2019 기대모의고사 Vol.1
수학 나형 <1회> 해설

이 교재의 문제가 포함되어 있는 타 교재 혹은
학원 수업물이 있다면
카카오톡 플러스친구 '기대기대' 제보, 혹은
kidae6150@naver.com 메일 부탁드립니다.
(해설집 표지 2Page 참고)

문제	답	문제	답	문제	답
1	②	11	①	21	②
2	④	12	①	22	3
3	③	13	②	23	13
4	①	14	③	24	10
5	⑤	15	⑤	25	19
6	②	16	④	26	7
7	③	17	①	27	8
8	④	18	②	28	48
9	⑤	19	④	29	20
10	③	20	⑤	30	16

1. $3^{-1}\times 9^2=3^3=27$.

2. $A-B=\{1,2,4,5\}$이므로 $n(A-B)=4$

3. $x'(t)=2$이므로 시각 t에 관계없이 항상 속도는 2이다.

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$.

5. $\lim_{x\to 1-}f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)=1-a$이므로 $-2=-a+1$여야 $x=1$에서 연속이다. 따라서 $a=3$.

6. $x=1,2,3,4,5$를 대입하여 $f(x)$의 치역의 원소들을 모두 구해보면 $a,\ 1+a,\ 2+a,\ 3+a,\ 4+a$이다. 다섯 수가 모두 X에 포함되어야 하므로 $a=1$이어야 한다.

7. 그래프를 통해 $x=0$에서의 우극한은 3, $x=-1$에서의 좌극한은 -1임을 알 수 있다. 따라서 $\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to -1-}f(x)=2$

8. $B^C=\{2,3\}$이므로 $A\cup B^C=A=\{1,2,3\}$이다. 따라서 $(A\cup B^C)^C=\{4,5\}$이므로 원소의 합은 9이다.

9. $\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B)$에서 $1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$,
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$ ($\because$ 독립) 이므로 두 식을 $\mathrm{P}(A)$로 정리해주면 $\left(\mathrm{P}(A)-\frac{1}{2}\right)^2=0$. 따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이다.

10. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 교점은 $(0,0)$, $(3,3)$이고 구간 $[0,3]$에서 $f(x)>g(x)$을 만족시킨다. (그래프를 그려보자.)
따라서 두 함수로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\int_0^3\{f(x)-g(x)\}dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$ 이다.

11. E, Y, E, C, O, N, T, A, C, T에는 E, C, T가 2개씩, Y, O, N, A가 1개씩 있으므로 나열하는 경우의 수는 $\frac{10!}{2!2!2!}$.
이 중 두 개의 E가 모두 이웃한 문자열의 개수는 E 2개를 하나로 본다면 $\frac{9!}{2!2!}$으로 계산할 수 있으므로, $\frac{\frac{9!}{2!2!}}{\frac{10!}{2!2!2!}}=\frac{1}{5}$이다.

12.
$9=5+1+1+1+1$
$=4+2+1+1+1$
$=3+3+1+1+1$
$=3+2+2+1+1$
$=2+2+2+2+1$ 중 1, 2를 포함한 분할은 3가지이다.
(1, 2를 고정해둔 후 자연수 6을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수를 구해도 된다.)

13. $i)$ $w=0$일 때, ${}_3\mathrm{H}_{16}$
$ii)$ $w=1$일 때, ${}_3\mathrm{H}_4$
$iii)$ $w=2$일 때, ${}_3\mathrm{H}_1$ 이므로, ${}_3\mathrm{H}_{16}+{}_3\mathrm{H}_4+{}_3\mathrm{H}_1=171$

14. $S_n=\frac{3n+1}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=3$으로 수렴한다.
즉, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-a_n}{1+a_n}=\frac{3-0}{1+0}=3$이다.

출제자의 한마디
S_n이 주어졌다고 $S_n-S_{n-1}=a_n$을 무조건 구하고 보는 '기계적 풀이'는 지양하자. 문제에서 묻고 있는 것이 무엇인지 정확히 파악한 후, 필요한 정보만으로 문제들을 풀 수 있도록 훈련하는 것이 중요하다.

15. x^2-6x+a는 $x=3$에서 최솟값 $a-9$를 갖는 이차함수 므로

$x \geq 4$에서 x^2-6x+a의 최솟값은 $x=4$ 일 때인 $a-8$이다.

