2017학년도 대학수학능력시험

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ②	02. ③	03. ①	04. ⑤	05. ②
06. ⑤	07. ④	08. ③	09. ②	10. ⑤
11. ①	12. ①	13. ③	14. ④	15. ①
16. ④	17. ③	18. ④	19. ②	20. ⑤
21. ④	22. 30	23. 24	24. 7	25. 150
26. 2	27. 32	28. 16	29. 62	30. 65

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$8\times2^{-2}=2^3\times2^{-2}$$
$$=2^{3+(-2)}$$
$$=2^1$$
$$=2$$

정답 ②

2. **출제의도** : 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A\bigcup B=\{1,2,3,4,5\}\bigcup\{2,4,6,8,10\}$$
$$=\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$$

이므로

$n(A\bigcup B)=8$

정답 ③

3. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 이용하여 로그를 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_{15}3+\log_{15}5$$
$$=\log_{15}(3\times5)$$
$$=\log_{15}15$$
$$=1$$

정답 ①

4. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\bigcap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\bigcap\mathrm{B}^{C})$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}$$
$$=\frac{5}{16}$$

정답 ⑤

5. **출제의도** : 세 수가 등비수열을 이룰 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

세 수 $\frac{9}{4}$, a, 4가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2=\frac{9}{4}\times4$$

$a^2=9$

이때, $a>0$이므로

$a=3$

정답 ②

6. **출제의도** : 함수의 대응관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f^{-1}(2)=a$라 하면 $f(a)=2$ 이므로

$$f(2)+f^{-1}(2)=4+3$$
$$=7$$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 명제가 참일 조건을 진리집합을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x||x-1|\le 3\}$

$=\{x|-3\le x-1\le 3\}$

$=\{x|-2\le x\le 4\}$ ----㉠

또, a가 자연수이므로

$Q=\{x||x|\le a\}$

$=\{x|-a\le x\le a\}$ ----㉡

한편, p가 q이기 위한 충분조건 즉,

$p\Rightarrow q$

이므로 $P\subset Q$이어야 한다.

그러므로 ㉠과 ㉡에서

$-a\le -2$ 이고 $a\ge 4$

$a\ge 2$ 이고 $a\ge 4$

따라서, $a\ge 4$이므로 자연수 a의 최솟값은 4이다.

정답 ④

8. **출제의도** : 함수의 그래프를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$

$=0+(-3)=-3$

정답 ③

9. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^2(6x^2-x)dx$

$=\left[2x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$

$=(16-2)-0$

$=14$

정답 ②

10. **출제의도** : 유리함수의 그래프의 특징을 이용하여 함수식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

유리함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 점근선은

$x=5$, $y=k$

이므로 유리함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 그래프는 점 $(5,k)$에 대하여 대칭이다.

따라서, 점 $(5,k)$는 직선 $y=x$위에 있어야 하므로

$k=5$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

한 개의 주사위를 1번 던질 때, 4의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

따라서, 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 4의 눈이 한 번만 나올 확률은 독립시행의 확률이므로

${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2$

$=\frac{25}{72}$

정답 ①

12. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^4 |-2t+4|dt$$

$$= \int_0^2 (-2t+4)dt + \int_2^4 (2t-4)dt$$

$$= [-t^2+4t]_0^2 + [t^2-4t]_2^4$$

$$= (-4+8) + \{(16-16)-(4-8)\}$$

$$= 4+4 = 8$$

정답 ①

13. **출제의도** : 실생활에 활용된 조건부 확률의 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

체험 학습 A를 선택한 학생은 남학생 90명과 여학생 70명이므로 체험 학습 B를 선택한 학생 중 남학생의 수를 a, 여학생의 수를 b라 하고 표로 나타내면 다음과 같다.

