-------지수함수의 미분--

$f(x)=e^x$이면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\times\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$이다.

$f(x)=a^x$이면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\times\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$$이다.

따라서 $(e^x)'=e^x$, $(a^x)'=a^x\ln a$이다.

-------합성함수의 미분--

$h(x)=f(g(x))$이고, $f(x), g(x)$가 미분 가능하다고 하자.

$$\begin{aligned} h'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &=\lim_{g(x+h)\to g(x)}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \end{aligned}$$[26)]

$$=f'(g(x))\times g'(x)$$

따라서 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\times g'(x)$이다.

-------x^r(단, r은 실수)의 미분--

$f(x)=x^r$에서 양변에 자연로그를 취해주면 $\ln f(x)=r\ln x$이고, 양변을 x로 미분해주면 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{r}{x}$이므로 $f'(x)=rx^{r-1}$이다. 따라서 $(x^r)'=rx^{r-1}$이다.

-------$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$의 미분--

$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$이고, 합성함수 미분을 이용하자. 그러면 $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$를 미분하면 다음과 같다.

$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$임을 알 수 있다.

----

26) $g(x)$가 미분 가능하므로 연속이다. 따라서 $\lim\limits_{h\to 0}$를 $\lim\limits_{g(x+h)\to g(x)}$로 표기해도 된다.

-------$\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$의 미분---

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$에서 $f(x)$대신 $\dfrac{1}{f(x)}$를 대입하자.

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f(x)}\right)' g(x) + \frac{1}{f(x)} g'(x)$$

$$= -\frac{f'(x)g(x)}{f(x)^2} + \frac{g'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2}$$

따라서 $\underline{\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)' = \dfrac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2}}$이다.

-------$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$의 미분---

① $f(x) = \sin x$이면

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x \frac{(\cosh - 1)}{h} + \cos x \frac{\sinh}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\sinh}{h} - \sin x \frac{2\sin^2(h/2)}{h}$$

$$= \cos x$$

따라서 $\underline{(\sin x)' = \cos x}$이다.

② $f(x) = \cos x$이면

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cosh - \sin x \sinh - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos x \frac{(\cosh - 1)}{h} - \sin x \frac{\sinh}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\sin x \frac{\sinh}{h} - \cos x \frac{2\sin^2(h/2)}{h}$$

$$= -\sin x$$

따라서 $\underline{(\cos x)' = -\sin x}$이다.

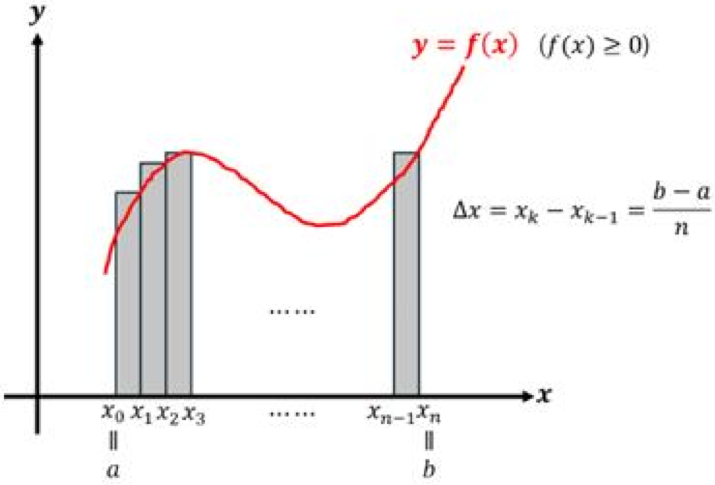
③ $f(x) = \tan x$이면

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

따라서 $\underline{(\tan x)' = \sec^2 x}$이다.

