

[40~45] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

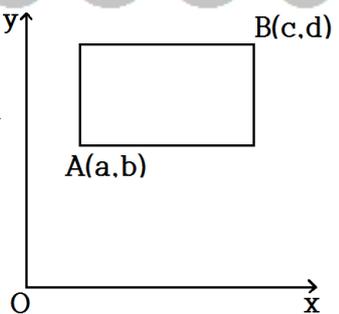
일반적으로 ‘기하학’이라고 불리는 것은 엄밀하게는 ‘유클리드 기하학’을 뜻한다. 유클리드 기하학에는 5가지의 공준\*이 있다. 그중 제 5공준은 ‘평행성의 공리’라고도 불리며, 이는 다음과 같다.

임의의 직선이 두 직선과 교차할 때, 교차되는 각의 내각의 합이 두 직각( $180^\circ$ )보다 작을 때, 두 직선을 계속 연장하면 두 각의 합이 두 직각보다 작은 쪽에서 교차한다.

이를 좀 더 쉽게 이야기하면, ‘직선 밖의 한 점을 지나 그 직선에 평행한 직선은 단 하나 존재한다’가 된다. 그런데 19세기 이후, 로바첵스키 등에 의해 이러한 전제가 점차 **㉔부정**되기 시작하였다. 다시 말해, 평면상의 두 직선은 모두 만날 수 있다는 것이 증명된 셈이다. 그 결과, 다른 네 공리는 유지한 채 제 5공리만 부정함으로써 기존의 기하학과 전혀 다른 세계가 펼쳐졌다.

여기에서 두 가지 짚고 넘어가야 할 부분이 있다. 첫째, 공준에 모순이 존재할 수 있는지에 대해 궁금증을 가질 수도 있다. 그러나 이는 나중에 괴델이 ‘불완전성 정리’라는 논문을 통해 수학의 불완전성을 증명하였으므로 크게 문제될 부분이 아니다. 여기에서 불완전성 정리는 ‘수학에서는 증명도 부정도 되지 않는 명제가 반드시 존재한다. 또한, 수학을 전개하는 근본 공리를 선정해 그 체계가 정말 모순이 없다면, 그 모순이 없다는 사실 자체는 그 체계의 논리 전개로는 증명을 할 수 없다.’로 요약할 수 있다. 둘째, 제 5공준이 부정되었다고 해서 이것이 유클리드 기하학 체계의 붕괴를 의미하는 것은 아니다. 그저 기존의 체계와 판이한 ‘비유클리드 기하학’이라는 새로운 체계가 탄생한 것이다. 비유클리드 기하학은 이렇게 해서 시작되었으며, 수학자 가우스가 이 이름을 처음 **㉕명명**하였다.

비유클리드 기하학은 추상적으로 다루어지는 경우가 대부분이다. 이러한 비유클리드 기하학 가운데 비전공자들이 쉽게 이해할 수 있는 것 중 하나가 ‘택시 기하학’이다. <그림 1>과 같은 경우를 **㉖가** 정해보자. 유클리드 기하학에서 A와 B 두 지점 간의 거리( )는 피타고라스의 정리에 의하여  $d_1 = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$ 이다. 이는 두 지점 간의 ‘직선거리’를 뜻하며, 실생활에 적용되기 어려운 경우가 많다. 반면, 택시 기하학에서 A와 B 두 지점 간의 거리( $d_2$ )는  $d_2 = |c-a| + |d-b|$ 이며, 이를 택시거리라고 한다. 즉, 택시거리는



<그림 1>

한 블록의 가로 길이와 세로 길이의 합이다. 쉽게 말해 건물을 통과할 수 없는 ‘택시’가 도로만을 이용해 갈 수 있는 두 지점 간의 최단 거리를 구한다고 볼 수 있다. 따라서 택시거리가 직선거리보다 더 실생활에 적합하다고 볼 수 있다.

