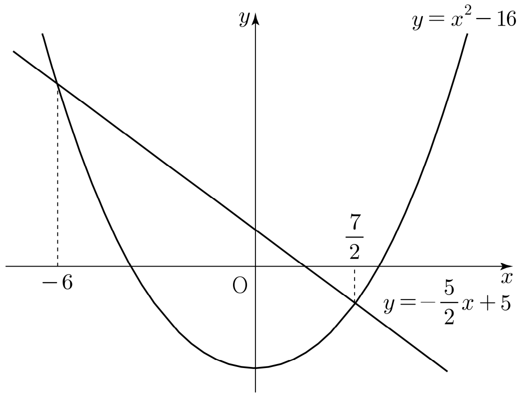
조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)-x^2+16\}\{2f(x)+5x-10\} = 0$$

을 만족시키므로

$$f(x) = x^2-16 \quad \text{또는} \quad f(x) = -\frac{5}{2}x+5$$

이때 두 함수 $y=x^2-16$, $y=-\frac{5}{2}x+5$ 의 그래프는 다음과 같다.

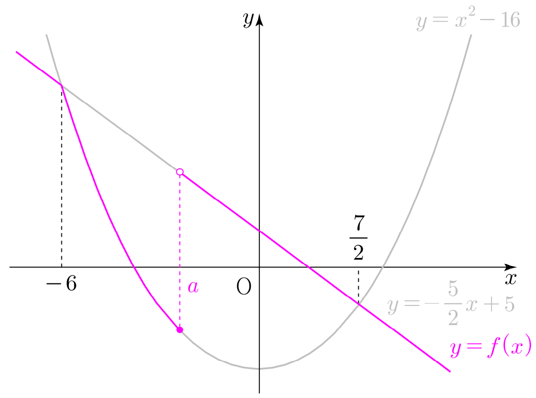


: 방정식 $x^2-16=-\frac{5}{2}x+5$ 를 풀면 $x=-6,\ \frac{7}{2}$ 도출 가능!

조건 (나)에 의해 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서만 불연속이므로 $x=a$ 에서는 반드시

$$f(x)=x^2-16 \;\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\text{환승!}}}\; f(x) = -\frac{5}{2}x+5$$

함수 $f(x)$ 의 식이 바뀌어야 한다. (그림 참고)



: 예시로 아무렇게나 a 를 설정하여 상상해본 $y=f(x)$ 의 그래프

Step 2 함수 $f(x)g(x)$ 의 연속성

함수

$$g(x) = \begin{cases} x+6 & (x<b) \\ x-1 & (x \geq b) \end{cases}$$

는 반드시 $x=b$ 에서 불연속이므로 ($\because\ b+6 \neq b-1$)

$$\underbrace{f(x)}_{x=a\text{에서 불!}} \times \underbrace{g(x)}_{x=b\text{에서 불!}}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 곱함수 연속성에 의해

$$f(b)=0,\quad g(a)=0$$

(1) $g(a)=0$ 인 상황에 대한 관찰

$$g(x)=\begin{cases} x+6 & (x<b) \\ x-1 & (x\geq b) \end{cases}$$

에 대하여 $g(a)=0$ 을 만족시키는 a 의 값의 후보는

$a=-6$ 또는 $a=1$

① $a=-6$ 인 상황

$a=-6$ 이면 $f(x)$ 는 $x=-6$ 에서 불연속이어야 한다.

이때 방정식 $x^2-16=-\frac{5}{2}x+5$ 의 해가 $x=-6$ 이므로

$f(x)$ 는 반드시 $x=-6$ 에서 연속일 수 밖에 없다. (모순!)

② $a=1$ 인 상황 (정답상황!)

$a=1$ 이면 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이어야 한다.

이때 방정식 $x^2-16=-\frac{5}{2}x+5$ 의 해가 $x=-6$ 이므로

$f(x)$ 는 반드시 $x=-6$ 에서 연속일 수 밖에 없다. (모순!)

(2) $f(b)=0$ 인 상황에 대한 관찰

$f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

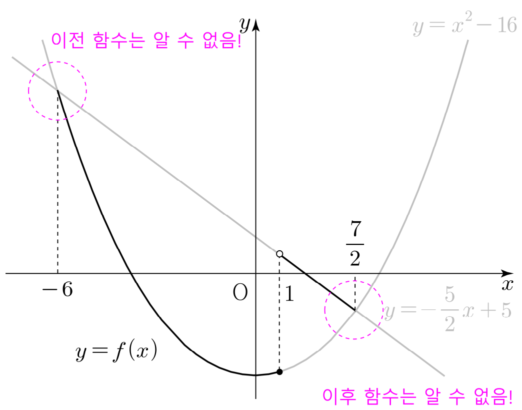
$$f(x)=x^2-16 \quad \text{또는} \quad f(x)=-\frac{5}{2}x+5$$

을 만족시키므로 $f(b)=0$ 을 만족시키는 b 의 값의 후보는

$b=-4$ 또는 $b=2$ 또는 $b=4$

이때 (1)에서 $g(1)=0$ 이어야 하는데, $b=2$ 또는 $b=4$ 이면 $g(1)=7$ 이므로 모순! 따라서 $b=-4$ 이다.

(1), (2)에 의해 $a=1$, $b=-4$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\begin{aligned} f(a+2)\times f(b+2) &= f(3)\times f(-2) \\ &= \left(-\frac{5}{2}\right)\times(-12) \\ &= 30 \end{aligned}$$

$\therefore$ 30

09

정답 26

Step 1 **$f(x)$, $g(x)$ 의 최고차항의 계수 및 차수 판단**

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xg(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2g(x)}{x-f(x)}=1$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xg(x)}{x^2-f(x)}=1 \qquad \cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2g(x)}{x-f(x)}=1 \qquad \cdots ㉡$$

이때 $f(x)$ 는 사차함수이고, $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 다항함수이므로

$$㉠ : \lim_{x\to\infty}\frac{xg(x)}{x^2-f(x)}=1 \quad : \frac{\infty}{\infty}\text{꼴}$$

에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$f(x)=-x^4+\cdots, \quad g(x)=x^3+\cdots,$$

임을 알 수 있다.

Step 2 **$f(x)$, $g(x)$ 의 인수 조사**

$$㉡ : \lim_{x\to 0}\frac{x^2g(x)}{x-f(x)}=1 \quad : \frac{0}{0}\text{꼴}$$

의 값이 0 이 아닌 값으로 수렴했으므로 $f(0)=0$

인수를 몇 개 가질지는 아직 모름!

이때 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=0 \ : \ \frac{0}{0} \text{ 꼴}$$

의 값이 0으로 수렴했고, $f(0)=0$이므로 $g(x)$는 x를 인수로 적어도 2개 이상 갖는다. 즉, $g(x)=x^2(x+a)$로 두면

$$\text{㉡} : \lim_{x\to 0}\frac{x^2g(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4(x+a)}{x-f(x)} \ : \ x \text{ 개수 비교!}$$
$$=1$$

이므로 $x-f(x)=x^4$, $a=1$로 확정된다.
따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x)=-x^4+x,\quad g(x)=x^3+x^2$$

이므로 $g(2)-f(2)=26$이다.

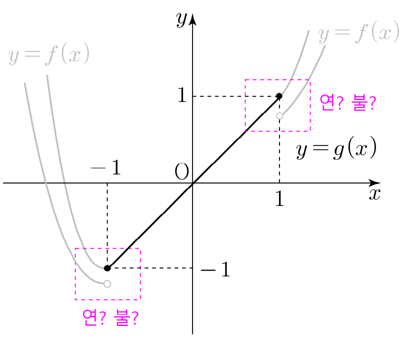
$\therefore\ 26$

10

정답 19

Step 1 조건 (가) 해석

$$g(x)=\begin{cases} x & (|x|\le 1) \\ f(x) & (|x|>1)\end{cases} \ : \ \text{연? 불?}$$



조건 (가)에서

$$\underbrace{f(x)}_{\text{연!}} \times \underbrace{g(x)}_{x=-1,\ 1\text{에서 연? 불?}}$$

가 오직 $x=1$에서만 불연속이므로

① $x=1$에서 불연속 $\begin{cases} f(1)\neq 1 & : \ g(x)\text{의 연속성 체크} \\ \text{이고,} & \\ f(1)\neq 0 & : \ \text{곱함수의 연속성 체크}\end{cases}$

② $x=-1$에서 연속 $\begin{cases} f(-1)=-1 & : \ g(x)\text{의 연속성 체크} \\ \text{또는} & \\ f(-1)=0 & : \ \text{곱함수의 연속성 체크}\end{cases}$

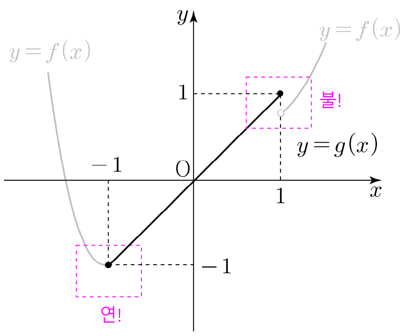
Step 2 케이스 분류를 통한 조건 (나) 해석

함수

$$h(x)=\lim_{t\to 0+}g(x+t)\times\lim_{t\to 1+}g(x+t)$$
$$=\underbrace{g(x^+)}_{x\text{에서의 우극한}}\times\underbrace{g(x+1^+)}_{x+1\text{에서의 우극한}}$$

의 연속성을 판단하기 위해 조건 (가)에서 얻은 결과로 케이스를 분류하여 생각해보자.