따라서 $a-8 \geq 0$여야 문제의 명제를 만족시키므로 a의 최솟값은 8이다.

16. 정사각형 $AB_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 l이라 하면 선분 AC_2의 길이는 $\sqrt{2}l$이다.

또한 선분 C_2C_1의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이인 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$이고 AC_1의 길이는 $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2}l+\sqrt{10}=3\sqrt{2}$이다. 따라서 $l=3-\sqrt{5}$.

수열 $\{S_n\}$의 첫 번째 항은 정사각형 $AB_1C_1D_1$의 넓이인 9이고 공비는 $\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{14-6\sqrt{5}}{9}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{9}{1-\frac{14-6\sqrt{5}}{9}}=\frac{81}{6\sqrt{5}-5}=\frac{81}{155}(6\sqrt{5}+5)$ 이다.

17. 문제에서 제시된 수열의 귀납적 정의에 의하여
$a_6=2a_3=2(a_1+3)$, $a_8=2a_4=4a_2=8a_1$ 이므로
$a_6+a_8=10a_1+6=26$에서 $a_1=2$.

따라서 $a_{12}=2a_6=4a_3=4(a_1+3)=20$이다.

18. ${}_6C_k=\frac{6!}{(6-k)!\times k!}$이므로 $g(k)=(6-k)!$.

${}_6C_k\times f(k)=-\frac{6!a}{(5-k)!(k-1)!}$이고, $\frac{4!}{(5-k)!(k-1)!}={}_4C_{k-1}$이므로
${}_6C_k\times f(k)=-30a\times{}_4C_{k-1}$임을 알 수 있다.

또한 $k=3$일 때 ${}_4C_{k-1}$이 최댓값 6을 가지므로 $p=3$.
(참고) ${}_4C_{k-1}$이 최대일 때가 $-30a\times{}_4C_{k-1}$가 최소일 때이다.)
${}_6C_3\times f(3)=-180a$이고 이 값이 -10이어야 하므로
이어야 하므로 $a=\frac{1}{18}$. 따라서 $q=\frac{1}{18}$이고 $g\left(\frac{1}{2pq}\right)=g(3)=6$.

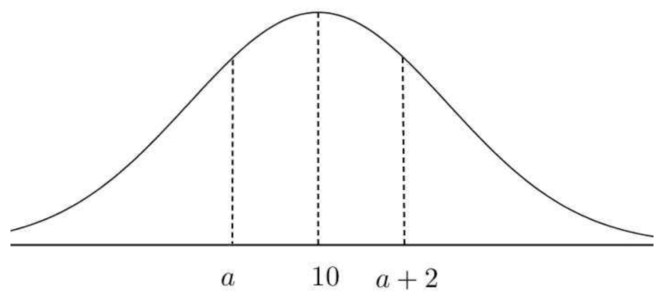
19. $y=\frac{1}{x}$를 x축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 함수는 $y=\frac{1}{x-2}$이다. 따라서 점 P를 $\left(a, \frac{1}{a-2}\right)$로 둘 수 있다.
옮기기 전 함수 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$의 모든 점의 x, y좌표가 항상 양수이므로, 점 P의 x좌표는 2보다 큰 양수이다. 따라서 $a>2$.

사각형 OPH_1H_2의 둘레의 길이는 $2\left(a+\frac{1}{a-2}\right)$로 구할 수 있는데, 식을 변형하여 산술기하평균 부등식을 사용하기 적합한 식으로 만들어보자.
$a+\frac{1}{a-2}=(a-2)+\frac{1}{a-2}+2 \geq 2\sqrt{1}+2=4$
(단, 등호는 $a=3$일 때 성립)

따라서 사각형 OPH_1H_2의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\times 4=8$이다.

20. ㄱ.
$a=6$일 때, $f(14)=P(6 \leq X \leq 14)=2\times P(10 \leq X \leq 14)$
($\because$ 확률변수의 확률밀도함수의 그래프가 평균인 $x=10$에 대하여 대칭이므로) 이고, $P(10 \leq X \leq 14)=P(0 \leq Z \leq 2)=0.4772$
이므로 $f(14)=0.9544$이다. (ㄱ.은 참)

ㄴ.
$f(a+2)=P(a \leq X \leq a+2)$인데, 이 값이 최대일 때는
a와 $a+2$의 평균이 확률변수 X의 평균인 10과 같을 때가 최대이다. 즉, $a=9$일 때이다. (기출에 빈출된 유형이다. 아직도 모르고 있었다면, 아래 그래프로 이해하자.)



