

[이주영/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사 연습 |

| 이주영

이투스 온라인, 목동 예שמ학원

너네 자랑하고 싶은 거 있으면 얼마든지 해 난 괜찮어

왜냐면 나는 부럽지가 않아

이 모의고사 하나면 한 개도 부럽지가 않아 어?

| 한성은

5A ACADEMY

올해도 다 갔네요.

hansungeun.com/texta.html - 공개 자료 페이지.

smartstore.naver.com/hansungeun - 책 파는 데.

유튜브 한성은 / 인스타 hansungeun2

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.

- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역

1

5지선다형

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)x$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

2. $\sin \frac{\pi}{3} \times \cos \frac{\pi}{6}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

3. 방정식 $3^{x+2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-4}$ 을 만족시키는 실수

x 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = ax^2 + 6x, \quad f(0) = f(1)$$

을 만족시킬 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

5. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^6 (k+1)a_k = 20, \quad \sum_{k=1}^6 k(a_k+1) = 30$$

일 때, $\sum_{k=1}^6 a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 13 ③ 15
 ④ 17 ⑤ 19

6. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2$ 의 극댓값과 극솟값의 차이가 4일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
 ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

7. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식

$$|3\sin 2x - 1| = 2$$

의 모든 해의 합은? [3점]

- ① $\frac{9\pi}{2}$ ② 5π ③ $\frac{11\pi}{2}$
 ④ 6π ⑤ $\frac{13\pi}{2}$

8. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & (x \leq 1) \\ x-a & (x > 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(x-b)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, ab 의 값을 구하여라. (단 a, b 는 양수이다.)

[3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

9. 곡선 $y = \log_2(ax)$ 가 두 직선 $x+y=5$, $x+y=8$ 과

만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB} = \sqrt{5}$ 이고 직선 AB의 기울기가 1보다 작을 때, 양수 a 의 값은? [4점]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

10. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$S_{10}S_{11} \leq 0, \quad S_{11}S_{12} \leq 0$$

이고 S_n 의 최댓값이 60일 때, a_1 의 값은? [4점]

- ① 18 ② 20 ③ 22
 ④ 24 ⑤ 26

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 속도 $v(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq t \leq 4$ 일 때 $v(t) = (t-1)(t-3)$ 이다.
 (나) $0 \leq t$ 일 때 $v(t) = v(t+4)$ 이다.

시간 $t=0$ 에서 $t=12$ 까지 점 P의 위치의 변화량을 a , 점 P가 움직인 거리를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
 ④ 16 ⑤ 18

12. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{f(x)} - x^2}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = 2$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
 ④ 16 ⑤ 18

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n \geq 0) \\ 2 - 2a_n & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 + a_5 = 2$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [4점]

- ① 3 ② 5 ③ 7
 ④ 9 ⑤ 11

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(1) = 1$
 (나) $\{x \mid f(x) \leq |x|\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

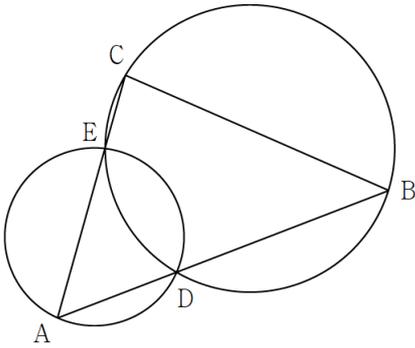
$f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 25 ② 27 ③ 29
 ④ 31 ⑤ 33

15. 예각삼각형 ABC와 선분 AB 위의 점 D, 선분 AC 위의 점 E에 대하여

$$\overline{AD}=5, \quad \overline{BD}=9, \quad \angle ABC = \frac{\pi}{4}$$

이고, 세 점 A, D, E를 지나는 원의 넓이와 네 점 D, B, C, E를 지나는 원의 넓이의 비가 5:13일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]



- ① 49 ② 56 ③ 63
- ④ 70 ⑤ 77

단답형

16. $\int_{-2}^2 (4x^3 + 3x^2 + 2x)dx$ 의 값을 구하여라. [3점]

17. $0 < x < y$ 인 두 실수 x, y 에 대하여

$$\log_2 x^2 y = 0, \quad \log_2 x \times \log_2 y = -8$$

일 때, xy^2 의 값을 구하여라. [3점]

18. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 4}{x - 2} = 8$$

를 만족시킬 때, $f'(2)$ 의 값을 구하여라. [3점]

19. 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^6 a_n = 42, \quad \sum_{n=1}^6 |a_n| = 126$$

을 만족시킨다. $|a_1 a_6|$ 의 값을 구하여라. [3점]

20. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad f(x) = 3g(x) + 6x$$

$$(나) \quad \int_2^x f(t) dt = xg(x)$$

$f(3)$ 의 값을 구하여라. [4점]

21. 두 함수 $f(x) = 2^x$, $g(x) = a - f(b-x)$ 와
실수 t 에 대하여 방정식

$$(f(x)-t)(g(x)-t) = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자.