(1) $f(-1)=-1$인 경우 ($\Leftrightarrow$ $g(x)$가 $x=-1$에서 연속)
(정답상황!)

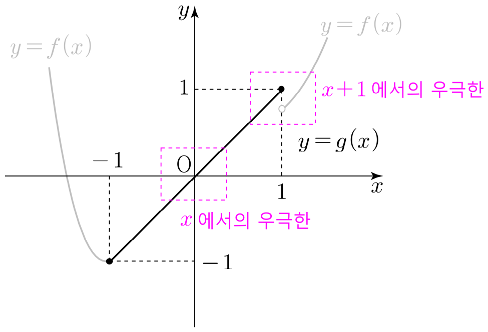


함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$$h(x)=\lim_{t\to 0+}g(x+t)\times\lim_{t\to 1+}g(x+t)$$
$$=\underbrace{g(x^+)}_{x\text{에서의 우극한}}\times\underbrace{g(x+1^+)}_{x+1\text{에서의 우극한}}$$

의 불연속 후보 지점은 $x=0$, $x=1$이다.

① $x=0$ 에서의 연속성 조사

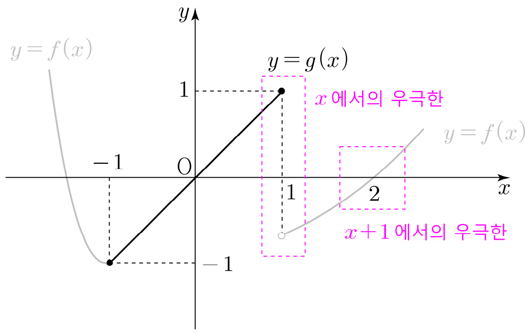


이때

$$g(0)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$$

이므로 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
(추가 조건 필요 없이 항상 보장됨)

② $x=1$ 에서 연속성 조사



이때 함수 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이 되려면

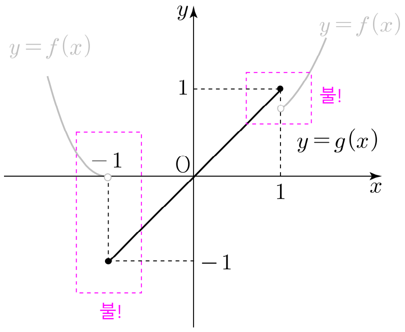
$$g(2)=\lim_{x\to 2} g(x)=0$$

이어야 하므로 $f(2)=0$

즉, (1)의 ①, ②에 의해 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right) \quad \leftarrow \quad f(-1)=-1,\ f(2)=0,$$

(2) $f(-1)=0$ 인 경우 ($\Leftrightarrow$ $g(x)$ 가 $x=-1$ 에서 불연속)

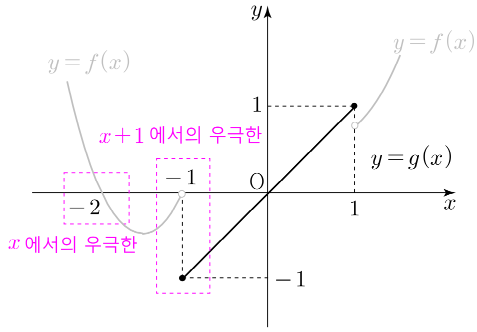


함수 $g(x)$ 는 $x=-1$, $x=1$ 에서 불연속이므로

$$h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times\lim_{t\to 1+} g(x+t)$$
$$=\underbrace{g(x^+)}_{x\text{ 에서의 우극한}}\times\underbrace{g(x+1^+)}_{x+1\text{ 에서의 우극한}}$$

의 불연속 후보 지점은 $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$ 이다.

① $x=-2$ 에서의 연속성 조사

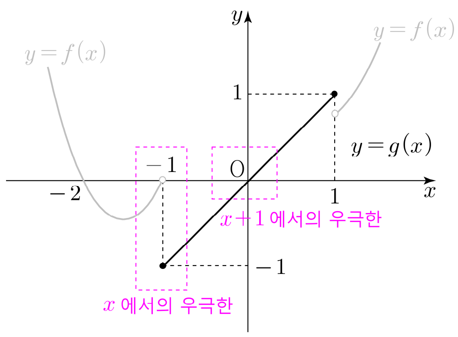


이때 함수 $h(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이 되려면

$$g(-2)=\lim_{x\to -2} g(x)=0$$

이어야 하므로 $f(-2)=0$

② $x=-1$ 에서 연속성 조사

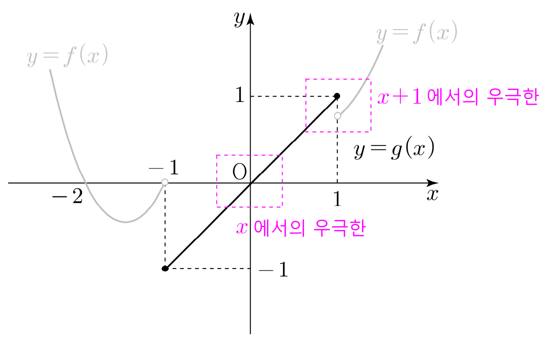


이때

$$g(0)=\lim_{x\to0}g(x)=0$$

이므로 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.
(추가 조건 필요 없이 항상 보장됨)

③ $x=0$ 에서의 연속성 조사

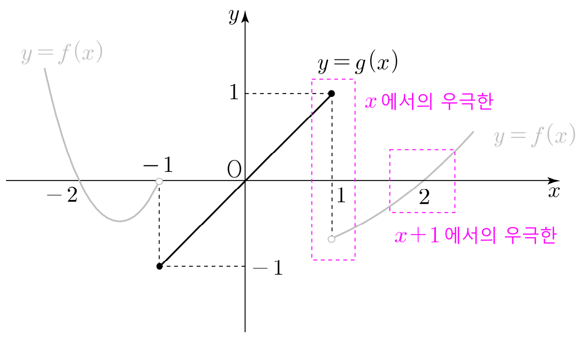


이때

$$g(0)=\lim_{x\to0}g(x)=0$$

이므로 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
(추가 조건 필요 없이 항상 보장됨)

④ $x=1$ 에서 연속성 조사



이때 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면

$$g(2)=\lim_{x\to2}g(x)=0$$

이어야 하므로 $f(2)=0$

즉, (2)의 ①, ②, ③, ④에 의해

$$f(-2)=f(-1)=f(2)=0$$

이지만, 이를 만족시키는 이차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 (1), (2)에 의해 함수 $f(x)$는

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)$$

이므로 $f(5)=19$ 이다.

$\therefore\ 19$

11

정답 ②

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2k & (x \le 0) \\ f(-x)+1 & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $|f(x)|$ 가 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned} |f(0)|=\lim_{x\to 0+}|f(x)| \quad &\to \quad |2k|=\lim_{x\to 0+}|f(-x)+1| \\ &\to \quad |2k|=\lim_{x\to 0-}|f(x)+1| \\ &\to \quad |2k|=|2k+1| \end{aligned}$$

즉, $2k=-2k-1$ 이므로 $k=-\dfrac{1}{4}$ 이어야 한다.

$\therefore\ -\dfrac{1}{4}$

12

정답 ④

함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \ge a) \\ x^2+x-1 & (x<a) \end{cases}$$

에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x+1)}{f(x)+1}$ 의 값이 존재해야 하므로

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a+}\frac{f(x+1)}{f(x)+1}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x+1)}{f(x)+1} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{2a+3}{2a+2}=\frac{2a+3}{a^2+a} \qquad \cdots ㉠ \end{aligned}$$

㉠이 성립하려면

① $2a+3=0 \quad \to \quad a=-\dfrac{3}{2}$

② $2a+2=a^2+a \quad \to \quad a=-1,\ 2$

이때 $a=-1$ 이면 ㉠에서 (분모)$=0$ 이므로 불가능하다. (주의)

따라서 조건을 만족시키는 모든 a 의 값은 $a=-\dfrac{3}{2}$, 2 이므로

그 합은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

$\therefore\ \dfrac{1}{2}$

13

정답 ③

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (x<1) \\ -x^2+ax+b & (1 \le x<2) \\ -x+5 & (x \ge 2) \end{cases}$$

와 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여
함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

① $x=1$ 에서 연속이어야 하고,
② $x=2$ 에서 연속이어야 한다.

(1) $x=1$ 에서의 연속성 조사

함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 연속성을 조사하면

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)g(x) \\ \Leftrightarrow\ &\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(-x^2+ax+b)g(x) \end{aligned}$$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)}{x-1}$ 의 값이 존재하므로 $g(1)=0$ 이고,

$$\lim_{x\to 1+}(-x^2+ax+b)g(x)=0 \quad (\because\ g(1)=0)$$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)}{x-1}=0$ 이다. 즉, $g(x)$ 는 $(x-1)$ 를 인수로

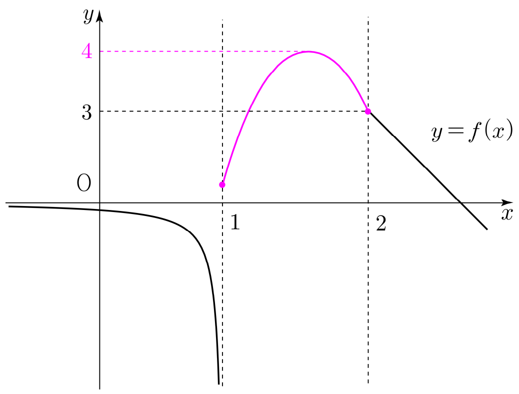
2 개 이상 가져야 한다. 따라서 $g(x)=(x-1)^2$ 이다.