이 때의 $f(a+2)=f(11)$의 값을 구해보면
$f(11)=P(9 \leq X \leq 11)=P\left(-\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right)=2\times 0.1915=0.3830$
이다. (ㄴ.도 참)

ㄷ.
확률변수 X의 확률밀도함수와 x축 사이의 부분의 넓이는 1이다.
따라서 $f(x)=P(a \leq X \leq x)$의 값은 x가 커지면 커질수록 큰 값을 가지지만, x가 매우 큰 유한한 숫자 (ex. 10억, 100조 등) 커져도 그 값은 $P(a \leq X)$ 미만임을 알 수 있다.

즉 $P(a \leq X)>0.7$이어야 방정식 $P(a \leq X \leq x)=0.7$의 해가 존재할 수 있으므로, 반대로 $P(a \leq X)<0.7$이면 방정식 $P(a \leq X \leq x)=0.7$의 해가 존재하지 않을 것이다.

$a \geq 10$일 땐 $P(a \leq X \leq x)$의 값이 0.7 이하임이 자명하다.
(10이 평균이므로, 정확히는 0.5 이하이다.)

$a=9$일 때, $P(9 \leq X)=P(-0.5 \leq Z)=0.6915$ 이므로 0.7보다 작은 값을 가진다.
$a=8$일 때, $P(8 \leq X)=P(-1 \leq Z)=0.8413$이므로 0.7보다 큰 값을 가진다.
$1 \leq a \leq 7$인 자연수일 때는 모든 $P(a \leq X)$ 값들이 $P(8 \leq X)$값인 0.8413보다 크기 때문에, 자명하게 0.7보다 큰 값을 가진다.

종합하면 $a \ge 9$인 자연수일 때 방정식 $f(x)=0.7$의 해가 존재하지 않는다. (ㄷ.도 참.)

21. $f(x)$는 직선 $x=2m$에 대하여 대칭인 함수이다.

$f(4m)$의 값이 1보다 작다고 가정해보자. (귀류법의 시작)

A_1과 B_{4m-1}을 비교해보면
(cf. 이 둘을 비교하는 이유는 1과 $4m-1$의 평균이 $2m$이고, $f(x)$가 $x=2m$에 대하여 대칭이기 때문이다.)

$a>1$이고 문제의 조건을 만족시키는 점 P의 x좌표가 될 수 있는 값은 2부터 $4m-1$ 까지다. ($\because f(4m)$의 값이 1보다 작으므로 P($4m$, 자연수)인 P가 존재할 수 없기 때문에.)

또한 $a<4m-1$이고 문제의 조건을 만족시키는 점 P의 x좌표가 될 수 있는 값은 마찬가지로 1부터 $4m-2$ 까지다.
따라서 $A_1=B_{4m-1}$이다.
마찬가지로 $A_2=B_{4m-2}$, $A_3=B_{4m-3}$, $\cdots$, $A_k=B_{4m-k}$임을 알 수 있어서 $f(4m)$의 값이 1보다 작다고 가정하면
$\sum_{n=1}^{2m}A_n=\sum_{n=2m}^{4m-1}B_n$가 되어서 모순이다.

그렇다면 가정이 잘못된 것인데, 과연 $f(4m)$의 값이 1 이상이라면 $\sum_{n=1}^{2m}A_n>\sum_{n=2m}^{4m-1}B_n$을 만족할까?

$a<4m-1$이고 문제의 조건을 만족시키는 점 P의 x좌표가 될 수 있는 값은 여전히 1부터 $4m-2$ 까지인 반면

$a>1$이고 문제의 조건을 만족시키는 점 P의 x좌표가 될 수 있는 값은 2부터 최소 $4m$ 까지다. 따라서 $A_1>B_{4m-1}$.