함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 모든 k 의 값을
작은 수부터 크기순으로 나열한 것이

$$0, 2, 8, c$$

일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. [4점]

22. 최고차항의 계수가 양수 k 인 사차함수 $f(x)$ 와
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가
모든 실수 x 에 대하여

$$|x^2 - 2x|g(x) = (x^2 - 2x)\{|f(x)| - 4\}$$

를 만족시킨다. $f(0)f(2) > 0$ 이고

$$\{a, a+4\} = \{t \mid \text{함수 } g(x) \text{가 } x=t \text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

일 때, $9(k-a)$ 의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

일 때, $P(B|A)$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

24. 다항식 $(x^2+x)(x+1)^6$ 의 전개식에서

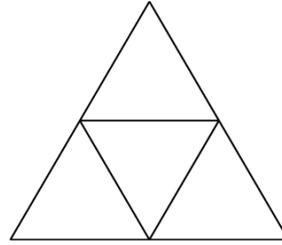
x^5 의 계수는? [3점]

- ① 26 ② 29 ③ 32
④ 35 ⑤ 38

25. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명이 있다. 이 6명을 일렬로 임의로 일렬로 나열할 때, 같은 학년의 학생끼리는 모두 이웃할 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$
- ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

26. 그림과 같이 정삼각형과 삼각형의 세 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형으로 만들어지는 4개의 영역에 서로 다른 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠하고 이웃한 영역에는 서로 다른 색을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



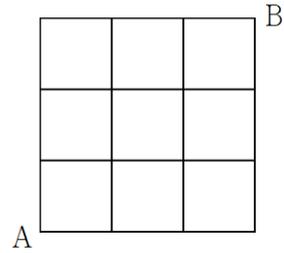
- ① 36 ② 38 ③ 40
- ④ 42 ⑤ 44

27. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

$$f(1) \leq f(2) \text{ 이거나 } f(3) \leq f(4) \text{ 이다.}$$

- ① $\frac{15}{16}$ ② $\frac{55}{64}$ ③ $\frac{25}{32}$
 ④ $\frac{45}{64}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

28. 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 갑은 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경로 중 하나를 임의로 선택하여 이동하고, 을은 B지점에서 출발하여 A지점까지 최단거리로 가는 경로 중 하나를 임의로 선택하여 이동한다. 갑과 을이 동시에 출발하고 둘의 속력이 서로 같을 때, 갑과 을이 이동 중에 서로 만날 확률은? [4점]



- ① $\frac{19}{50}$ ② $\frac{79}{200}$ ③ $\frac{41}{100}$
 ④ $\frac{85}{200}$ ⑤ $\frac{11}{25}$

단답형

29. 파란색 공 1개, 빨간색 공 1개, 흰색 공 6개가 있다. 이 8개의 공 중에서 6개를 선택하여 다음 조건을 만족시키도록 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하여라. (단, 흰색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 하나도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

- (가) 파란색 공을 받은 학생이 받은 흰색 공의 개수는 1 이하이다.
 (나) 빨간색 공을 받은 학생이 받은 흰색 공의 개수는 1 이상이다.

30. 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4 라 하자. $a_1 a_2 a_3 a_4$ 가 6의 배수일 때, $a_1 a_2 a_3$ 가 6의 배수일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n + \sqrt{n^2+1}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

24. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax-b}{\ln x} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, ab 의 값은?
(단, a 와 b 는 상수이다.) [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

25. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_{2n} = 2a_{2n-1}$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 18, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} = 4$$

를 만족시킨다. a_1 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

26. 함수 $e^x(x^2+4x+a)$ 의 극값이 존재하지 않도록
 하는 실수 a 의 최솟값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

27. 양수 t 에 대하여 $x \geq 0$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = txe^x$$

의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $h(t) = g(1)$ 이라 하자.