(2) $x=2$ 에서의 연속성 조사

$g(x)=(x-1)^2$가 $x=2$에서 연속이고, $g(2)\neq 0$이므로 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이려면 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 한다. 즉,

$$2a+b-4=3 \;\rightarrow\; 2a+b=7 \qquad \cdots ㉠$$

조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$의 최솟값이 $m=0$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $M=4$이어야 한다.



즉, 함수 $y=-x^2+ax+b$의 최댓값이 4이어야 하므로

$$\frac{a^2}{4}+b=4 \;\rightarrow\; a^2-8a+12=0 \quad (\because ㉠)$$

$$\rightarrow\; a=2 \text{ 또는 } a=6$$

이때 $a=6$이 되면 $y=-x^2+ax+b$는 $\underline{x=3}$에서 최댓값을 가지므로 모순! (1 < x < 2 범위에 포함되지 않음!)

따라서 $a=2,\ b=3$이므로 $(a+b)\times g(3)=20$ $(=5\times 4)$이다.

$\therefore$ 20

14

정답 ②

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)}{(x-2)^2}-\frac{2\sqrt{f(x)}}{|x-2|}\right\}=-1$$

이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1 \qquad \cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)}{(x-2)^2}-\frac{2\sqrt{f(x)}}{|x-2|}\right\}=-1 \qquad \cdots ㉡$$

하나씩 관찰해보면 ㉠은

$$㉠ : \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1 \;\rightarrow\; f(1)=0,\; f'(1)=-1$$

(아주 흔하게 등장하는 꼴! 간단하게 해석 가능)

이고 ㉡은 (㉠과 달리 바로 해석 불가능)

$$㉡ : \lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)}{(x-2)^2}-\frac{2\sqrt{f(x)}}{|x-2|}\right\}=-1$$

의 값이 수렴했으므로 $f(x)$를

$$\underline{f(x)=(x-2)^2p(x)}$$

$f(x)$는 $(x-2)$를 인수로 적어도 2개 갖는다.

로 두자.

$$\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)}{(x-2)^2}-\frac{2\sqrt{f(x)}}{|x-2|}\right\}$$

⤸ $f(x)=(x-1)^2p(x)$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{(x-2)^2p(x)}{(x-2)^2}-\frac{2\sqrt{(x-2)^2p(x)}}{|x-2|}\right\}$$

⤸ $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{(x-2)^2p(x)}{(x-2)^2}-\frac{2|x-2|\sqrt{p(x)}}{|x-2|}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 2}\{p(x)-2\sqrt{p(x)}\}$$

$$=-1$$

이므로 $p(2)-2\sqrt{p(2)}=-1 \;\rightarrow\; p(2)=1$

이때 함수 $f(x)=(x-2)^2p(x)$는 사차함수이므로 $p(x)$는 이차함수이고,

$$f(1)=0,\; f'(1)=-1 \;\rightarrow\; p(1)=0,\; p'(1)=-1$$

이므로 $p(x)$는

$$p(x)=2(x-1)^2-(x-1) \quad : p(1)=0,\; p'(1)=-1,\; p(2)=1$$

이다. 따라서 $f(3)=6$ $(=1^2\times p(3))$이다.

$\therefore$ 6

15

정답 ②

함수 $h(x)$를 $h(x)=xf(x)$로 두면

$$g(x)=f'(x)\times\lim_{t\to x}\frac{t-x}{tf(t)-xf(x)}$$
$$=f'(x)\times\lim_{t\to x}\frac{t-x}{h(t)-h(x)}$$
$$=f'(x)\times\frac{1}{h'(x)}$$ ← $h'(x)=0$인 점에서 $g(x)$는 불!

이므로 $g(3)=0$에서 $f'(3)=0$이다. 즉, 이차함수 $f(x)$를

$$f(x)=a(x-3)^2+b$$

로 두자. 조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 불연속인 x의 개수가 1이므로 방정식

$$h'(x)=0 \quad\to\quad 3a(x-1)(x-3)+b=0 \quad\cdots\ ㉠$$

의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다. ㉠에서 판별식을 활용하면 (또는 $x=2$에서 최솟값 0 활용해도 됨!)

$$D=0 \quad\to\quad b=3a$$

즉, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=f'(x)\times\frac{1}{h'(x)}$$
$$=\frac{2a(x-3)}{3a(x-1)(x-3)+3a}$$
$$=\frac{2(x-3)}{3(x-2)^2}$$

이므로 $g(6)=\frac{1}{8}$이다.

$\therefore\ \frac{1}{8}$

16

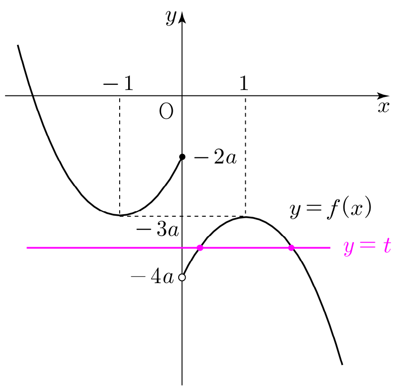
정답 ⑤

Step 1 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 지점

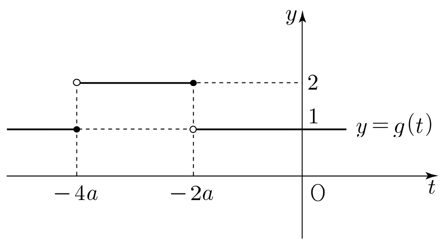
함수

$$f(x)=\begin{cases}a(x^2+2x-2) & (x\le 0)\\ -a(x^2-2x+4) & (x>0)\end{cases}$$

의 그래프는 다음과 같다.



직선 $y=t$와의 교점의 개수를 조사해보면 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$\to\ t=-4a,\ -2a$에서 불연속!

Step 2 함수 $f(x)g(x-b)$가 실수 전체의 집합에서 연속

함수

$$\underline{f(x)}\quad\times\quad\underline{g(x-b)}$$

$x=0$에서 불! $x=b-4a,\ b-2a$에서 불!

가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$$b-4a=0 \quad \text{또는} \quad b-2a=0$$

∵ $f(x)=0$인 점이 하나뿐이므로 불연속점이 겹쳐야 함!

(1) $b-4a=0$ 인 경우

함수 $f(x)g(x-4a)$ 의 $x=0$ 에서의 함/우/좌를 조사하면

$$(\text{함})=f(0)g(-4a)=-2a$$
$$(\text{우})=f(0^+)g(-4a^+)=-8a$$
$$(\text{좌})=f(0^-)g(-4a^-)=-2a$$

이므로 $x=0$ 에서 불연속이다. (모순)
(a가 양수이므로 $-2a=-8a$일 수 없다!)

(2) $b-2a=0$ 인 경우 (정답상황!)

함수 $f(x)g(x-2a)$ 의 $x=0$ 에서의 함/우/좌를 조사하면

$$(\text{함})=f(0)g(-2a)=-4a$$
$$(\text{우})=f(0^+)g(-2a^+)=-4a$$
$$(\text{좌})=f(0^-)g(-2a^-)=-4a$$

이므로 $x=0$ $(=b-2a)$ 에서 연속이다. 함수 $f(x)g(x-2a)$ 가 $x=b-4a$ 에서도 연속이어야 하므로 곱함수 연속성에 의해

$$f(b-4a)=0 \quad \rightarrow \quad f(-2a)=0$$

이때 $x<0$ 에서 $f(x)=a(x^2+2x-2)$ 이므로

$$f(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=-1-\sqrt{3}$$

즉, $-2a=-1-\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad b=1+\sqrt{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$$\therefore \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$$

17

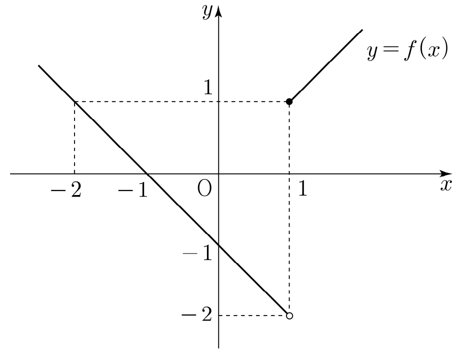
정답 ①

Step 1 함수 $y=g(x)$ 의 그래프

함수

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 & (x<1)\\ x & (x\geq 1)\end{cases}$$

의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\lim_{t\to x+}f(t+3)-\lim_{t\to x-}f(t)$$
$$=\underbrace{f(x+3^+)}_{x+3\text{에서의 우극한}}-\underbrace{f(x^-)}_{x\text{에서의 좌극한}}$$

이므로 x 의 값의 범위에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $x<-2$ 인 경우

함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=f(x+3^+)-f(x^-)$$
$$=(-x-4)-(-x-1)$$
$$=-3$$

(2) $x=-2$ 인 경우

함수 $g(x)$ 는

$$g(-2)=f(1^+)-f(-2^-)$$
$$=0$$

(3) $-2<x<1$ 인 경우

함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=f(x+3^+)-f(x^-)$$
$$=(x+3)-(-x-1)$$
$$=2x+4$$

(4) $x=1$ 인 경우

함수 $g(x)$ 는

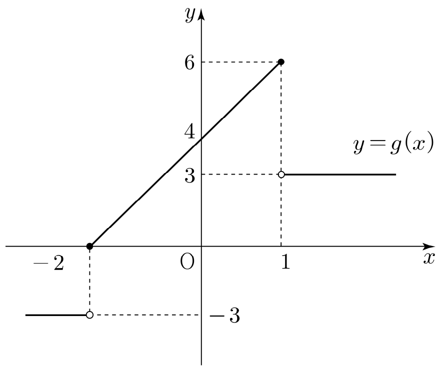
$$g(1)=f(4^+)-f(1^-)$$
$$=6$$

(5) $x>1$ 인 경우

함수 $g(x)$ 는

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+3^{+}) - f(x^{-}) \\ &= (x+3) - (x) \\ &= 3 \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



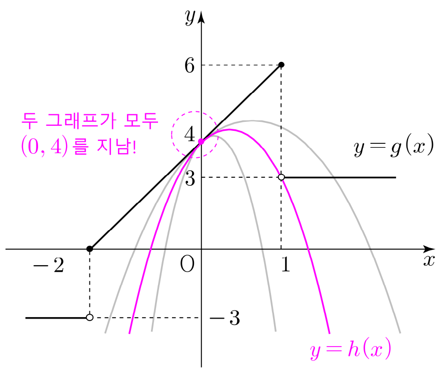
Step 2 방정식 $g(x)=ax^2+bx+4$ 의 실근

함수 $h(x)$ 를 $h(x)=ax^2+bx+4$ 로 두면 두 함수

$$\underline{y=g(x),\quad y=h(x)}$$

두 함수의 그래프가 모두 $(0, 4)$ 를 지남!