	남자	여자	계
체험학습 A	90	70	160
체험학습 B	a	b	$a+b$
계			360

이때,

$a+b = 360-160$

$= 200$ -----㉠

또, 이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명의 학생이 체험 학습 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률이 $\frac{2}{5}$이므로 체험학습 B를 선택할 사건을 A, 남학생일 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

$$= \frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{2}{5}$$

이므로

$5a = 2a+2b$

$a = \frac{2}{3}b$

이 식을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{3}b + b = 200$

$\frac{5}{3}b = 200$

$b = 120$

따라서, 이 학교의 여학생의 수는

$70+b = 70+120 = 190$

정답 ③

14. **출제의도** : 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x<2$일 때,

$f(x) = x^2-4x+6 = (x-2)^2+2 > 0$

$x \geq 2$일 때

$f(x) = 1 > 0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$ 이다.

그런데, $f(x)$는 $x=2$에서만 연속이 아니므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이면 된다.

즉,

$$\lim_{x\to 2-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 2-} \frac{ax+1}{x^2-4x+6} = \frac{2a+1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 2+} \frac{ax+1}{1} = 2a+1$$

$$\frac{g(2)}{f(2)} = 2a+1$$

에서 $\dfrac{2a+1}{2}=2a+1$ 이므로

$2a+1=4a+2,\ 2a=-1$

따라서, $a=-\dfrac{1}{2}$ 이다.

정답 ④

15. 출제의도 : 등차수열의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$라 하면 조건 (가)에서

$(a+5d)+(a+7d)=0$

$a=-6d$ ----㉠

조건 (나)에서 $|a_6|=|a_7|+3$이므로

$|a+5d|=|a+6d|+3$

㉠을 대입하면 $d>0$이므로

$d=3$

따라서,

$a_2=a+d$

$=-5d$

$=-15$

정답 ①

16. 출제의도 : 모평균을 추정할 수 있는가?

정답풀이 :

$\bar{x}-2.58\times\dfrac{40}{\sqrt{64}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\dfrac{40}{\sqrt{64}}$

$\bar{x}-12.9\le m\le\bar{x}+12.9$

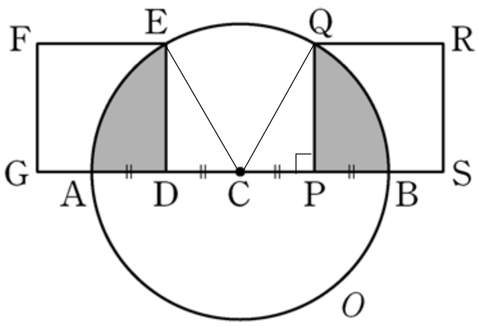
따라서 $c=12.9$ 이다.

정답 ④

17. 출제의도 : 도형의 넓이를 등비급수의 합을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림 R_1에서 아래 그림과 같이 두 점 C, Q를 연결하여 직각삼각형 QCP를 만든다.



직각삼각형 QCP에서

$\overline{\mathrm{CQ}}=2,\ \overline{\mathrm{CP}}=1$

이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CQ}}^2-\overline{\mathrm{CP}}^2}$

$=\sqrt{2^2-1^2}$

$=\sqrt{3}$

이때,

$\angle\mathrm{QCP}=\dfrac{\pi}{3}$

이다.

그러므로 도형 R_1에 색칠된 부분의 넓이는

$2\{$(부채꼴QCB의 넓이)$-$ (△QCP의 넓이)$\}$

$=2\left\{\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right\}$

$=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ ----㉠

한편, 그림 R_2에서 새로 그려진 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

그러므로 그림 R_1에 있는 원과 그림 R_2에 있는 원의 반지름의 길이의 비는 $2 : \frac{\sqrt{3}}{2}$ 즉, $1 : \frac{\sqrt{3}}{4}$이다.

이때, 넓이의 비는 $1 : \frac{3}{16}$이다.

한편, 그림 R_1의 원의 개수와 그림 R_2의 원의 개수의 비는 $2 : 4$ 즉, $1 : 2$이므로 공비는

$$\frac{3}{16} \times 2 = \frac{3}{8}$$

이다.