$h(\alpha) = 2$ 일 때, $\alpha \times h'(\alpha)$ 의 값은? [3점]

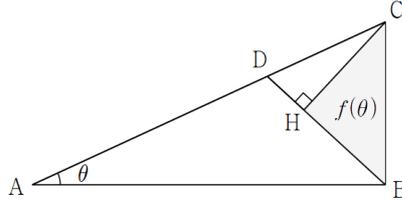
- ① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ -1
 ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle A = \theta$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형이

있다. 선분 AC를 2:1로 내분하는 점을 D, 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형

BCH의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

단답형

29. 좌표평면에서 점 P_1 은 $(1, 1)$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 점 P_n 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점 P_n 은 곡선 $y = x^2$ 위의 점이다.
- (나) 직선 $P_{2n-1}P_{2n}$ 의 기울기는 -1 이다.
- (다) 직선 $P_{2n}P_{2n+1}$ 사이의 기울기는 1 이다.

곡선 $y = x^2$ 및 두 선분 $P_{2n-1}P_{2n}$, $P_{2n}P_{2n+1}$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \sum_{k=1}^n S_k = b \quad (b \neq 0)$$

이다. ab 의 값을 구하여라. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = |x|e^{-kx} \quad (k > 0)$$

에 대하여 $h(x) = g(f(x))$ 이다. 함수 $h(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이

$$0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

라 할 때, $h(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) \times h(-x)}{x^2} = 81$$

$$(나) h(\alpha_1) - h(\alpha_2) \geq \frac{1}{ke}$$

$k \times \alpha_3 \times f(8)$ 의 값을 구하여라. [4점]

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(3, 0)$, $\vec{b}=(1, -1)$ 에 대하여
 $|\vec{a}-2\vec{b}|$ 의 값은? [2점]

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

24. 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 에 접하는 기울기 2인 직선의

y 절편 중 양수인 것은? [3점]

- ① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

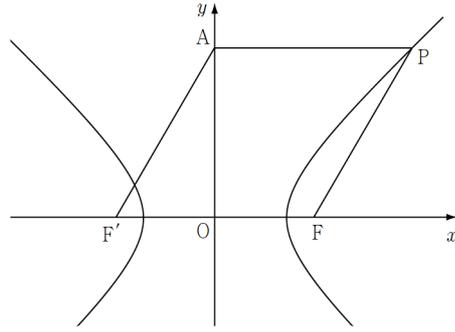
25. 좌표평면 위의 두 점 A(2, 0), B(0, 4)에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$
- (나) $|\vec{PA}| = |\vec{PB}|$

$|\vec{OP}|$ 의 값을 a 라 할 때, 모든 a 의 값의 곱은?
(단, O는 원점이다.) [3점]

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

26. 그림과 같이 두 점 $F(c, 0), F'(-c, 0)(c > 0)$ 을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2\sqrt{3}} = 1$ 이 있다. y 축 위의 점 A와 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 사각형 $F'APF$ 가 마름모일 때, a^2 의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

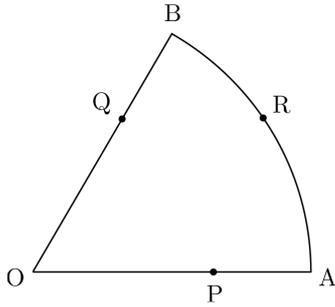


- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 세 점 P, Q, R은 각각 선분 OA, 선분 OB, 호 AB 위를 움직일 때,

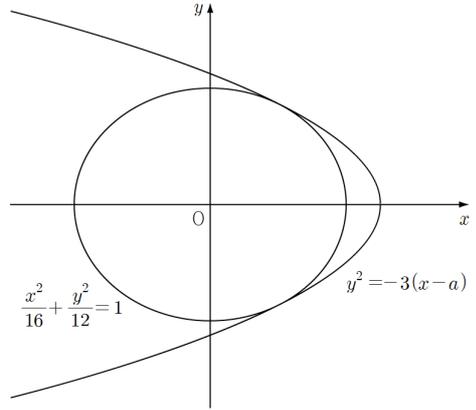
$$\vec{OX} = \frac{1}{2}\vec{OP} + \vec{OQ} + \frac{1}{2}\vec{OR}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이는? [3점]



- ① $2\sqrt{3}$ ② $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
- ④ $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

28. 그림과 같이 포물선 $y^2 = -3(x-a)$ 와 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만난다. a 의 값은? (단, $a > 4$ 이다.) [4점]