의 그래프가 만나는 점의 개수가 1 이어야 한다.



즉, $x=0$ 에서 두 함수의 그래프가 접해야 하므로

$$g'(0)=h'(0) \quad\rightarrow\quad b=2$$

이고, $x=0$ 을 제외한 점에서는 두 함수의 그래프가 만나는 점이 있으면 안되므로

$$h(-2)\le -3,\quad h(1)\le 3 \quad\rightarrow\quad a\le -3$$

따라서 $a\le -3$, $b=2$ 이므로 $a+2b \le 1$ 의 최댓값은 1 이다.

$\therefore\ 1$

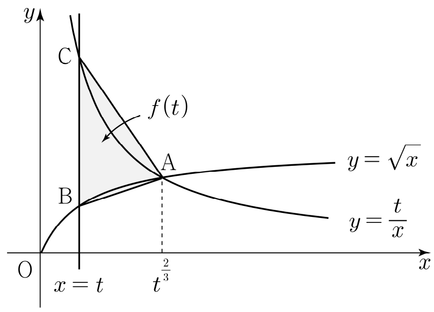
18

정답 12

점 A 의 x 좌표를 구하기 위해 두 식을 연립하면

$$\sqrt{x} = \frac{t}{x} \quad\rightarrow\quad x=t^{\frac{2}{3}}$$

이므로 점 A 의 좌표는 $\mathrm{A}\left(t^{\frac{2}{3}}, t^{\frac{1}{3}}\right)$ 이고, 두 점 B, C 의 좌표는 $\mathrm{B}(t, \sqrt{t})$, $\mathrm{C}(t, 1)$ 이다. (이때 $0<t<1$ 이므로 $t<t^{\frac{2}{3}}$ 이다.)



삼각형 ABC 의 넓이는

$$f(t)=\frac{1}{2}\times(1-\sqrt{t})\times\left(t^{\frac{2}{3}}-t\right)$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 1-}\frac{(1-t)^2}{f(t)} &= \lim_{t\to 1-}\frac{2(1-t)^2}{(1-\sqrt{t})\left(t^{\frac{2}{3}}-t\right)} \quad \leftarrow \text{유리화!} \\ &= \lim_{t\to 1-}\frac{2(1-t)(1+\sqrt{t})}{t^{\frac{2}{3}}\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)} \\ &= 4\times\lim_{t\to 1-}\frac{\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+t^{\frac{1}{3}}+t^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)} \\ &= 12 \end{aligned}$$

$\therefore\ 12$

19

정답 16

조건 (가)에서

$$f(x)-g(x)=x^3-2x^2+3x-2 \qquad \cdots ㉠$$

의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)-g(1)=0 \quad \to \quad f(1)=g(1)\ (=\alpha) \text{로 두자.}$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to1}\frac{|f(x)|}{g(x)}=-f(1) \qquad \cdots ㉡$$

을 해석하기 위해 α의 부호에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $\alpha>0$ 인 경우

㉡의 좌변 : $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{|f(x)|}{g(x)}=1\left(=\frac{\alpha}{\alpha}\right)$

㉡의 좌변 : $-f(1)=-\alpha$

에서 $\alpha=-1<0$ 이므로 모순!

(2) $\alpha<0$ 인 경우

㉡의 좌변 : $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{|f(x)|}{g(x)}=-1\left(=\frac{-\alpha}{\alpha}\right)$

㉡의 좌변 : $-f(1)=-\alpha$

에서 $\alpha=1>0$ 이므로 모순!

(3) $\alpha=0$ 인 경우 (정답 상황)

(1), (2)가 모두 모순이므로 $\alpha=0$일 수 밖에 없다.
이때 $f(1)=g(1)=0$ 에서

$$\lim_{x\to1}\frac{|f(x)|}{g(x)}=0\ (=-f(1))$$

이 성립하기 위해선 <u>$f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 적어도 2개 이상 갖고 있어야 한다.</u> (추가/보충 참고)

(1), (2), (3)에 의해

$$f(x)=(x-1)^2(x-a),\quad g(x)=(x-1)(x-b)$$

로 둘 수 있다. 이때 ㉠에서 이차항의 계수를 비교하여 a, b를 결정하면 $a=-1$, $b=3$ 이다.

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x)=(x-1)^2(x+1),\quad g(x)=(x-1)(x-3)$$

이므로 $f(3)+g(3)=16$ 이다.

$\therefore\ 16$

[추가/보충] $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 갖는 이유

$f(1)=g(1)=0$ 이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=(x-1)p(x),\quad g(x)=(x-1)q(x)$$

로 두자. 이를 ㉡에 대입해보면

$$\lim_{x\to1}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{|(x-1)p(x)|}{(x-1)q(x)}$$

← 우극한/좌극한 나눠서 관찰필요!

이므로 $x\to1+$, $x\to1-$ 를 나눠서 생각하자.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|}{g(x)}&=\lim_{x\to1+}\frac{|(x-1)p(x)|}{(x-1)q(x)}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)|p(x)|}{(x-1)q(x)}\\&=\frac{|p(1)|}{q(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{|f(x)|}{g(x)}&=\lim_{x\to1-}\frac{|(x-1)p(x)|}{(x-1)q(x)}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)|p(x)|}{(x-1)q(x)}\\&=-\frac{|p(1)|}{q(1)}\end{aligned}$$

이므로 두 값이 같기 위해선 $p(1)=0$ 이어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)p(x)\\&=(x-1)^2p_1(x)\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 적어도 2개 이상 갖고 있어야 한다.

20

정답 91

함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x-1) & (x\le 1) \\ \dfrac{2(x-1)^2}{f(x)} & (x>1) \end{cases}$$

: 구간별로 정의된 함수!

가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$x=1$ 에서 연속이어야 하고, … ㉠
$x>1$ 일 때, $f(x)\neq 0$ 이어야 한다. … ㉡

먼저 $x=1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) \Leftrightarrow f(0)=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)^2}{f(x)}$$

$f(x)$ 가 $(x-1)$ 을 인수로 몇개 가질 지에 따라 달라짐!

이 성립해야 하므로 $f(x)$ 가 $(x-1)$ 을 인수로 몇개 가지냐에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $f(x)$ 가 $(x-1)$ 를 인수로 3 개 갖는 경우

$f(x)=(x-1)^3$ 이면

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)^2}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x-1)}$$: 발산!

의 값이 수렴하지 않으므로 조건을 만족시킬 수 없다.

(2) $f(x)$ 가 $(x-1)$ 를 인수로 2 개 갖는 경우

$f(x)=(x-1)^2(x-a)$ 이면 (단, $a\neq 1$)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)^2}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x-a)}$$

이므로 $f(0)=\dfrac{2}{1-a}$ 이다. 이때 $f(0)=-a$ 이므로

$$-a=\frac{2}{1-a} \rightarrow a=-1,\ 2$$

① $a=-1$ 인 경우

$f(x)$ 는 $f(x)=(x-1)^2(x+1)$ 이므로 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} x(x-2)^2 & (x\le 1) \\ \dfrac{2}{x+1} & (x>1) \end{cases}$$

이때 $x>1$ 일 때, $x+1\neq 0$ 이므로 ㉡을 만족시키고, 방정식 $g(x)=0$ 의 실근은 $x=0$ 이 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

② $a=2$ 인 경우

$f(x)$는 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ 이므로 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} (x-2)^2(x-3) & (x\le 1) \\ \dfrac{2}{x-2} & (x>1) \end{cases}$$

이다. 이때 $x>1$ 일 때, $x-2=0$ 이 되는 순간이 생기므로 ㉡을 만족시키지 않는다. (모순!)

(3) $f(x)$ 가 $(x-1)$ 를 인수로 1 개 갖는 경우

$f(x)=(x-1)(x-a)(x-b)$ 이면 (단, $a\neq 1$, $b\neq 1$)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)^2}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-a)(x-b)}$$

이므로 $f(0)=0$ 이다. 즉, $f(x)$ 를 $f(x)=x(x-1)(x-a)$ 로 두면 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-a-1) & (x\le 1) \\ \dfrac{2(x-1)}{x(x-a)} & (x>1) \end{cases}$$

이다. 방정식 $g(x)=0$ 의 실근은 $x=1$, $x=a+1$ 이므로 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 합이 0 이려면

$$a+1=-1 \rightarrow a=-2$$

이때 $f(x)$ 는 $f(x)=x(x-1)(x+2)$ 이고, $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} (x-1)(x-2)(x+1) & (x\le 1) \\ \dfrac{2(x-1)}{x(x+2)} & (x>1) \end{cases}$$

이므로 $x>1$ 일 때, $x(x+2)\neq 0$ 이므로 ㉡을 만족시킨다.