따라서, 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}{1-\frac{3}{8}}$$

$$= \frac{32\pi - 24\sqrt{3}}{15}$$

정답 ③

18. 출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 이차방정식의 두 근의 차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ 이면

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = 1 \neq \frac{3}{5}$ 이므로

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$

따라서, $a = \alpha$라 하면

$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$

이므로

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}$$

$$= \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1} = \frac{3}{5}$$

즉, $5(\alpha-\beta)-5 = 3(\alpha-\beta)+3$

$2(\alpha-\beta) = 8$

이므로

$|\alpha-\beta| = 4$

정답 ④

19. 출제의도 : 이산확률분포에 관련된 추론문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점프를 반복하여 점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하자.

이때, 점프는 $(x+1, y+1)$이 3번이고 $(x+1, y)$가 1번이면 되므로

$k = \boxed{4}$이고 가장 큰 값은 $k+3$이다.

$X=k$일 때, 점프는 $(x+1, y+1)$이 3번, $(x+1, y)$가 1번이므로

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{1}{N} \times \frac{4!}{3!} = \frac{4}{N}$$

또, $X=k+1$일 때, 점프는 $(x+1, y+1)$이 2번, $(x+1, y)$가 2번, $(x, y+1)$이 1번이므로

$$\mathrm{P}(X=k+1) = \frac{1}{N} \times \frac{5!}{2!2!} = \frac{30}{N}$$

또, $X=k+2$일 때, 점프는 $(x+1, y+1)$이 1번, $(x+1, y)$가 3번, $(x, y+1)$이 2번 이어야 하므로

$$\mathrm{P}(X=k+2) = \frac{1}{N} \times \frac{6!}{1!3!2!} = \frac{1}{N} \times \boxed{60}$$

또, $k=k+3$일 때, 점프는 $(x+1, y)$가 4번, $(x, y+1)$이 3번 이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=k+3)=\frac{1}{N}\times\frac{7!}{3!4!}=\frac{35}{N}$

이고

$\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=1$

에서

$\frac{4}{N}+\frac{30}{N}+\frac{60}{N}+\frac{35}{N}=1$

$\frac{129}{N}=1$

이므로

$N=\boxed{129}$

이다.

따라서, 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=k}^{k+3}i\,\mathrm{P}(X=i)=\frac{257}{43}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 값은 각각 4, 60, 129이므로

$a+b+c$

$=4+60+129$

$=193$

정답 ②

20. 출제의도 : 삼차함수의 그래프와 그 도함수의 그래프를 이용하여 명제의 참, 거짓을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 조건 (가)에서

$f'(x)=ax(x-k)\ (a>0)$

라 하면 구간 $[0,k]$에서 $f'(x)\le 0$이므로

$\int_0^k f'(x)dx<0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서

$\int_0^t |f'(x)|dx=f(t)+f(0)$

의 양변을 t에 대하여 미분하면

$|f'(t)|=f'(t)\cdots$㉠

이때, ㉠은 $t>1$인 모든 실수 t에 대하여 성립하므로

$f'(t)\ge 0\ (t>1)$

따라서, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $0<k\le 1$ 이다. (참)

ㄷ. $f'(x)=ax(x-k)=ax^2-akx$에서

$\int_0^t |f'(x)|dx$

$=-\int_0^k (ax^2-akx)dx+\int_k^t (ax^2-akx)dx$

$=-[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2]_0^k+[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2]_k^t$

$=-(\frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2})+(\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}-\frac{ak^3}{3}+\frac{ak^3}{2})$

$=\frac{ak^3}{6}+(\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{6})$

$=\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{3}\cdots$㉠

또한,

$f(x)=\int(ax^2-akx)dx$

$=\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

라 하면

$f(t)+f(0)$

$=(\frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+C)+C$

$=\frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+2C\cdots$㉡

㉠,㉡이 같아야 하므로

$C=\frac{ak^3}{6}$

즉, $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2+\frac{ak^3}{6}$이므로 극솟값은

$$f(k)=\frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2}+\frac{ak^3}{6}=0 \text{ (참)}$$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

21. 출제의도 : 조건을 만족시키는 점의 개수의 합을 구할 수 있는가?