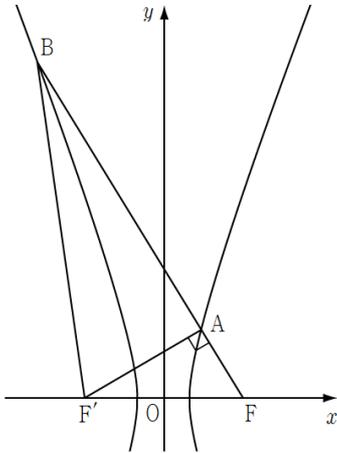
- ① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$
- ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6

단답형

29. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{15} = 1$ 과 점 F 을 지나는 직선 l 이 두 점 A, B 에서 만난다.

$$\angle F'AF = \frac{\pi}{2}, \quad 5\overline{FA} = \overline{FB}$$

일 때, \overline{AB} 의 값을 구하여라. [4점]



30. 좌표평면에서 점 $A(3, 3)$ 과 두 점 P, Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{OP}| = 2, \overrightarrow{OP} \cdot (1, 0) \geq 0$
 (나) $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}| = 1, |\overrightarrow{OQ}| \leq 5$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M^2 + m^2$ 의 값을 구하여라. [4점]

[이주영/한성은 모의고사 6월 연습 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	③	03	②	04	①	05	①
06	②	07	⑤	08	⑤	09	③	10	②
11	④	12	①	13	④	14	⑤	15	②
16	16	17	64	18	3	19	128	20	45
21	24	22	13						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	③	24	④	25	①	26	⑤	27	②
28	③	29	160	30	591				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	③	24	①	25	②	26	⑤	27	④
28	③	29	16	30	200				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	⑤	25	③	26	④	27	②
28	②	29	12	30	164				

COMMENT 09

점 A를 x 축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이 점 B이다.
이는 로그의 그래프와는 무관하다.

COMMENT 11

$$a = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$$

$$b = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$$

COMMENT 12

$f(x) = x^4 + ax^3 + \dots$ 인 각이다.

$$\frac{\sqrt{f(x)} - x^2}{x} = \frac{f(x) - x^4}{x\{\sqrt{f(x)} + x^2\}} = \frac{ax^3 + \dots}{x\sqrt{x^4 + \dots + x^3}}$$

는 $\frac{a}{2}$ 로 수렴하므로 $a = 4$ 이다.

$f(0) = 0$ 인 각이다. $f(x) = \dots + bx$ 라 하면

$$\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\dots + bx} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\dots + b} - 1}{x}$$

이므로 $b = 1$ 인 각이다. $f(x) = \dots + cx^2 + x$ 라 하면

$$\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\dots + cx + 1} - 1}{x} = \frac{\dots + c}{\sqrt{\dots + 1} + 1}$$

은 $\frac{c}{2}$ 로 수렴하므로 $c = 4$ 이다. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x$ 이다.

COMMENT 13

$a_3 = a$ 라 하자. a_4 의 값은 $a - 2$ 또는 $2 - 2a$ 이고 a_5 의 값은 $a - 4$ 또는 $4 - 2a$ 또는 $-2a$ 또는 $4a - 2$ 이다.
(불가능한 경우가 있더라도 일단 계산 때리고 나중에 조건에 맞는지 체크하는 것이 편하다.)

$$a + (a - 4) = 2, \quad a + (4 - 2a) = 2, \quad a + (-2a) = 2, \quad 2 + (4a - 2) = 2$$

에서 a 의 값은 각각 3, 2, -2, $\frac{1}{2}$ 이고 이 중 조건을 만족시키는 것은 3과 -2이다.

잘 거슬러 올라가보면 a_1 의 값으로 가능한 수는 7, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, 2이다.

COMMENT 14

두 함수 $y = f(x)$, $y = |x|$ 의 그래프가 두 점 $(-1, 1)$, $(1, 1)$ 에서 만나야 한다.

$f(-1) = 1$, $f(1) = 1$ 이고 $f(x) = x$ 가 $x = 1$ 을 삼중근으로 가져야 한다.

$$f(x) = (x-1)^3(x-a) + x \text{에서 } f(-1) = 1 \text{을 없애주면, } a = -\frac{3}{4} \text{이다. } f(x) = (x-1)^3\left(x + \frac{3}{4}\right) + x \text{이다.}$$

COMMENT 15

$\angle CAB = \theta$ 라 하자. 원에 내접하는 사각형에서 $\angle AED = \frac{\pi}{4}$ 이다.