9.6 정적분의 활용

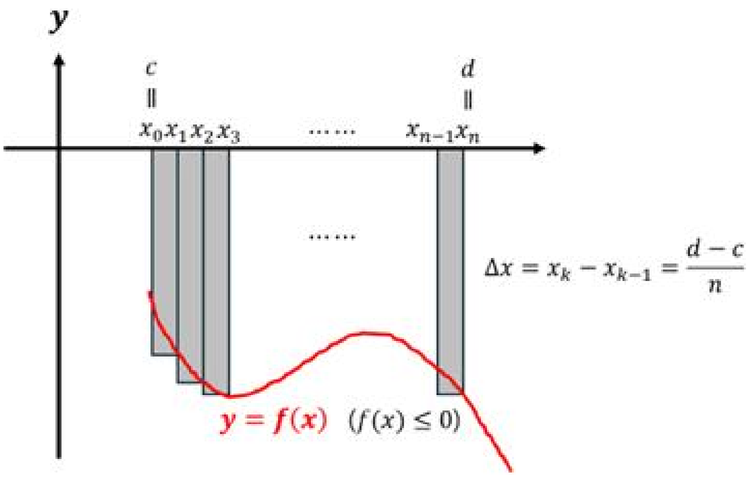
정적분과 급수간의 관계를 알아보고자 한다.



연속함수 $f(x)$가 $[a,b]$에서 0이상이고, $x_0=a, x_n=b$이고, $[a,b]$를 동일한 길이의 구간으로 n개 나누었을 때 그 경계를 x_k라 하자. 이때 나누어진 구간의 길이는 $\triangle x=\dfrac{b-a}{n}$이고, $x_k=x_0+k\triangle x$이다.

그리고 색칠된 직사각형들의 합을 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\triangle x$이라 하고, $y=f(x), x=a,$ $x=b, y=0$으로 둘러싸인 넓이를 S라 할 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=S$이 성립한다고 알려져 있다.

즉 $[a,b]$에서 $f(x)\ge 0$이면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$이다. ··········①



다음으로 $f(x)$가 $[c,d]$에서 음의 값을 갖는다면 어떻게 되는지 알아보자.

$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\triangle x$이라하고, $y=f(x), x=c, x=d, y=0$으로 둘러싸인 넓이를 T라 한다면 색칠되는 직사각형의 넓이는 $(-T_n)$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-T_n)=T$이다. 그리고 $T=-\displaystyle\int_c^d f(x)dx$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=-T=\int_c^d f(x)dx$임을 알 수 있다.

즉 $[c,d]$에서 $f(x)\le 0$이면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(c+\frac{d-c}{n}k\right)\frac{d-c}{n}=\int_c^d f(x)dx$이다. ··········②

다음으로 이차곡선 위의 임의의 점 (x_1, y_1)에서 접선의 방정식을 구해보자.

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$에서 $b=0$인 상황을 보자.

즉 $ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$일 때 접선의 방정식을 구해보자.
우선 양변을 음함수 미분해보자.

$$2ax+2cy\frac{dy}{dx}+d+e\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2ax+d}{2cy+e}\Big|_{(x,y)=(x_1,y_1)}=-\frac{2ax_1+d}{2cy_1+e}$$

따라서 접선의 방정식은 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 $-\dfrac{2ax_1+d}{2cy_1+e}$이다.

이는 $y=-\dfrac{2ax_1+d}{2cy_1+e}(x-x_1)+y_1$이다.

정리하면 $\underline{ax_1x+cy_1y+d\dfrac{x+x_1}{2}+e\dfrac{y+y_1}{2}+f=0}$이다.

즉 $\underline{x^2 \to x_1x,\ y^2 \to y_1y,\ x \to \dfrac{x+x_1}{2},\ y \to \dfrac{y+y_1}{2}}$로 치환 해주면 된다.