(4) $f(x)$ 가 $(x-1)$ 를 인수로 0 개 갖는 경우

$f(x)$ 가 $(x-1)$ 를 인수로 갖지 않으면

$$\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)^2}{f(x)}=0 \quad\to\quad f(0)=0$$

이므로 $f(x)=x(x-a)(x-b)$ 로 두자. (단, $a\le0$, $b\le0$)
이때 a, b 의 값을 추론하기 위해 활용해야 할 조건은
방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 합이 0 이라는 점인데, 0, a, b 의 값 중 서로 같은 값이 있으면 합을 계산하는 방식이 달라지므로 중근이 발생할 수 있는 케이스를 분류하자.

① $a=b$ 인 경우

$f(x)$ 를 $f(x)=x(x-a)^2$ 으로 두면 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)(x-a-1)^2 & (x\le1)\\ \dfrac{2(x-1)^2}{x(x-a)^2} & (x>1)\end{cases}$$

이다. 방정식 $g(x)=0$ 의 실근은 $x=1$, $x=a+1$ 이므로
방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 합이 0 이려면

$$a+1=-1 \quad\to\quad a=-2$$

이때 $f(x)$ 는 $f(x)=x(x+2)^2$이고, $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)(x+1)^2 & (x\le1)\\ \dfrac{2(x-1)^2}{x(x+2)^2} & (x>1)\end{cases}$$

이므로 $x>1$ 일 때, $x(x+2)^2\ne0$ 이므로 ㉡을 만족시킨다.

② $b=0$ 인 경우 ($a=0$ 인 경우와 동일)

$f(x)$ 를 $f(x)=x^2(x-a)$으로 두면 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)^2(x-a-1) & (x\le1)\\ \dfrac{2(x-1)^2}{x^2(x-a)} & (x>1)\end{cases}$$

이다. 방정식 $g(x)=0$ 의 실근은 $x=1$, $x=a+1$ 이므로
방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 합이 0 이려면

$$a+1=-1 \quad\to\quad a=-2$$

이때 $f(x)$ 는 $f(x)=x^2(x+2)$ 이고, $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)^2(x+1) & (x\le1)\\ \dfrac{2(x-1)^2}{x^2(x+2)} & (x>1)\end{cases}$$

이므로 $x>1$ 일 때, $x^2(x+2)\ne0$ 이므로 ㉡을 만족시킨다

③ 0 , a , b 의 값이 모두 다른 경우

$f(x)$ 를 $f(x)=x(x-a)(x-b)$ 로 두면 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)(x-a-1)(x-b-1) & (x\le1)\\ \dfrac{2(x-1)^2}{x(x-a)(x-b)} & (x>1)\end{cases}$$

이다. 방정식 $g(x)=0$ 의 실근은 $x=1$, $x=a+1$, $x=b+1$ 이므로 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 합이 0 이려면

$$a+b+3=0 \quad\to\quad a+b=-3$$

이때 $x>1$ 일 때, $x(x-a)(x-b)\ne0$ 이어야 하므로 a, b 는 모두 음수여야 한다. 즉, $a=-2$, $b=-1$ 만 가능하므로 $f(x)=x(x+1)(x+2)$ 이다.

(1), (2), (3), (4)에 의해 함수 $f(x)$ 는

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x-1)^2(x+1) &&\to\quad f(3)=16 \ \text{: 최솟값!}\\
f(x)&=x(x-1)(x+2) &&\to\quad f(3)=30\\
f(x)&=x(x+2)^2 &&\to\quad f(3)=75 \ \text{: 최댓값!}\\
f(x)&=x^2(x+2) &&\to\quad f(3)=45\\
f(x)&=x(x+1)(x+2) &&\to\quad f(3)=60
\end{aligned}$$

따라서 $f(3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 91 $(=75+16)$ 이다.

$\therefore\ 91$

21

정답 ③

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{f(x)}\right\}=\frac{1}{2} \;\to\; \lim_{x\to0}\frac{f(x)-x^2}{x^2f(x)}=\frac{1}{2}\;:\;\frac{0}{0}\text{ 꼴}$$

이므로 $f(x)-x^2=x^2g(x)$ 로 두자. $f(x)$ 는

$$f(x)=x^2\{g(x)+1\} \;\leftarrow\; g(x)\text{는 이차함수!}$$

이므로 대입해서 정리하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x^2}{x^2f(x)}=\frac{1}{2} \;\to\; \lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2\{g(x)+1\}}=\frac{1}{2}\;:\;\frac{0}{0}\text{ 꼴}$$

이므로 $g(x)=px^2$ 꼴이어야 한다. 다시 대입해서 계산하면

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2\{g(x)+1\}}=\frac{1}{2} \;\to\; p=\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^2$ 이므로 $f(2)=12$ 이다.

$\therefore\ 12$

22

정답 ②

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이어야 한다. 즉, $g(1)=\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)$

(1) $x\le1$ 일 때

$(x-1)g(x)=f(x)+x(x-1)$ 에서

$$x<1\text{ 일 때, } g(x)=\frac{f(x)}{x-1}+x$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}g(x)&=\lim_{x\to1+}\left\{\frac{f(x)}{x-1}+x\right\}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}+1\;:\;\frac{0}{0}\text{ 꼴}\end{aligned}\qquad\cdots ㉠$$

의 값이 존재하므로 $f(1)=0$

(2) $x>1$ 일 때

$(\sqrt{x}-1)g(x)=f(x+1)$ 에서

$$g(x)=\frac{f(x+1)}{\sqrt{x}-1}$$

이므로

$$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{f(x+1)}{\sqrt{x}-1}\;:\;\frac{0}{0}\text{ 꼴}\qquad\cdots ㉡$$

의 값이 존재하므로 $f(2)=0$

(1), (2)에 의해 $f(1)=f(2)=0$ 이므로

$$f(x)=p(x-1)(x-2)$$

로 두자. 대입하여 ㉠, ㉡을 계산해보면

$$㉠ : \lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}+1 \;\to\; \lim_{x\to1-}g(x)=1-p$$

$$㉡ : \lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{f(x+1)}{\sqrt{x}-1} \;\to\; \lim_{x\to1+}g(x)=2p$$

이므로 $1-p=2p \;\to\; p=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x-2)$ 이므로 $f(5)=4$ 이다.

$\therefore\ 4$

23

정답 ③

Step 1 조건을 만족시키기 위한 k 의 값

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<2) \\ 2x+a & (x\ge 2) \end{cases}$$

: $\lim_{x\to 2} f(x)$ 의 값이 존재?

에 대하여 $\lim_{x\to 2} f(x)$ 의 값이 존재하면 모든 실수 k 에 대하여

$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x)$

$$\lim_{x\to 2}\{f(x)f(3x+k)\}$$

의 값이 존재하므로 조건을 만족시킬 수 없다. 즉,

$$\lim_{x\to 2-} f(x) \neq \lim_{x\to 2+} f(x) \ \rightarrow \ a\neq 0$$

이때

$$\lim_{x\to 2+}\{f(x)f(3x+k)\} = \lim_{x\to 2-}\{f(x)f(3x+k)\}$$
$$\Leftrightarrow (a+4)f(k+6^{+}) = 4f(k+6^{-})$$

을 만족시키는 실수 k 에 대해서 생각해보면

(1) $k+6\neq 2$ 이면, $f(k+6)=0$ 이어야 하고,
(2) $k+6=2$ 이면 성립할 가능성이 존재!
(실제로 가능한지는 계산을 통해 확인해야 함)

Step 2 케이스 분류를 통해 계산

(1) $k+6\neq 2$ 인 경우 ($\Leftrightarrow$ $k\neq -4$)

$k\neq -4$ 이면

$$\lim_{x\to 2+}\{f(x)f(3x+k)\} = \lim_{x\to 2-}\{f(x)f(3x+k)\}$$
$$\Leftrightarrow (a+4)f(k+6^{+}) = 4f(k+6^{-})$$

이 성립하기 위해선 $f(k+6)=0$ 이어야 한다. 즉,

$$k+6=-2 \ (<2),\quad k+6=-\frac{a}{2} \ (\ge 2) \quad \cdots ㉠$$

범위에 포함되는지 꼭 체크해야 함!

(2) $k+6=2$ 인 경우 ($\Leftrightarrow$ $k=-4$)

$k=-4$ 이면

$$\lim_{x\to 2+}\{f(x)f(3x+k)\} = \lim_{x\to 2-}\{f(x)f(3x+k)\}$$
$$\Leftrightarrow (a+4)f(k+6^{+}) = 4f(k+6^{-}) \ \leftarrow k=-4$$
$$\Leftrightarrow (a+4)^2 = 16$$

이므로 $a=-8$ 이다.

(1), (2)에 의해 $a=-8$ 이면 ㉠에서 $k+6=4\,(\ge 2)$을 만족시키므로 조건을 만족시키는 실수 k 의 개수는 3 이다.

$\therefore\ -8$

24

정답 ③

조건 (가)에 의해 모든 실수 x 에 대하여

$$x(x-1)f(x)=g(x)-x^3 \quad \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $g(0)=0$
㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $g(1)=1$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)-x^3}{(x-1)g(x)} \ \leftarrow xf(x)=\frac{g(x)-x^3}{x-1}$$
$$=1$$

이므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수이어야 한다.
따라서 $g(x)=-x(x-1)+x$ ($\because\ g(0)=0,\ g(1)=1$) 이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-x^3}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x(x-1)(x+2)}{x(x-1)}$$
$$=-3$$

이다.