삼각형 ADE에서 사인법칙을 돌리면 $\overline{DE} = 5\sqrt{2} \sin\theta$ 이고, 작은 원의 반지름의 길이는 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이다.

넓이 비에서 큰 원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{130}}{2}$ 이고 $\overline{CD} = \sqrt{65}$ 이다.

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 돌리면 $\overline{BC} = 8\sqrt{2}$ 이다.

COMMENT 20

$$\int_2^x \{3g(t) + 6t\} dt = xg(x)$$

에서 $g(2) = 0$ 이고 미분하여 $2g(x) + 6x = xg'(x)$ 에서 $g(x) = ax^n + \dots$ 라 하면 $n = 2$ 이다.
 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 로 두고 다시 대입하면 $g(x) = ax^2 - 6x$ 이다. $g(2) = 0$ 이므로 $g(x) = 3x^2 - 6x$ 이다.

COMMENT 21

$y = g(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 $(\frac{b}{2}, \frac{a}{2})$ 에 대하여 점대칭 시킨 것이다.

$h(t)$ 가 불연속이 뜰 때는 두 그래프가 만날 때거나 t 값이 점근선의 y 값일 때다.
 두 함수의 그래프를 쟁려보면 $f(1) = g(1) = 2$, $f(3) = g(3) = 8$, $a = c$ 임을 알 수 있다.

두 점 $(1, 2)$, $(3, 8)$ 이 점 $(\frac{b}{2}, \frac{a}{2})$ 에 대하여 대칭이므로 $b = 4$, $a = 10$ 이다.

COMMENT 22

$x^2 - 2x$ 의 부호를 고려하면,

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)| - 4 & (x < 0 \text{ 또는 } 2 \leq x) \\ -|f(x)| + 4 & (0 \leq x < 2) \end{cases}$$

이다. $g(x)$ 가 연속이려면 $|f(0)| = |f(2)| = 4$ 이다.

이 때, $f'(0) \neq 0$ 이면 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않고,

$f'(2) \neq 0$ 이면 $g(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 값이 2개이고 간격이 4이므로

$$\{a, a + 4\} \neq \{0, 2\}$$

이다. 따라서 $f'(0) = 0$ 또는 $f'(2) = 0$ 이다.

$f'(0) = 0$ 과 $f'(2) = 0$ 중에서 하나만을 만족시킬 때, 나머지 미분불가능한 x 값은
 함수 $|f(x)|$ 가 미분불가능할 때이다. 이 때는 하나가 아니라 2개가 더 떠서 모순이다.

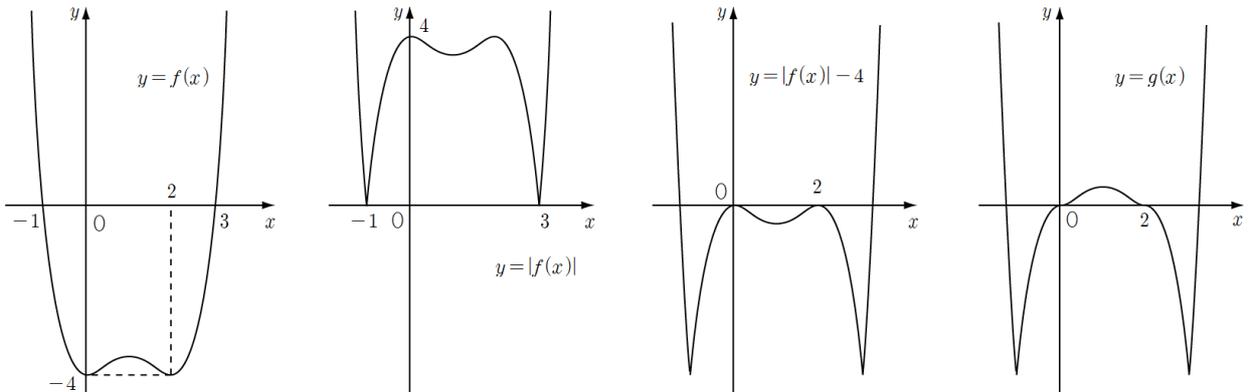
* 방정식 $f(x) = 0$ 이 삼중근을 갖는 모양은 $f(0)f(2) > 0$ 를 만족시킬 수 없다.