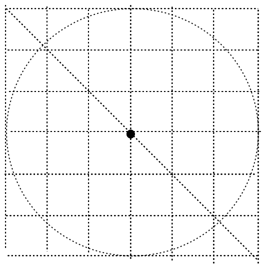
정답풀이 :

각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $n\le 7$일 때,

대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수가 같으므로

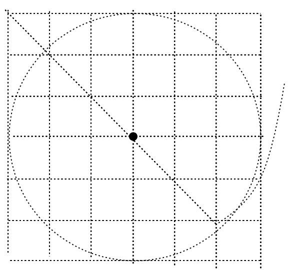
$A_n-B_n=0$



(ii) $n=8$일 때,

아래 그림에서 대칭성을 이용하여 조사하면

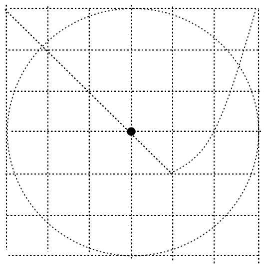
$A_8-B_8=0$



(iii) $n=9$일 때,

아래 그림에서

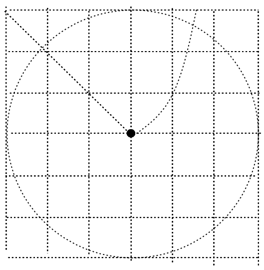
$A_9-B_9=12-8=4$



(iv) $n=10$일 때,

아래 그림에서

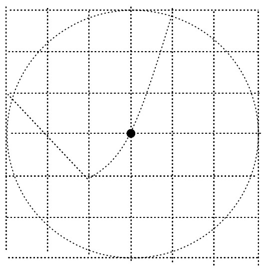
$A_{10}-B_{10}=17-4=13$



(iv) $n=11$일 때,

아래 그림에서

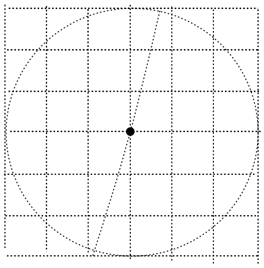
$A_{11}-B_{11}=15-7=8$



(v) $12 \le n \le 20$일 때,

대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수가 같으므로

$A_n - B_n = 0$



따라서, 구하는 값은

$$\sum_{n=1}^{20}(A_n - B_n) = 4+13+8=25$$

정답 ④

22. 출제의도 : 순열과 조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_5\mathrm{P}_2 + {}_5\mathrm{C}_2$

$=5\times4+\dfrac{5\times4}{2}$

$=20+10=30$

정답 30

23. 출제의도 : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+3x^2+3$에서

$f'(x)=3x^2+6x$

이므로

$f'(2)=12+12=24$

정답 24

24. 출제의도 : 집합의 연산을 이용하여 집합의 원소를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^{C} = \{6,7\}$이므로 $3 \in \mathrm{B}$

따라서, $a-4=3$ 이므로

$a=7$

정답 7

25. 출제의도 : 합성함수의 정의를 이해하고 거듭제곱의 합과 $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\dfrac{1}{2}x+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{15} f(2k)$$

$$=\sum_{k=1}^{15}(k+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}2$$

$$=\frac{15\times16}{2}+2\times15$$

$=120+30$

$=150$

정답 150

26. 출제의도 : 미분을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y'=3x^2-a$ 이므로 점 $(1,1)$에서의 접선의 기울기는

$3-a$

이다.

따라서, 이 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$(3-a)\times(-\frac{1}{2})=-1$, $3-a=2$

즉, $a=1$ 이다.

또한, 점 $(1,1)$은 곡선 $y=x^3-x+b$위의 점이므로

$1=1^3-1+b$

$b=1$

따라서, $a+b=2$ 이다.