위에서 언급한 택시거리의 **㉖정의** 때문에, 택시 기하학은 기존의 기하학과 여러 가지 다른 특징을 보인다. 첫째, 원은 ‘평면 위의 한 점에서 일정한 거리에 있는 점들로 이루어진 곡선’으로 정의된다. 따라서 유클리드 기하학에서 중심이  $(0,0)$ 이고 반지름이  $r$ 인 원( $C_1$ )은  $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$ 이다. 반면, 택시 기하학에서 중심이  $O(0,0)$ 이고 반지름이  $r$ 인 원( $C_2$ )은  $C_2 : |x| + |y| = r$ 이다. 즉, ‘택시원’은 우리가 흔히 아는 정사각형의 모양인 셈이다. 둘째, **㉗택시 기하학에서의 정삼각형**은 세 각이 모두  $60^\circ$ 가 아닐 수도 있다. 택시 기하학에서의 정

삼각형은 유클리드 기하학에서의 정삼각형이 아닌 이등변삼각형으로 나타나기도 한다. 이 역시 택시 거리의 정의 때문에 나타나는 현상이다. 셋째, 택시 기하학에서는 삼각형의 합동 공리, 즉 SAS합동이 성립하지 않는다. 이는 SAS합동을 만족하는 두 쌍을 찾을 수 없음을 의미하는 것이 아니라, SAS합동이 무조건 성립하는 것은 아님을 의미한다. 또한, SAS합동은 다른 두 개의 삼각형의 합동 조건인 SSS합동과 ASA합동의 기반이므로, SAS합동이 성립하지 않는다는 것은 나머지 두 합동 조건 역시 성립하지 않음을 뜻한다. 그 외에도 마름모의 두 대각선이 직교하지 않는 등의 특징을 지니고 있다.

비유클리드 기하학 중에서도 간단한 축에 속한다는 택시 기하학도 어려운데, 비유클리드 기하학을 왜 받아들여야 하며 이에 대해서 왜 **이해**해야 하는지 의문이 들 수도 있다. 그러나 비유클리드 기하학의 발견과 이에 대한 이해는 우리의 삶의 많은 부분들을 바꾸어놓았다. 우선, 이 발견을 통해 2000년 간 우리의 사고를 지배했던 유클리드 기하학에서 벗어나게 되었다. 이는 힐베르트와 위에서 언급한 괴델 등 여러 수학자들의 수학기초론 연구에 큰 영향을 주었다. 또한, 타원적 비유클리드 기하학이라고도 불리는 **리만 기하학은 아인슈타인의 일반 상대성이론에 큰 영향을 미쳤다.** 아인슈타인은 “나는 기하학의 이러한 해석이 대단히 중요하다고 생각한다. 만일 내가 그 기하학을 몰랐다면 나는 결코 상대성 이론을 만들어 낼 수 없었을 것이다.”라고 이야기하며 자신의 발견에 대한 리만 기하학의 도움을 긍정적으로 평가했다. 이와 같이 비유클리드 기하학은 자연과학 분야에서 폭넓게 이용되고 있다.

\* 공준 : 자명한 명제는 아니나 기본적인 전제가 되는 것

40. 윗글에 대한 설명으로 가장 적절한 것은?

- ① 두 기하학 체계를 대비하고, 그중 정합성이 더 높은 하나가 수학의 패러다임을 지배하는 과정을 살펴보고 있다.
- ② 기하학의 역사를 통시적 관점에서 바라보며, 기하학이 쇠퇴해가는 이유를 설명하고 이에 대한 해결책을 제시하고 있다.
- ③ 베델의 불완전성 정리에 근거하여, 어떠한 수학적 사고도 완벽할 수 없다는 수학에 대한 회의론적 사고를 보여주고 있다.
- ④ 기존 기하학 체계에서 성립했던 여러 공리들이 새로운 기하학 체계에서 성립하지 않음을 근거로 들어 후자를 비판하고 있다.
- ⑤ 한 기하학 체계의 하위 범주를 그에 대한 예시로 사용하고, 해당 기하학 체계가 인류의 발전에 크게 기여하였음을 설명하고 있다.

41. 윗글을 이해한 내용으로 가장 적절한 것은?

- ① 유클리드 기하학에서 평행하는 두 직선은 존재할 수 없다.
- ② 로바첵스키는 공준의 부정을 처음 이야기할 때 괴델의 이론을 통해 이를 정당화하였다.
- ③ 두 지점 간의 택시거리가 직선거리보다 실생활에 더 적합하다.
- ④ SAS합동과 ASA합동은 SSS합동에서 비롯되었다.
- ⑤ 아인슈타인은 리만 기하학을 통해 특수상대성이론의 기초를 마련하였다.

42. 윗글을 바탕으로 할 때, 다음 중 <보기>의 상황에 대한 설명으로 적절하지 않은 것은?  
(단, 거리를 계산 할 때 길의 두께는 무시한다.)