마찬가지로
$A_2>B_{4m-2}$, $A_3>B_{4m-3}$, $\cdots$, $A_{2m-1}>B_{2m+1}$, $A_{2m}=B_{2m}$
이므로 결국 $\sum_{n=1}^{2m}A_n>\sum_{n=2m}^{4m-1}B_n$가 되기 위해선 $f(4m)\ge 1$임을 알 수 있다.

$f(4m)=\dfrac{30}{2m}\ge 1$로부터 $15\ge m$이므로 m의 최댓값은 15이다.

출제자의 한마디
그래프가 어떤 점, 어떤 직선에 대하여 대칭인지 파악하는 것은 단원을 불문하고 중요한 관찰이다.

22. $\log_3 54-\log_9 4=\log_3\dfrac{54}{2}=3$이다.

23. $\mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=6$, $\mathrm{V}(2X)=4\mathrm{V}(X)=36$이므로
$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=9+2^2=13$.

24. 세 수 a_1, a_3, a_5도 등차수열을 이루므로
$a_1+a_3+a_5=3a_3=9$이고, $a_3=3$임을 알 수 있다.
따라서 $a_4=4$이고, 공차 d는 $a_4-a_3=1$임을 알 수 있다.
따라서 $a_{10}=a_3+7d=10$임을 알 수 있다.

25. m이 홀수이면 $y=x^m$의 그래프는 원점대칭,
m이 짝수이면 $y=x^m$의 그래프는 y축 대칭이므로
$\int_{-1}^{1}x^m dx=0$을 만족시키려면 m은 홀수여야 한다.
5번째 홀수가 9이며, 이 값이 n 이하의 최대의 홀수여야 하므로 가능한 값은 $n=9$, $n=10$이다. 따라서 정답은 19.

26. i) A, B가 검정색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 나머지 검정색 볼펜을 받게 하고, 나머지 3명 중 1명을 골라 파랑색 볼펜을 받게 하면 나머지 2명은 자연스럽게 빨강색 볼펜을 받게 된다.
이 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=12$

i)A, B가 빨강색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 파랑색 볼펜을 받게 하면 나머지 3명은 자연스럽게 검정색 볼펜을 받게 된다.
이 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

따라서 $\dfrac{12}{12+4}=\dfrac{3}{4}$이다.

27. (해설에 앞서)
극대와 극소인 점에서 반드시 미분가능이거나 연속일 필요가 없다.

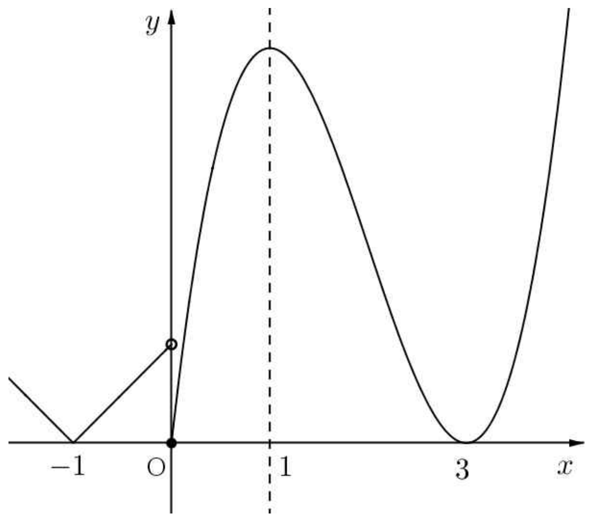
(더 깊게 파고들면, 굳이 그 점에서 연속인 필요조차 없다.
자세한 내용은 orbi.kr/00011507827 칼럼을 읽어보도록 하자.)

극댓값의 정의는 '$x=a$를 포함하는 어떤 개구간에 대하여 그 개구간 내의 모든 원소 x들에 대하여 $f(x)<f(a)$을 만족하면 $f(a)$는 $f(x)$의 극댓값' 이고

극솟값의 정의는 '$x=a$를 포함하는 어떤 개구간에 대하여 그 개구간 내의 모든 원소 x들에 대하여 $f(x)>f(a)$을 만족하면 $f(a)$는 $f(x)$의 극솟값' 라고 **교과서에 나와있다.**

(해설)

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



극대, 극소의 정의에 의하여

$x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=3$에서 각각 극소, 극소, 극대, 극소임을 알 수 있다.