정답 2

27. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$2^a\times 4^b=2^{a+2b}$

이고 이 수가 8의 배수이어야 하므로

$a+2b\geq 3$

(ⅰ) $b=0$일 때,

$a\geq 3$이어야 하므로

조건 (가)에서 $a=a'+3$ (a'은 음이 아닌 정수)으로 놓으면

$a+b+c$

$=(a'+3)+c=7$

$a'+c=4$

그러므로 순서쌍 (a,b,c)의 개수는

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(ⅱ) $b=1$일 때,

$a\geq 1$이어야 하므로 조건 (가)에서 $a=a'+1$(a'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$a+b+c$

$=(a'+1)+1+c=7$

$a'+c=5$

그러므로 순서쌍 (a,b,c)의 개수는

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(ⅲ) $b\geq 2$일 때,

$a\geq 0$이면 되므로 조건 (가)에서 $b=b'+2$(b'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$a+b+c$

$=a+(b'+2)+c=7$

$a+b'+c=5$

그러므로 순서쌍 (a,b,c)의 개수는

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$

따라서, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+6+21=32$

정답 32

28. 출제의도 : 곡선 위의 두 점 사이의 거리를 구한 후 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$P_n(4^n,2^n)$, $P_{n+1}(4^{n+1},2^{n+1})$이므로

$$L_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$$
$$=\sqrt{(3\times 4^n)^2+(2^n)^2}$$
$$=\sqrt{9\times 16^n+4^n}$$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\times 16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times 16^n+4^n}}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times 16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times 16^n+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16+4\times(\frac{1}{4})^n}{9+(\frac{1}{4})^n}$$

$$=\frac{9\times16+4\times0}{9+0}$$

$=16$

정답 16

29. **출제의도** : 정규분포의 대칭성을 이해하고 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

한편, 조건 (가)에서 $f(10)>f(20)$이므로

$m<\frac{10+20}{2}$

$m<15$ -----㉠

또, 조건 (나)에서 $f(4)<f(22)$이므로

$m>\frac{4+22}{2}$

$m>13$ ------㉡

㉠과 ㉡에서 m은 자연수이므로

$m=14$

따라서,

$\mathrm{P}(17\le X\le 18)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{17-14}{5}\le\frac{X-14}{5}\le\frac{18-14}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(0.6\le Z\le 0.8)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)$

$=0.288-0.226$

$=0.062$

따라서, $a=0.062$이므로

$1000a=62$

정답 62

30. **출제의도** : 삼차함수의 그래프가 역함수를 가질 조건을 이용하여 주어진 방정식이 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-6x+6$ 이므로

$4(3x^2-6x+6)+12x-18=f'(g(x))$

$12x^2-12x+6=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$

$\{g(x)\}^2-2g(x)=4x^2-4x$

$\{g(x)\}^2-4x^2-2g(x)+4x=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x)-2(g(x)-2x)=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x-2)=0$

따라서,

$g(x)-2x=0$ 또는 $g(x)+2x-2=0$

(i) $g(x)-2x=0$일 때, 즉 $g(x)=2x$이면

$f(2x)=x$ 이므로

$8x^3-12x^2+12x+k=x$

$k=-8x^3+12x^2-11x$ ⋯㉠

따라서, $h_1(x)=-8x^3+12x^2-11x$라 하면

$h_1'(x)=-24x^2+24x-11<0$

이므로 닫힌 구간 $[0,1]$에서

$-7\le h_1(x)\le 0$

즉, 방정식 ㉠이 닫힌 구간 $[0,1]$에서 실근이 존재하기 위해서는

$-7\le k\le 0$

(ii) $g(x)+2x-2=0$일 때,

즉 $g(x)=-2x+2$ 이면

$f(-2x+2)=x$ 이므로

$(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k=x$

$-8x^3+12x^2-13x+8+k=0$

$k = 8x^3 - 12x^2 + 13x - 8 \cdots$ ㉡

따라서, $h_2(x) = 8x^3 - 12x^2 + 13x - 8$라 하면

$h_2{}'(x) = 24x^2 - 24x + 13 > 0$

이므로 닫힌 구간 $[0,1]$에서

$-8 \leq h_2(x) \leq 1$

즉, 방정식 ㉡이 닫힌 구간 $[0,1]$에서 실근이 존재하기 위해서는

$-8 \leq k \leq 1$

(i), (ii)에 의하여 $-8 \leq k \leq 1$이므로

$m = -8$, $M = 1$

따라서 $m^2 + M^2 = (-8)^2 + 1^2 = 65$

정답 65