$\therefore\ -3$

25

정답 ②

Step 1 조건 (가) 해석

함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 조건 (가)에서 $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)-1$이므로

$$\lim_{x\to 0} g(x)\left(=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)$$

의 값이 존재해야 한다. 즉, $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$를

$$f(x)=xh(x) \leftarrow h(x)\text{는 최고차항의 계수가 }-1\text{인 이차함수!}$$

로 두면

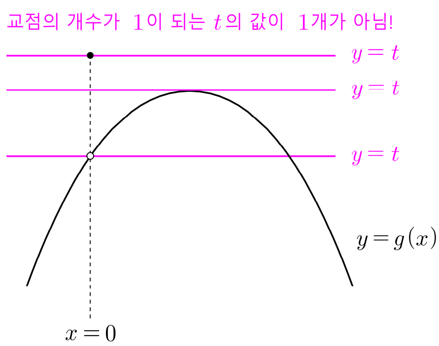
$$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)-1 \ \rightarrow\ h(0)=a-1$$

Step 2 조건 (나) 해석

조건 (나)를 만족시키는 함수

$$g(x)=\begin{cases}h(x) & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases} \leftarrow h(0)=a-1$$

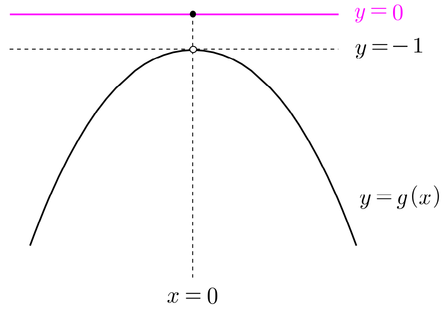
의 그래프를 그려보자.



위의 그림과 같이 조건 (나)에서 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 t의 개수가 1인 상황은 매우 특수한 상황이다. (최댓값과 겹치면 된다!)

(1) 대칭축이 $x=0$인 경우

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 t의 값이 $t=0$뿐인 상황은 다음과 같다.

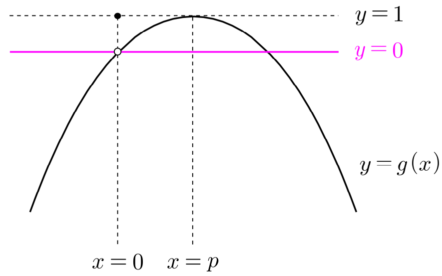


함수 $h(x)$는 $h(x)=-x^2-1$이므로
$f(3)=-30\,(=3h(3))$이다.

(2) 대칭축이 $x\neq 0$인 경우

① 대칭축이 $x>0$에 있는 경우

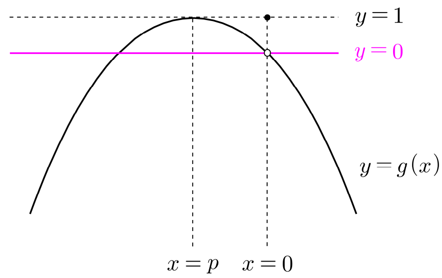
방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 t의 값이 $t=0$뿐인 상황은 다음과 같다.



함수 $h(x)$는 $h(x)=-(x-p)^2+1$, $h(0)=0$이므로
$p=1$이다. 즉, $f(3)=-9\,(=3h(3))$이다.

② 대칭축이 $x<0$에 있는 경우

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 t의 값이 $t=0$뿐인 상황은 다음과 같다.



함수 $h(x)$는 $h(x)=-(x-p)^2+1$, $h(0)=0$이므로
$p=-1$이다. 즉, $f(3)=-45\,(=3h(3))$이다.

(1), (2), (3)에 의해 모든 $f(3)$의 값의 합은

$$(-30)+(-9)+(-45)=-84$$

이다.

$\therefore\ -84$

26

정답 ③

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x^n}\times\frac{f(x)-x^2}{x^n-f(x)}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{f(-x)}{x^n}=-2$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x^n}\times\frac{f(x)-x^2}{x^n-f(x)}\right\}=-2 \qquad \cdots ㉠$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(-x)}{x^n}=-2 \qquad \cdots ㉡$$

어떤 자연수 n에 대하여 ㉠, ㉡이 성립하므로 $n=1,\ 2,\ \cdots$ 를 하나씩 생각해보자.

(1) $n=1$ 인 경우

$$㉠ :\ \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-x^2f(x)}{x^2-xf(x)}=-2$$
$$㉡ :\ \lim_{x\to0}\frac{f(-x)}{x}=-2$$

이므로 ㉠을 만족시키려면 $f(x)$는 이차함수이어야 한다.
이때 ㉡에서 $f(-x)=\ \cdots\ +(-2x)$ 이므로

$$f(x)=ax^2+2x$$

로 두자. ㉠에 대입하여 계산해보면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-x^2f(x)}{x^2-xf(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4a-2)x^3+\cdots}{-ax^3+\cdots}$$
$$=\frac{4a-2}{-a}$$

이므로 $\dfrac{4a-2}{-a}=-2 \ \rightarrow\ a=1$

따라서 $f(x)$는 $f(x)=x^2+2x$ 이다.

(2) $n=2$ 인 경우

$$㉠ :\ \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-x^2f(x)}{x^4-x^2f(x)}=-2$$
$$㉡ :\ \lim_{x\to0}\frac{f(-x)}{x^2}=-2$$

이므로 ㉠을 만족시키려면 $f(x)$는 이차함수이어야 한다.
이때 ㉡에서 $f(-x)=-2x^2$이므로

$$f(x)=2x^2$$

로 확정할 수 있다. 하지만, 이를 ㉠에 대입하여 계산해보면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-x^2f(x)}{x^2-xf(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{3x^4}$$
$$=2\,(\neq-2)$$

이므로 모순!

(1), (2)에 의해 $f(x)$는 $f(x)=x^2+2x$ 이므로 $f(4)=24$ 이다.

$\therefore\ 24$

27

정답 ③

Step 1 **$g(t)$ 의 불연속 점의 개수 파악**

실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(t-f(x))=0$$

의 서로 다른 양의 실근의 개수를 찾기 위해 먼저 $f(x)=0$을 만족시키는 해를 관찰할 필요가 있으므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 0 인 경우

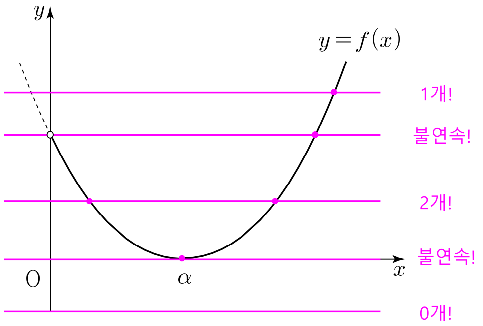
방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않으면
방정식 $f(t-f(x))=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수도 0이므로 항상 $g(t)=0$일 것이다. 즉, $g(t)$는 불연속점이 존재하지 않으므로 모순!

(2) $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1 인 경우

어떤 실수 α 에 대하여 $f(x)=(x-\alpha)^2$ 로 두면 방정식 $f(t-f(x))=0$ 은 $f(x)=\underline{t-\alpha}$ 일 때 실근이 생긴다.

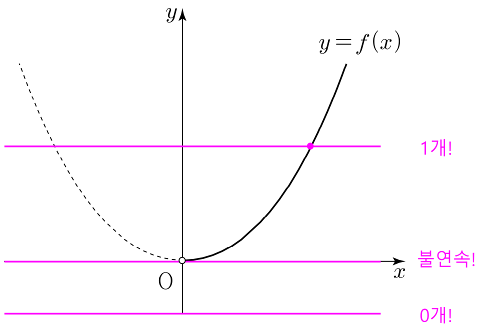
어떤 상수함수! (가로 직선)

① $\alpha>0$ 인 경우



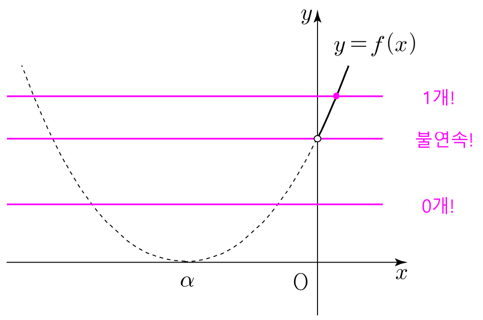
$\alpha>0$ 인 경우 위의 그림과 같이 $g(t)$ 가 불연속인 t 의 개수는 2 이므로 모순!

② $\alpha=0$ 인 경우



$\alpha=0$ 인 경우 위의 그림과 같이 $g(t)$ 가 불연속인 t 의 개수는 1 이므로 모순!

③ $\alpha<0$ 인 경우



$\alpha<0$ 인 경우 위의 그림과 같이 $g(t)$ 가 불연속인 t 의 개수는 1 이므로 모순!

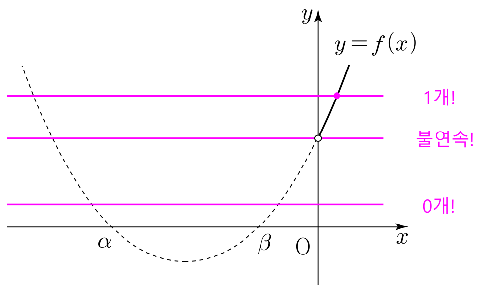
(3) $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 인 경우

방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 각각 α, β $(\alpha<\beta)$ 로 두면 방정식 $f(t-f(x))=0$ 은

$$f(x)=t-\alpha, \quad f(x)=t-\beta$$

일 때 실근이 생긴다. 이때 $g(t)$ 는 방정식 $f(t-f(x))=0$ 의 서로 다른 **양의** 실근의 개수이므로 α, β 의 부호에 따라 케이스를 분류하자.