따라서 $m=1,\ n=3$이므로 $5m+n=8$ 이다.

28. 등비수열의 공비를 r이라 하자.

$a_2\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{4}{a_3}\right)=4$에서 $a_2=a_1r=\dfrac{a_3}{r}$이므로 $r+\dfrac{4}{r}=4 \Leftrightarrow$ $r^2-4r+4=0$이다. 따라서 $r=2$.

$i)$ 평범한 전개

$S_6+S_3=\dfrac{a_1(1-r^6)+a_1(1-r^3)}{1-r}=70a_1$이므로 $a_1=\dfrac{60}{70}=\dfrac{6}{7}$이다.

따라서 $a_4+a_5+a_6=\dfrac{6}{7}\times(2^3+2^4+2^5)=48$이다.

$ii)$ 식의 형태에 집중한 방법

$S_6+S_3=60$에서 약간의 관찰을 해보자.

$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$인데, $\dfrac{a_4}{a_1}=\dfrac{a_5}{a_2}=\dfrac{a_6}{a_3}=r^3=8$이므로

$S_6=(a_1+a_2+a_3)+8(a_1+a_2+a_3)=9S_3$임을 알 수 있다.

즉, $S_6+S_3=10S_3=60$에서 $S_3=6$임과 $S_6=9S_3=54$임을 알 수 있다.
문제에서 묻는 것은 $a_4+a_5+a_6$, 즉 S_6-S_3이므로 정답은 $54-6=48$이다.

출제자의 한마디
등차수열, 등비수열 문제는 대부분 특정 형태를 띠고 있는 경우가 대다수이다. 그 형태에 유의해서 문제에 접근을 한다면 훨씬 다양한 풀이가 가능하다.

29. (가)조건을 보면 $(x-1)f'(1)\le 0$, $(x-2)^2f'(2)\le 0$, $(x-3)^3f'(3)\le 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.
$(x-1)f'(1)\le 0$와 $(x-3)^3f'(3)\le 0$를 봐보자.
$(x-1)f'(1)\le 0$를 보면, $x=1$의 좌, 우에서 $(x-1)$의 부호가 바뀜을 알 수 있다.
($x>1$일 때는 $x-1>0$이고, $x<1$일 때는 $x-1<0$이다.)
하지만 $f'(1)$은 상수이기 때문에, $f'(1)$이 0이 아니라고 가정하면, $x=1$의 좌, 우 근방에서 $(x-1)f'(1)$의 부호가 바뀐다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)f'(1)\le 0$를 만족한다는 조건을 충족시키지 못한다.
이는 $f'(1)$이 0이 아니라고 가정한 것이 잘못된 것이다.
따라서 $f'(1)=0$이다. (귀류법을 사용)
(참고 : 혹은, $x=0,\ x=2$를 $(x-1)f'(1)\le 0$에 대입하여 $f'(1)\ge 0$, $f'(1)\le 0$를 얻음으로써 $f'(1)=0$임을 알아도 무방하다. 하지만 이 해설 역시 $x=1$를 기준으로 좌, 우의 x값을 잡아줘야 된다는 점에서 위의 풀이와 비슷하다.)

마찬가지로 $(x-3)^3f'(3)\le 0$에서 $(x-3)^3$의 부호가 $x=3$의 좌, 우에서 부호변화가 생기므로, 위의 논리와 똑같이 설명하면 $f'(3)=0$임을 알 수 있다.
위에서 구한 두 조건 $f'(1)=f'(3)=0$에서 $f'(x)=0$은 두 근 $1,\ 3$을 갖는 삼차방정식 이므로 $f'(x)=k(x-1)(x-3)(x-a)$
(단, k는 $f'(x)$의 최고차항의 계수이고, a는 상수)
로 둘 수 있다.

$(x-2)^2f'(2)\le 0$에서는 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)^2$의 부호가 음수인 경우가 없기 때문에, 저 부등식이 항상 성립하기 위해서는 $f'(2)\le 0$여야 한다.
$f'(2)=k\times 1\times(-1)\times(2-a)=k(a-2)$ 이므로
$k>0$일 때, $a\le 2$이고 $k<0$일 때, $a\ge 2$임을 알 수 있다.