따라서 $f'(0) = f'(2) = 0$ 이다. 개형을 따져보면

$$f(x) = kx^2(x-2)^2 - 4$$

만 남는다. a 와 $a + 4$ 는 $f(x) = 0$ 의 근이므로 $a = -1$ 이고 $k = \frac{4}{9}$ 이다.

* 헛갈리라고 낸 문항이다. 아래 그래프들을 살펴보자.



COMMENT 확률과 통계 29

Case1) 흰 공 6개 선택 : ${}_3H_6 = 28$

Case2) 파란 공 1개, 흰 공 5개 선택 : $3 \times ({}_2H_5 + {}_2H_4) = 33$

Case3) 빨간 공 1개, 흰 공 5개 선택 : $3 \times {}_3H_4 = 45$

Case4) 파란 공 1개, 빨간 공 1개, 흰 공 4개 선택

Case4-1) 파란 공과 빨간 공을 같은 학생에게 : $3 \times {}_2H_3 = 12$

Case4-1) 파란 공과 빨간 공을 다른 학생에게 : $3 \times 2 \times ({}_2H_3 + {}_2H_2) = 42$

COMMENT 확률과 통계 30

$a_1 a_2 a_3$ 를 살펴보면,

① $a_1 a_2 a_3$ 가 2의 배수가 아니고 3의 배수가 아닌 확률은 $\frac{8}{6^3}$

② $a_1 a_2 a_3$ 가 2의 배수이고 3의 배수가 아닌 확률은 $\frac{56}{6^3}$

③ $a_1 a_2 a_3$ 가 2의 배수가 아니고 3의 배수일 확률은 $\frac{19}{6^3}$

④ $a_1 a_2 a_3$ 가 6의 배수일 확률은 $\frac{133}{6^3}$

이다. 따라서 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 가 6의 배수일 확률은

$$\frac{8}{6^3} \times \frac{1}{6} + \frac{56}{6^3} \times \frac{2}{6} + \frac{19}{6^3} \times \frac{3}{6} + \frac{133}{6^3} \times \frac{6}{6} = \frac{975}{6^4}$$

이다. 구하는 확률은 $\frac{266}{325}$ 이다.

COMMENT 미적분 27

$h(t) = g(1)$ 에서 $f(h(t)) = 1$ 이다.

$$t \times h(t) \times e^{h(t)} = 1$$

이다. $h(\alpha) = 2$ 에서 $\alpha = \frac{1}{2e^2}$ 이고, 미분하면

$$h(t)e^{h(t)} + th'(t)e^{h(t)} + th'(t)h(t)e^{h(t)} = 0$$

에 잘 대입해라.

COMMENT 미적분 28

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하자. $\overline{DM} = \frac{2}{3} \tan \theta$, $\overline{MB} = \frac{1}{3}$, $\overline{BD} = \sqrt{\frac{4}{9} \tan^2 \theta + \frac{1}{9}}$ 이다.

삼각형 BDM과 삼각형 CBH가 서로 닮음이고 닮음비는 $\overline{BD} = \sqrt{\frac{4}{9} \tan^2 \theta + \frac{1}{9}} : \tan \theta$ 이다. 삼각형 BDM의 넓이가 $\frac{1}{9} \tan \theta$ 이므로

$$f(\theta) = \frac{1}{9} \tan \theta \times \frac{\tan^2 \theta}{\frac{4}{9} \tan^2 \theta + \frac{1}{9}}$$

이다.

COMMENT 미적분 29

$P_2(-2, 4), P_3(3, 9), P_4(-4, 16), \dots$ 이다. 딱 봐도 P_n 의 x 좌표가 $(-1)^{n+1} \times n$ 인 각이다.

S_n 은 곡선 $y=x^2$ 와 선분 $P_{2n}P_{2n+1}$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이에서

곡선 $y=x^2$ 와 선분 $P_{2n-1}P_{2n}$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것이다.

$$\text{곡선 } y=x^2 \text{와 선분 } P_{2n}P_{2n+1} \text{으로 둘러싸인 도형의 넓이는 } \frac{1}{6}(4n+1)^3,$$

$$\text{곡선 } y=x^2 \text{와 선분 } P_{2n-1}P_{2n} \text{으로 둘러싸인 도형의 넓이는 } \frac{1}{6}(4n-1)^3$$

이므로

$$S_n = \frac{1}{6}(4n+1)^3 - \frac{1}{6}(4n-1)^3 = 16n^2 + \dots$$

이고 $\sum_{k=1}^n S_k = \frac{16}{3}n^3 + \dots$ 이다. 따라서, $a=3, b=\frac{16}{3}$ 이다.