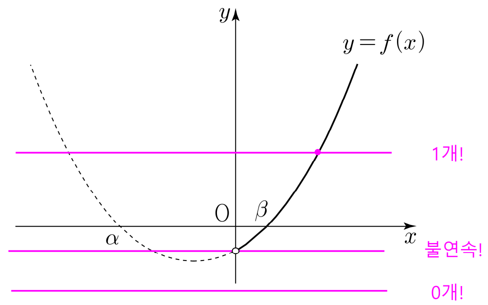
① $\alpha<\beta<0$ 인 경우



$\alpha<\beta<0$ 인 경우 위의 그림과 같이
$t-\alpha=f(0)$, $t-\beta=f(0)$ 에서만 불연속이다.
즉, $g(t)$ 가 불연속인 t 의 개수는 2 이므로 모순!

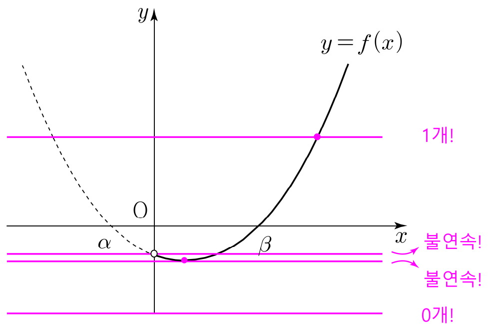
② $\alpha<0<\beta$ 인 경우

i) $\alpha+\beta\le 0$ 인 경우



$\alpha+\beta\le 0$ 인 경우 위의 그림과 같이
$t-\alpha=f(0)$, $t-\beta=f(0)$ 에서만 불연속이다.
즉, $g(t)$ 가 불연속인 t 의 개수는 2 이므로 모순!

ii) $\alpha+\beta>0$ 인 경우

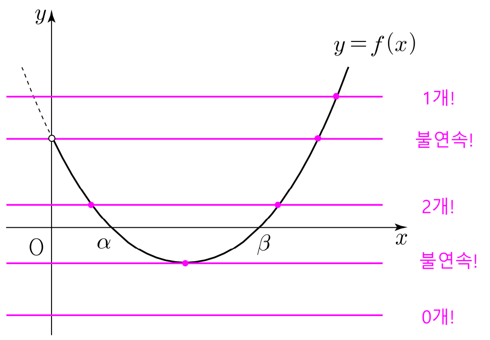


$\alpha+\beta>0$인 경우 위의 그림과 같이

$t-\alpha=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $t-\beta=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$,

$t-\alpha=f(0)$, $t-\beta=f(0)$ 에서 불연속이다. ← (4개?)

③ $0<\alpha<\beta$ 인 경우



$0<\alpha<\beta$인 경우 위의 그림과 같이

$t-\alpha=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $t-\beta=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$,

$t-\alpha=f(0)$, $t-\beta=f(0)$ 에서 불연속이다. ← (4개?)

Step 2 $g(t)$ 의 불연속 점의 개수가 3 이려면?

(1), (2), (3)에 의해 $g(t)$가 불연속인 t의 개수는 $0,\ 1,\ 2,\ 4$ 이다. 이때 우리가 찾고 싶은 상황은 $g(t)$가 불연속인 t의 개수가 3인 순간이므로 $g(t)$가 불연속인 t의 개수 4인

$$t-\alpha=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\quad t-\beta=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$t-\alpha=f(0),\quad t-\beta=f(0)$$

인 상황에서 $t-\alpha=f(0)$ 일 때와 $t-\beta=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 일 때의 t의 값이 겹치면 된다! 즉,

$$\alpha+f(0)=\beta+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\quad \cdots ㉠$$

㉠이 만족되는 상황에서 $g(t)$가 불연속인 t의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$t_1=\alpha+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$t_2=\beta+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ (=\alpha+f(0)),$$

$$t_3=\beta+f(0)$$

이다. 이때 $t_2-t_1=2$이므로 $\beta-\alpha=2$ 이다. 즉, 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-\alpha)(x-(\alpha+2))$로 두자.

$$f(0)=\alpha^2+2\alpha,\ \left(f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\right) f(\alpha+1)=-1$$

이므로 이를 ㉠에 대입하여 계산하면

$$\alpha^2+3\alpha=\alpha+1 \ \rightarrow\ \alpha^2+2\alpha-1=0$$
$$\rightarrow\ \alpha=-1\pm\sqrt{2}$$

이때 $\alpha+\beta>0$ 이어야 하므로 $\alpha=-1+\sqrt{2}$, $\beta=1+\sqrt{2}$

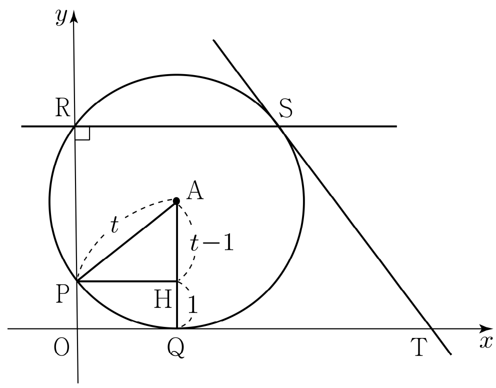
따라서 $t_3=2+\sqrt{2}$ $(=\beta+f(0))$ 이므로 $f(t_3)=3$ 이다.

직접 대입해서 계산!

$\therefore\ 3$

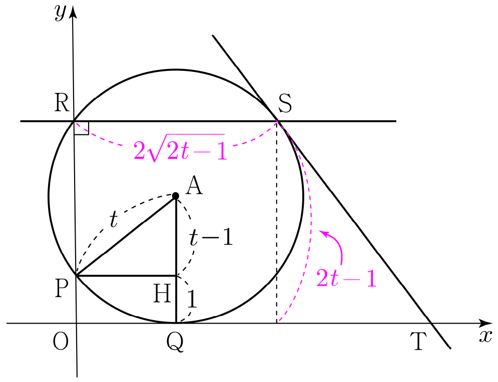
28

정답 2



원의 중심을 A로 두고 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H로 두면 $\overline{AP}=t$, $\overline{AH}=t-1$이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{PH}=\sqrt{2t-1}\ \rightarrow\ \overline{RS}=2\sqrt{2t-1}$$



두 점 A, S의 좌표는

$$\mathrm{A}\left(\sqrt{2t-1},\, t\right),\quad \mathrm{S}\left(2\sqrt{2t-1},\, 2t-1\right)$$

이므로 직선 AS의 기울기는 $\dfrac{t-1}{\sqrt{2t-1}}$ 이다.

즉, 점 S에서의 접선의 방정식은

$$y=-\frac{\sqrt{2t-1}}{t-1}\left(x-2\sqrt{2t-1}\right)+2t-1$$

이므로 점 T의 좌표는 $\mathrm{T}\left((t+1)\sqrt{2t-1},\, 0\right)$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{TQ}}}{t^2}&=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{2t-1}\times t\sqrt{2t-1}}{t^2}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{t(2t-1)}{t^2}\\&=2\end{aligned}$$

이다.

$\therefore\ 2$

29

정답 6

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+x+2 & (x<1)\\ x+k & (x\geq 1)\end{cases}$$

에 대하여 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to1+}f(x)=k+1$ 이다.

이때 k는 1이 아닌 양수이므로 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1+}f(x)$

즉, 세 함수 $f(x),\ g(x),\ h(x)$는

$f(x)$: $x=1$에서 불연속인 구간별로 정의된 함수!
$g(x)$: 실수 전체의 집합에서 연속인 함수!
$h(x)$: 최고차항의 계수가 1인 삼차함수! (연속성 보장)

Step 1 $\lim\limits_{t\to x}f(t)g(t)=\dfrac{h(x)}{x-f(1)}$ **(단, $x\neq f(1)$)**

$f(1)=k+1$이므로 조건 (가)에서 $x\neq k+1$인 모든 실수 x에 대하여 $\lim\limits_{t\to x}f(t)g(t)=\dfrac{h(x)}{x-f(1)}$ 를 만족시킨다.

이때 만약

$$\lim_{t\to x}f(t)g(t)=f(x)g(x)\qquad\cdots\ ㉠$$

로 표현할 수만 있다면, 문제 접근이 훨씬 쉬워지겠지만, $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 ㉠의 식을 x의 값의 범위에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $x=1$ 인 경우

$x=1$이면 $\lim\limits_{t\to1}f(x)g(x)=\dfrac{h(1)}{1-f(1)}$이므로

$$\lim_{t\to1+}f(x)g(x)=\frac{h(1)}{1-f(1)}\ \rightarrow\ (k+1)g(1)=\frac{h(1)}{1-f(1)}$$
$$\lim_{t\to1-}f(x)g(x)=\frac{h(1)}{1-f(1)}\ \rightarrow\ 2g(1)=\frac{h(1)}{1-f(1)}$$

이 성립해야 한다. 이때 $k\neq1$이므로 $g(1)=0$이고 $h(1)=0$이다.