이제 (나)조건을 봐보자.
$f(x)$의 극대 또는 극소인 점은 오직 하나이기 위해선 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 어떤 x가 오직 하나만 존재해야 한다.

a가 1이나 3이 아닌 다른 숫자라고 가정해보자. 그러면 $f'(x)=0$는 서로 다른 실근을 3개를 가지는 삼차방정식이 된다.
즉, $x=1,\ 3,\ a$일 때 x의 좌, 우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌게 되므로, $f(x)$가 극값을 3개 가지게 된다.
이는 (나)조건에 모순. 따라서 귀류법에 의하여 a는 1이나 3이어야 한다.

$i)k>0$ 일 때,
$a\le 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는

1뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)^2(x-3)$.

$f'(2)=-k$, $f'(0)=-3k$이므로 $\dfrac{f'(2)}{f'(0)}=\dfrac{1}{3}$이다.

$ii)\, k<0$ 일 때,

$a\geq 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는 3뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)(x-3)^2$.

$f'(2)=k$, $f'(0)=-9k$이므로 $\dfrac{f'(2)}{f'(0)}=-\dfrac{1}{9}$

$i), ii)$에 의하여 $\dfrac{f'(2)}{f'(0)}$의 값이 될 수 있는 값은 $\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{9}$이다.

따라서 $90(\alpha+\beta)=20$이다.

30. 사고가 복잡한 문제이기 때문에 밑줄 쳐진 부분이 이해가 되었다면 알아보기 쉽도록 그 부분에 동그라미를 쳐놓자.

우선 함수 $h(x)$가 연속함수이므로 $f(0)=g(0)$을 만족해야 한다.

(가) 조건에서 $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{h(t)}{t^2}=1$을 통해 $g(x)$의 차수는 이차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

또한 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t^3}=1$을 통해 $f(x)$의 차수는 삼차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

이제 (나) 조건을 봐보면, $x\neq 0$인 모든 실수 x에서

$\displaystyle\lim_{t\to 0}h'(x-t)=h'(x)$, $\displaystyle\lim_{t\to 0}h'(x+t)=h'(x)$이므로

($\because x\neq 0$인 모든 실수 x에서 $h'(x)$는 다항함수이고, 연속이기 때문에 극한값=함숫값이 성립한다!)

$\displaystyle\lim_{t\to 0}h'(x-t)h'(x+t)=\{h'(x)\}^2$임을 알 수 있다.

그런데 (나) 조건의 집합의 원소가 $-1, 1$ 뿐이므로

$h'(-1)=h'(1)=0$임을 알 수 있다.

(★다른 x에서는 $h'(x)\neq 0$이다.★)

이제 $x=0$일 때를 고려해줘야 하는데, $x=0$일 때

$\displaystyle\lim_{t\to 0}h'(x-t)h'(x+t)=\lim_{t\to 0}h'(-t)h'(t)$는 t에 $-t$를 대입해도 같은 식이기 때문에 $t\to 0+$일 때만 따져주면 된다.

$(\displaystyle\lim_{t\to 0}h'(-t)h'(t)=\lim_{t\to 0+}h'(-t)h'(t))$

$\displaystyle\lim_{t\to 0+}h'(-t)=g'(0)$, $\displaystyle\lim_{t\to 0+}h'(+t)=f'(0)$이므로 $f'(0)g'(0)>0$임을 알 수 있다. ($\because$ 0은 (나) 조건의 집합의 원소가 아니므로)

$x<0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$이고

$h'(-1)=g'(-1)=0$이므로 $g(x)=(x+1)^2+a$ 꼴이다.

또한 $g'(0)=2$이므로 $g'(0)>0$이다. 따라서 $f'(0)>0$

($\because f'(0)g'(0)>0$)

$x\geq 0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$이고 $f'(0)>0$, $f'(1)=0$이다.

만약 $f(x)$가 $x=1$에서 극대 혹은 극소를 갖는다고 가정해보자.

$f(x)$가 $x=1$에서 극대를 갖는다면, $x_2>1$인 어떤 x_2에서 극소를 가질 것이고, $f'(x_2)=0$을 만족시킨다.

($\because$최고차항의 계수가 양수인 모든 삼차함수에 대하여 극대, 극소인 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 항상 $x_1<x_2$이다.)

(삼차함수 개형을 떠올려보세요.)