COMMENT 미적분 30

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값 0을, $x=\frac{1}{k}$ 에서 극댓값 $\frac{1}{ke}$ 을 가진다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) \times h(-x)}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{h(x)}{x} \times \frac{h(-x)}{-x} \right\}$$

에서 $h(0)=0$ 이고 좌미분계수와 우미분계수의 곱이 음수이므로

$h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분불가능, 좌미, 우미의 절댓값은 9이다.

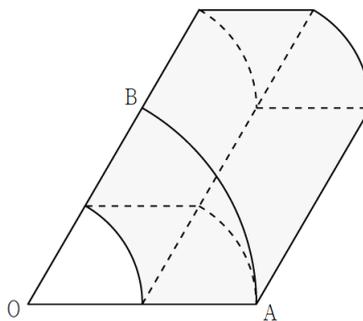
$h(\alpha_1) - h(\alpha_2) \geq \frac{1}{ke}$ 에서 $f(x)$ 의 극대, 극솟값을 쟀려보면, $h(\alpha_1) = \frac{1}{ke}, h(\alpha_2) = 0$ 인 각이다.

$h(\alpha_2) = 0$ 에서 $f(\alpha_2) = 0$ 이므로 $f(x) = x(x - \alpha_2)^2$ 이다. 미분계수 쟀려보면 $\alpha_2 = 3$ 이다.

$\alpha_1 = 1$ 이고 $h(1) = g(f(1)) = g\left(\frac{1}{k}\right)$ 에서 $\frac{1}{k} = 4$ 이다.

따라서, $k = \frac{1}{4}, \alpha_3 = 4, f(x) = x(x-3)^2$ 이다.

COMMENT 기하 27



COMMENT 기하 28

제1사분면의 접점을 (α, β) 라 하자.

$$\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\beta^2}{12} = 1, \quad \beta^2 = -3(\alpha-3), \quad -\frac{3}{2\beta} = -\frac{12\alpha}{16\beta} \text{ (기울기)}$$

에서 $\alpha=2, \beta=3, a=5$ 이다.

COMMENT 기하 29

$\overline{FA} = x$ 라 하자. $\overline{F'A} = x + 2a$, $\overline{FB} = 5x$, $\overline{F'B} = 5x - 2a$ 이다.

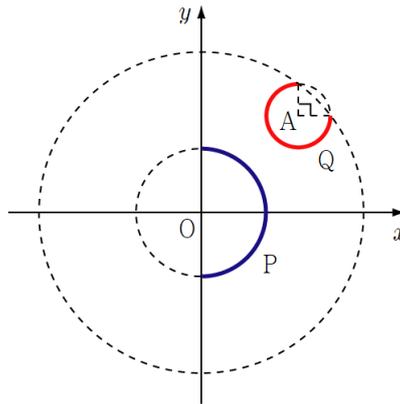
직각삼각형 $F'AB$ 에서 $(x + 2a)^2 + (4x)^2 = (5x - 2a)^2$ 이므로 $x = 3a$ 이고,

직각삼각형 FAF' 에서 $\overline{FF'} = \sqrt{34}a$ 이다.

쌍곡선의 $a^2 + b^2 = c^2$ 에서 $a^2 + \frac{15}{2} = \left(\frac{\sqrt{34}a}{2}\right)^2$ 이므로 $a = 1$ 이다.

COMMENT 기하 30

두 점 P, Q의 자취는 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값은 $|\overrightarrow{OQ}|$ 가 최대일 때, 점 Q가 (4, 3) 또는 (3, 4)일 때 얻을 수 있다.

\overrightarrow{OP} 의 방향을 \overrightarrow{OQ} 와 같게 할 수 있으므로, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값은 $5 \times 2 = 10$ 이다.

아래 그림을 살펴보면 점 Q의 위치와 관계 없이 \overrightarrow{OP} 가 (0, -2)일 때 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 가 최소임을 알 수 있다.

$\overrightarrow{OP} = (0, -2)$ 로 고정하고,

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$$

에서 \overrightarrow{AQ} 를 (0, -1)로 잡아야 최소각이 된다. 최솟값은 $(0, -2) \cdot (3, 4) = -8$ 이다.