위의 치환을 이용해 포물선, 타원, 쌍곡선위의 점 (x_1, y_1)에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y^2=4px \to y_1y=2p(x+x_1)$$
$$x^2=4py \to x_1x=2p(y+y_1)$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \to \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \to \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \to -\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어난 횟수를 X라 했을 때 X는 이산 확률분포를 가진다. 그리고 X의 확률 질량함수는 $P(X=x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$이다. 이러한 이산 확률분포를 "이항분포"라고 부르며 다음과 같이 표기한다. $X \sim B(n,p)$

한편 이항분포의 기댓값, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{n} xP(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x\,{}_nC_x p^x(1-p)^{n-x} \\ &= np\sum_{x=1}^{n} {}_{n-1}C_{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x} \\ &= np(p+1-p)^{n-1} = np \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2-X] &= \sum_{x=0}^{n}(x^2-x)P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\,{}_nC_x p^x(1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n} {}_{n-2}C_{x-2}p^{x-1}(1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} = n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E[X]+E[X^2-X] \\ &= n^2p^2-np^2+np = n^2p^2+np(1-p) \\ &= n^2p^2+npq \end{aligned}$$

$$V[X] = E[X^2]-(E[X])^2 = n^2p^2+npq-n^2p^2 = npq$$

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]} = \sqrt{npq}$$

정리하면 다음과 같다.

$X \sim B(n,p)$일 때

$E[X]=np,\ V[X]=npq, \sigma[X]=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

한편 표본평균 $\overline{X}$는 n개의 확률변수인 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$의 평균이므로 $\overline{X}$ 또한 확률변수이다. 이제 확률변수 $\overline{X}$(표본평균)의 기댓값, 분산, 표준편차를 구해보자.

$$E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[X_i] = \frac{1}{n}\times nm = m$$

$$V[\overline{X}] = V[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i] = \frac{1}{n^2}V[\sum_{i=1}^{n}X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V[X_i] = \frac{1}{n^2}\times n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$ [16]

16) 두 사건 X, Y가 서로 독립이면 $V[aX+bY] = a^2V[X] + b^2[Y]$이다. 따라서 시그마가 다음과 같이 풀리게 된다.

따라서 $\overline{X}$의 기댓값을 정리하면 다음과 같다.

$$E[\overline{X}] = E[X],\ V[\overline{X}] = \frac{V[X]}{n}, \sigma[\overline{X}] = \frac{\sigma[X]}{\sqrt{n}}$$

주의해야 할 점이 하나가 있는데 그것은 S^2과 $V[\overline{X}]$이 서로 다르다는 것을 잘 알고 있어야 한다.

S^2은 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$의 분산이고, $V[\overline{X}]$는 $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n}{n}$의 분산이다.

모집단이 정규본포를 따르지 않더라도 표본집단의 크기가 매우 크면 표본집단은 정규분포를 따른다.

문제를 풀다보면 모분산의 값을 알기 때문에 $V[\overline{X}] = \frac{V[X]}{n}$임을 이용해서 $\overline{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$의 가정을 사용할 것이다. 하지만 실제 설문조사는 대부분 표본집단을 이용하기 때문에 모분산을 알지 못하는 경우가 대부분이다. ~~이 경우에는 S^2을 사용해야 하고 t분포를 이용해 해석한다.~~ [17]

example 183

$x^{\frac{2}{2n+1}} + y^{\frac{2}{2n+1}} = 1$이 나타내는 곡선의 길이를 L_n이라 하자.

1. 주어진 곡선을 매개화 하시오.
2. L_1의 값을 구하시오.
3. $\lim_{n \to \infty} L_n$의 값을 구하시오.

example 220

$\triangle ABC$의 외접원의 중심을 O라고 하자. 그리고 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 M이라고 하자. 그리고 A, B, C에서 각 대변에 내린 수선의 발을 D, E, F이라 하고, $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$의 교점을 H라 하자. 또한 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AO}=\vec{o}$라 하자.

1. $\overrightarrow{OM}$를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{o}$를 이용해 나타내시오.
2. $\vec{o}$를 $\vec{a}, \vec{b}$로 나타내시오.
3. $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{OM}}$의 값을 구하시오.

example 196

포물선, 타원, 쌍곡선을 정의하는 방법으로 다른 방식이 있다. 점 P, 직선 l에 대해 점 X에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하자. 그리고 $e=\frac{\overline{XP}}{\overline{XH}}$라고 정의했을 때 $e>1$이면 쌍곡선, $e=1$이면 포물선, $0<e<1$이면 타원이라고 정의한다. 이러한 사실을 기반으로 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$이 쌍곡선, 타원, 포물선인지 판단하는 기준이 b^2-4ac의 부호임을 보이고 각각의 조건을 구하시오.

