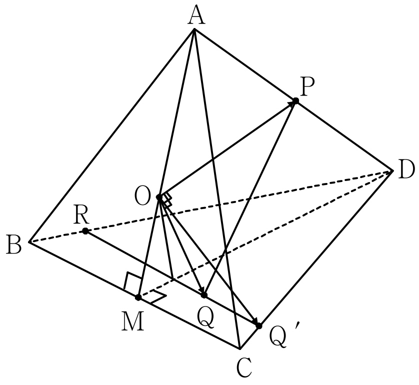
29.



주어진 조건을 만족하는 점 Q의 자취는 $\overrightarrow{OP}$를 법선벡터로 하고 점 O를 지나는 평면과 평면 BCD의 교선 $\overline{RQ'}$ 이고 이 교선 $\overline{RQ'}$ 과 평면 AMD는 수직이므로 $\overline{RQ'}//\overline{BC}$ 이다.

직각삼각형 OPQ에서 $\overline{OP}$는 일정하고 $\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2$ 이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 Q가 Q'의 위치 즉 선분 $\overline{CD}$위에 있을 때이다. (점 R의 위치에 있을 경우는 마찬가지)

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}=0$ 이고

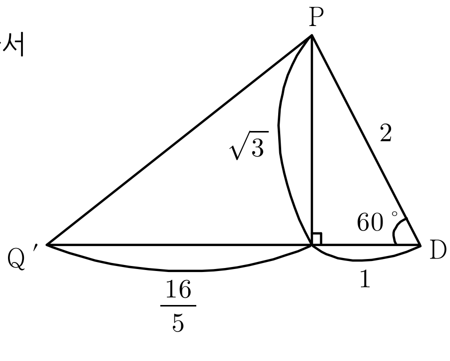
$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{DC}\\&=\overrightarrow{OD}+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})\\&=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})\cdot(t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OD})\\&=\frac{1}{2}\left\{t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-t)|\overrightarrow{OD}|^2\right\}\end{aligned}$$

여기서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0, \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$ 이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left\{t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-t)|\overrightarrow{OD}|^2\right\}$

여기서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{8}{3}$ $\quad |\overrightarrow{OP}|^2=\frac{32}{3}$ 이므로 $t=\frac{4}{5}$

따라서



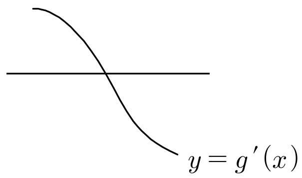
에서 $\overline{PQ'}=\sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{14}{5}$

30.

조건 (나)에서 $f(\alpha)=f(\beta)=M$ $\quad f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ 이고 $g'(x)=f(x)+(x-a)f'(x)$

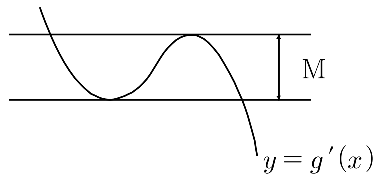
$g'(\alpha)=f(\alpha)=M$ $\quad g'(\beta)=f(\beta)=M$ 이고 $M=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$

$y=g(x)$가 사차함수 이므로 $y=g'(x)$는 3차 함수 (최고차항:-4)



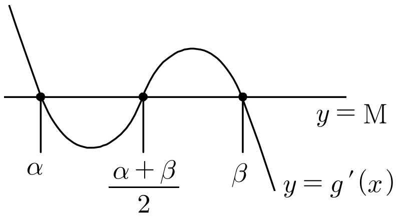
$\alpha \neq \beta$인 α, β에 대하여 $g'(\alpha)=g'(\beta)$ 성립할 수 없음

따라서 $y=g'(x)$의 개형은



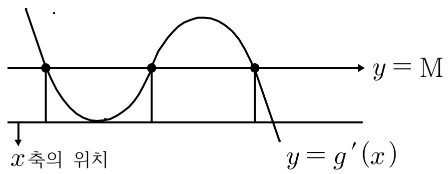
그런데 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\{g'(x)-M\}dx=g(\beta)-g(\alpha)-M(\beta-\alpha)=0$

따라서 조건 (가)와 (나)를 만족하는 $y=g'(x)$의 개형은 다음과 같다.



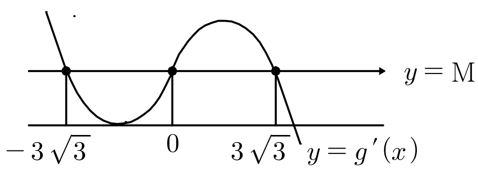
조건 (다)에서 $f(x)$가 $g(x)$ 보다 극대 또는 극소가 많으려면

x축의 위치는



처럼 되어야 한다.

$\therefore M$이 최소일 경우를 그려보면 $|\beta-\alpha|=6\sqrt{3}$ 이므로



$g'(x)-M_{\min}=-4(x^3-27x)$이고 $\quad g'(x)=0$ 에서 $x=-3$ or 3

$\quad\quad \therefore M_{\min}=-4(3^3-3^4)=-4\cdot 3^3(1-3)=216$