이는 $-1, 1$을 제외한 다른 x에서는 $h'(x)\neq 0$이다. 라는 (나)조건에 모순이다.

또한 $f(x)$가 $x=1$에서 극소를 갖는다면 $f'(0)>0$이란 조건에 모순이다. (위에처럼 (나)조건에 의해 모순이 생긴다.)

따라서 $f'(1)=0$이지만 $x=1$에서 $f(x)$는 극대도 극소도 아니다. 즉 $f'(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축과 만나지만 부호변화는 없는 함수여야하고, 따라서 $f'(x)=3(x-1)^2$임을 알 수 있다.

적분하면 $f(x)=(x-1)^3+b$임을 알 수 있다.

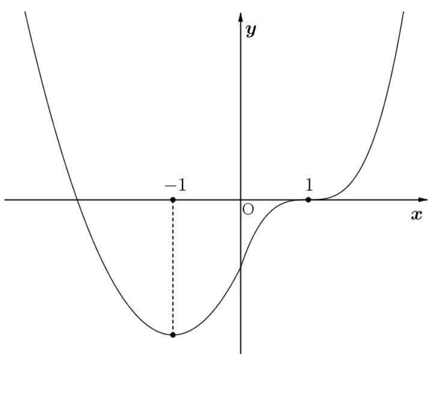
위에서 구한 사실들과 문제에서 사용하지 않은 조건을 종합하면 다음과 같다.

1. $f(0)=g(0)$
2. $f(x)=(x-1)^3+b$
3. $g(x)=(x+1)^2+a$
4. $h(0)<0$, $y=|h(x)|$가 두 점에서 미분가능하지 않다.

우선 $f(0)=g(0)$이므로 $1+a=-1+b$에서 $a=b-2$ 이다.

또한 $f'(0)=3$, $g'(0)=2$이므로 $f'(0)\neq g'(0)$이라서 a, b값에 관계없이 $x=0$에서 함수 $y=|h(x)|$는 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

1.~4.의 조건을 만족시키도록 $y=h(x)$그래프를 그리면 다음과 같다.

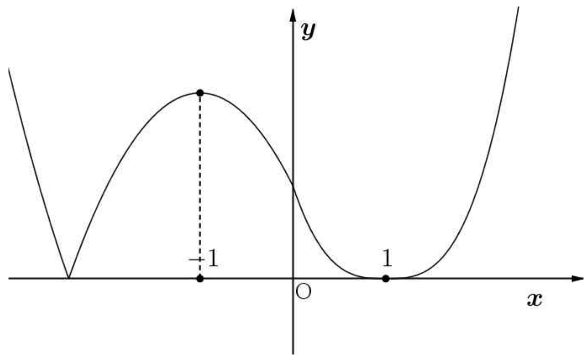


$h(1)$이 0이 아닌 다른 값이라면, $y=|h(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.

($y=|h(x)|$와 x축 사이의 두 교점과 $(0, h(0))$으로 총 3개다. 이는 $h(0)<0$을 만족시키도록 x축을 그림과 다른 위치에 그려보면서 확인해보도록 하자.)

$h(1)=f(1)=0$이므로 이차함수 $g(x)$와 x축이 만나는 점에서
$y=|h(x)|$가 미분가능하지 않지만
$x=1$에서 삼차함수 $f(x)$가 x축에 접해져있기 때문에
$y=|h(x)|$가 미분가능하게 된다.

<참고그림 : $y=|h(x)|$>



따라서 $f(1)=0$으로부터 $b=0$이므로 $a=b-2=-2$이다.

종합하면 $f(x)=(x-1)^3$, $g(x)=(x+1)^2-2$이므로
$h(3)h(-3)=f(3)g(-3)=8\times 2=16$이다.

1회 예상 등급컷, 난이도 탑 3			
등급컷	원점수	난이도 Top	문제번호
1등급	88	1위	30번 ★
2등급	80	2위	21번
3등급	70	3위	29번

★ Warning ★

- 위 자료는 저자 및 검토진들의 주관적인 생각과 경험을 근거로 예상한 자료이므로 '참고'만 하세요.
- 예상 등급컷은 11월 기준입니다.
  (8 ~ 10월에는 체감상 어렵게 느껴질 수 있습니다.)