(Hint: P를 원점 O라 하고, l을 $px+qy+r=0$ $(r\neq 0)$으로 설정한다.)

example solution 183

1. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$이므로 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$로 매개화 할 수 있다. 그리고 t의 범위는 $0 \le t \le 2\pi$이다.

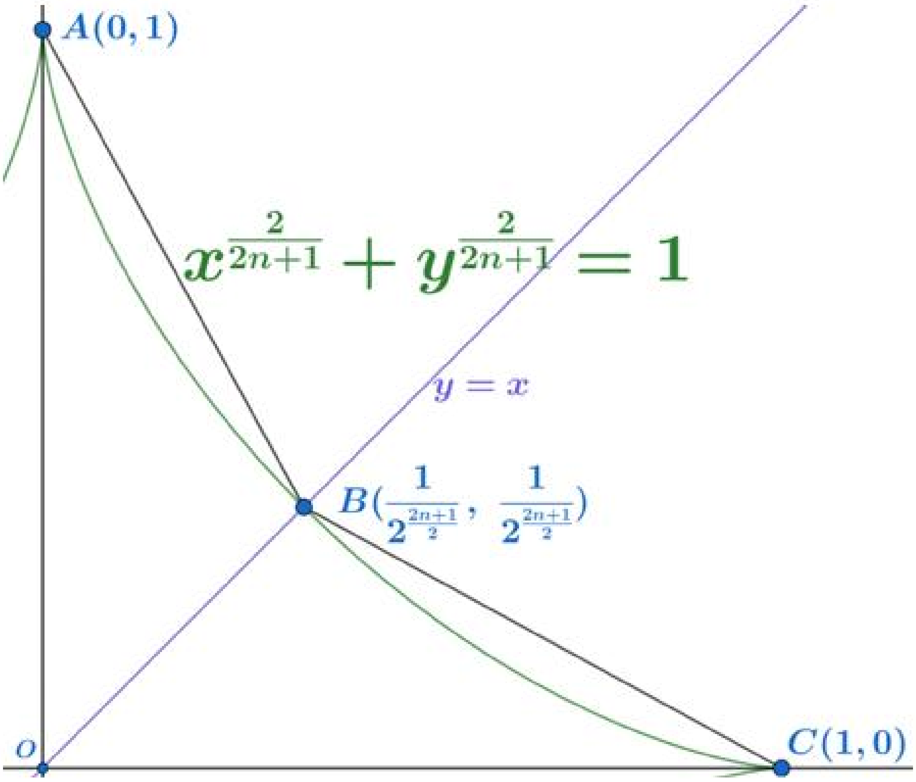
$$L_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$=12\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\cos^2 t\sin t)^2+(\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$=12\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t\cos t|\,dt=6$$

2. $x^{\frac{2}{2n+1}}+y^{\frac{2}{2n+1}}=1$은 제 1, 2, 3, 4분면에서 모두 같은 모양이므로 제 1사분면에서의 길이를 구한 뒤 마지막에 4배를 해준다.

우선 $x^{\frac{2}{2n+1}}+y^{\frac{2}{2n+1}}=1$를 대략적으로 그려주면 fig.53.과 같다.



▲ **fig.53. example solution 183의 그림**

B는 $y=x(x\ge 0)$에서 움직이고, 주어진 곡선이 아래로 볼록이다.

따라서 $\overline{AB}+\overline{BC}<\frac{L_n}{4}<\overline{AO}+\overline{OC}$이다.

즉, $2\times\sqrt{\left(\frac{1}{2^{\frac{2n+1}{2}}}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2^{\frac{2n+1}{2}}}\right)^2}<\frac{L_n}{4}<2$이다.

한편 $\lim_{n\to\infty}2\times\sqrt{\left(\frac{1}{2^{\frac{2n+1}{2}}}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2^{\frac{2n+1}{2}}}\right)^2}=2\times\sqrt{0^2+1^2}=2$이므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}L_n=8$이다.