<보기>

다음과 같은 가상의 공간이 있다고 가정하자. 모든 블록은 정사각형이며, 한 블록의 간격은 1m이고, 굵은 실선으로 표현된 길을 따라서만 이동할 수 있다. 또한, 한 번 지나간 지점과 길은 다시 지날 수 없다. 지연이는 현재 A에 위치해 있고, B로 가고자 한다.

- ① 점선의 길이는  $7\sqrt{2}m$ 이며, 이는 B까지의 이론상 최단 거리이다.
- ② P까지의 직선거리가 Q까지의 택시거리보다 짧다.
- ③ 지연이가 B까지 걸어서 갈 수 있는 현실적 최단 거리는 14m이다.
- ④ 지연이가 선택할 수 있는 최단 경로는 세 가지이다.
- ⑤  $A \Rightarrow P \Rightarrow Q \Rightarrow T \Rightarrow B$ 의 경로는 지연이가 택할 수 있는 경로이지만 최단 경로로 볼 수는 없다.

43. 다음 중 <보기>에서 ㉠에 해당하는 도형을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- ① ㉠, ㉡    ② ㉠, ㉣    ③ ㉢, ㉣    ④ ㉠, ㉡, ㉣    ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

44. ㉠ ~ ㉣를 사용하여 만든 문장으로 적절한 것은?

- ① ㉠ : 지연이는 부정칭과 미지칭을 헛갈리곤 한다.
- ② ㉡ : 시아는 명명한 하늘 아래 누워 잠을 청했다.
- ③ ㉢ : 슬기는 협상 타결을 가정한 채 말하고 있다.
- ④ ㉣ : 준수는 정의로우며 예의 바른 사나이다.
- ⑤ ㉣ : 경수는 친한 친구 사이에서도 이해관계를 따진다.

45. 윗글과 <보 기>를 바탕으로 할 때, ㉠에 대한 보충 설명으로 가장 적절한 것은?

—<보 기>—

일반상대성이론이란 특수상대성을 중력까지 확장한 개념으로, 빛의 진로가 강한 중력의 장속에서 굽어진다는 이론이다. 아인슈타인은 특수상대성 이론을 발표한 후 뉴턴의 중력 이론을 자신의 특수상대성 이론의 틀에 맞게 수정하는 작업을 시작하였고, 이는 일반상대성 이론의 개발로 발전하였다. 이 이론에 일반이라는 이름이 붙은 이유는, 이 이론이 자연 현상을 서로 상대적으로 등속도 운동하는 관찰자 사이에 관찰되는 현상에 대한 이론이었던 특수 상대성 이론을 가속도 운동의 경우까지 확장시킨 것이기 때문이다.

일반상대성이론은 특수상대성이론의 두 개의 기본원리인 상대성원리와 광속도불변의 원리에, 두 가지 원리를 추가하였다. 첫째, 아인슈타인은 일반상대성이론에서 '관성질량=중력질량'이라는 '등가원리'를 내세웠다. 둘째, 일반상대성이론에서는 시공간에 대한 전혀 새로운 개념이 도입되었는데, 그것은 중력장의 효과가 시공간의 곡률(curvature)로 나타난다는 것이다. 즉, 물질의 분포와 운동 상태가 시공간의 휨을 결정하고 시공간의 휨이 물체의 운동에 영향을 미친다는 것이다.

일반상대성이론은 중력이론으로서는 현재까지 가장 성공적인 이론이며, 천체관측기술의 진보와 더불어 우주론의 형성에도 큰 기여를 하였다.

- ① 아인슈타인은 유클리드 기하학과 리만 기하학의 관계를 통해 특수상대성 이론을 일반화하였다.
- ② 아인슈타인은 리만 기하학을 통해 중력장을 휘어진 공간의 곡률로 설명했다.
- ③ 아인슈타인은 리만 기하학을 통해 관성질량과 중력질량 간의 차이를 극소화하였다.
- ④ 아인슈타인은 시공간의 휨과 물질의 분포 사이의 관계를 리만 기하학을 반증하면서 발견하였다.
- ⑤ 아인슈타인은 리만 기하학을 통해 중력장이 없는 곳에서 빛이 진로가 굽어짐을 증명하였다.

정답

[40~45] 수학·과학(비유클리드기하학 - 택시기하학)

40. ⑤

41. ③

42. ④

43. ①

44. ③

45. ②

오르비 IMIN 633077