(2) $x\neq1$ 인 경우

$x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여 $\lim\limits_{t\to x}f(t)g(t)=f(x)g(x)$

이므로

$$f(x)g(x)=\frac{h(x)}{x-f(1)}\ \rightarrow\ g(x)=\frac{h(x)}{f(x)\{x-f(1)\}}$$

: $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)=0$인 점과 $x=f(1)$일 때, $h(x)=0$이어야 한다.

이 성립한다. 이때 $f(1)=k+1$이고 $f(x)=0$의 해는 $x=-1$이므로 $h(x)$를

$$h(x)=(x+1)(x-1)(x-(k+1))$$

로 두자.

조건 (나)에서

$$(g(f(1))=)\ g(k+1)=\lim_{x\to k+1}g(x)$$
$$=\lim_{x\to k+1}\frac{h(x)}{f(x)\{x-(k+1)\}}$$
$$=\lim_{x\to k+1}\frac{(x+1)(x-1)}{f(x)}$$
$$=\frac{k(k+2)}{2k+1}$$

이므로 $\frac{k(k+2)}{2k+1}=\frac{8}{5}$ $\rightarrow$ $k=2$ ($\because$ k는 1이 아닌 양수)

(1), (2)에 의해 $k=2$이므로 두 함수 $f(x)$와 $h(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+x+2 & (x<1)\\ x+2 & (x\geq 1)\end{cases},$$
$$h(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$$

이다. 따라서 함수 $g(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{f(x)(x-3)}$에 대하여

$$g(7)=\frac{16}{3}\left(=\frac{8\times 6}{f(7)}\right),$$
$$g(-1)=-\frac{2}{3}\left(=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{f(x)}\right)$$

이므로 $g(7)-g(-1)=6$이다.

$\therefore$ 6

30

정답 97

Step 1 **$h(t)$의 극한 형태 파악**

$$h(t)=\lim_{x\to t}\frac{(x-t)^2}{\sqrt{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}-\{|f(x)|+|g(x)|\}}$$

는 극한으로 정의된 함수이기에 연속성을 조사하기에 앞서 극한의 형태를 먼저 파악해보자.

(분자) : $(x-t)^2$

(분모) : $\sqrt{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}-\{|f(x)|+|g(x)|\}$

에서 $\lim_{x\to t}$를 씌우면

$$(x-t)^2 \rightarrow 0\text{으로 감!}$$
$$\sqrt{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}-\{|f(x)|+|g(x)|\} \rightarrow \text{알 수 없음!}$$

즉,

$\sqrt{\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2}-\{|f(t)|+|g(t)|\}\neq 0$이면 $h(t)=0$

$\sqrt{\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2}-\{|f(t)|+|g(t)|\}=0$이면 수렴할 가능성!

항상 수렴하는 건 아님. 인수 개수 비교 및 계산 등 구체적 판단 필요!

Step 2 **$h(t)$가 0이 아닌 값으로 수렴할 조건**

$$h(t)=\lim_{x\to t}\frac{(x-t)^2}{\sqrt{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}-\{|f(x)|+|g(x)|\}}$$

⤸ 유리화!

$$=\lim_{x\to t}\frac{(x-t)^2\left[\sqrt{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}+\{|f(x)|+|g(x)|\}\right]}{-2|f(x)||g(x)|}$$

⤸ $p(x)=\sqrt{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}+\{|f(x)|+|g(x)|\}$로 두자.

$$=\lim_{x\to t}\frac{(x-t)^2\times p(x)}{-2|f(x)||g(x)|}$$

의 값이 0이 아닌 값으로 수렴하려면

$$f(x)g(x)=(x-t)^2\times\cdots$$

$(x-t)$를 인수로 적어도 2개는 갖고 있어야 함!

2개 갖고 있는 경우, 3개 갖고 있는 경우에 대해 구체적 판단 필요!

조건 (나)에서 $h(3)=h(5)=-\frac{1}{2}$이므로

$$f(x)g(x)=(x-3)^2(x-5)^2\times\cdots$$

꼴이어야 한다. 이때 $f(3)=g(3)$이므로 일단

$$f(x)=(x-3)\times\cdots,\quad g(x)=(x-3)\times\cdots$$

와 같이 $(x-3)$ 인수를 하나씩 나눠가져야 한다.

이때 $f(3)=g(3)=0$이므로 $\left(\lim_{x\to 3}p(x)=\right)p(3)=0$이 되고,

$$h(3)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^3\times\cdots}{-2|f(x)||g(x)|}$$

분자에 $(x-3)$ 인수가 1개 더 추가가 된다. 그럼에도 불구하고 $h(3)=-\frac{1}{2}(\neq 0)$이므로 분모에 $(x-3)$ 인수가 3개 있어야 한다.

즉, $f(x)g(x)=(x-3)^3(x-5)^2(x-a)$ ⋯ ㉠

: $(x-3)$ 인수를 1개, 2개로 나눠 가지면 되지만,
$(x-5)$ 인수는 1개, 1개로 나눠 가질 지,
한 쪽이 2개를 모두 가질 지 판단 필요!

*** 만약 $(x-5)$를 $f(x)$와 $g(x)$가 하나씩 나눠 갖는다면?**

$f(5)=g(5)=0$이므로 $\left(\lim_{x\to5}p(x)=\right)p(5)=0$이 되고,

$$h(5)=\lim_{x\to3}\frac{(x-5)^3\times\cdots}{-2|f(x)||g(x)|}$$

분자에 $(x-5)$ 인수가 1개 더 추가가 된다. 그럼에도 불구하고 $h(5)=-\frac{1}{2}\ (\neq 0)$이므로 분모에 $(x-5)$ 인수가 3개 있어야 한다.

즉, $f(x)g(x)=(x-3)^3(x-5)^3$이다.

하지만 이때 $f(x)$와 $g(x)$에 각각 인수를 나눠 갖는 경우를 모두 고려하더라도 $f(2)<0$이므로 조건에 모순!

그러므로 ㉠에서 $a\neq5$이며, $(x-5)$ 인수 2개는 $f(x)$와 $g(x)$ 중 한 쪽이 모두 가져가야 한다.

Step 3 케이스 분류를 통한 함수 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $(x-3)$ 인수를 각각 1개, 2개씩 나눠 갖고, $(x-5)$ 인수는 한 쪽이 2개를 모두 갖고 있어야 한다.

(1) $f(x)$가 $(x-3)$ 인수를 2개 갖는 경우 (정답상황!)

$f(x)$가 $(x-3)$ 인수를 2개 갖는다면

$$f(x)=(x-3)^2(x-a),\quad g(x)=(x-3)(x-5)^2$$

이어야 한다. 이때 $f(2)>0$이어야 하므로 $a<2$

$$h(3)=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)^2\times p(x)}{-2\left|(x-3)^3(x-5)^2(x-a)\right|}$$

⤸ 절댓값 벗길 수 있는 놈은 벗기기!

$$=\lim_{x\to3}\frac{p(x)}{-2(x-5)^2(x-a)|x-3|}$$

이때 분모에 $(x-3)$ 인수가 1개 남아있으므로 분자인 $p(x)=\sqrt{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}+\{|f(x)|+|g(x)|\}$에 $(x-3)$과 관련한 인수 조사가 필요하다.

$$\begin{aligned}\sqrt{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}&=\sqrt{(x-3)^4(x-a)^2+(x-3)^2(x-5)^4}\\&=|x-3|\underbrace{\sqrt{(x-3)^2(x-a)^2+(x-5)^4}}_{\lim_{x\to3}\text{을 계산하면 4로 감!}\ \cdots\ ㉡}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f(x)|+|g(x)|&=|(x-3)^2(x-a)|+|(x-3)(x-5)^2|\\&=|x-3|\underbrace{\{|(x-3)(x-a)|+|(x-5)^2|\}}_{\lim_{x\to3}\text{을 계산하면 4로 감!}\ \cdots\ ㉢}\end{aligned}$$

이므로

$$h(3)=\lim_{x\to3}\frac{p(x)}{-2(x-5)^2(x-a)|x-3|}$$

⤸ 4로 수렴하는 놈들은 미리 보내기! (∵ ㉡, ㉢)

$$=\lim_{x\to3}\frac{|x-3|\times(4+4)}{-2(x-5)^2(x-a)|x-3|}=\frac{1}{a-3}$$

이므로 $\frac{1}{a-3}=-\frac{1}{2}$에서 $a=1\ (<2)$

* Remark (: $h(5)=-\frac{1}{2}$는 확인 안해도 되나요?)

$h(5)$를 계산하면

$$h(5)=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)^2\times p(x)}{-2\left|(x-3)^3(x-5)^2(x-a)\right|}$$

⤸ 절댓값 벗길 수 있는 놈은 벗기기!

$$=\lim_{x\to5}\frac{p(x)}{-2(x-3)^3(x-a)}$$

이때 $\lim_{x\to5}p(x)=2|f(5)|$이므로 이어서 계산하면

$$h(5)=\lim_{x\to5}\frac{p(x)}{-2(x-3)^3(x-a)}=\frac{2\times4\times(5-a)}{-2\times8\times(5-a)}=-\frac{1}{2}$$

이므로 $a<2$이기만 하면 항상 $-\frac{1}{2}$이 나온다.

(2) $g(x)$가 $(x-3)$ 인수를 2개 갖는 경우

$g(x)$가 $(x-3)$ 인수를 2개 갖는다면

$$f(x)=(x-3)(x-5)^2,\quad g(x)=(x-3)^2(x-a)$$

이어야 한다. 이때 $f(2)<0$이므로 모순!

(1), (2)에 의해 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=(x-1)(x-3)^2,\quad g(x)=(x-3)(x-5)^2$$

이므로 $f(7)+g(4)=97\ (=96+1)$이다.

$\therefore$ 97