

SPC (Special Problems for Champions)

문과 공개 문항 For 2017 (2nd)

정답 및 해설

문과정답

1. 80 2. 17

해설은 각자가 작업한 이후 통일 작업이전단계입니다.

궁금하신 점은 쪽지나 댓글로 문의바랍니다.

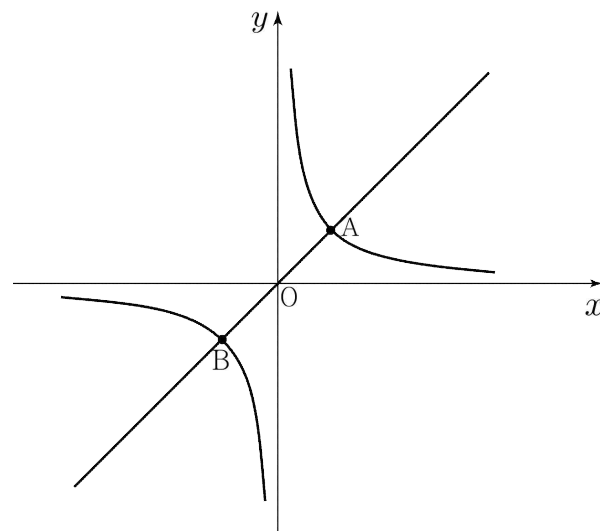
문과 1번 - 초성민

삼각형의 개수이며, n 의 값에 따른 유리함수와 직선의 점들을 찍어가면서 ABC를 찾아가며 확인해 준다.

1) $n=0$ 일 경우,

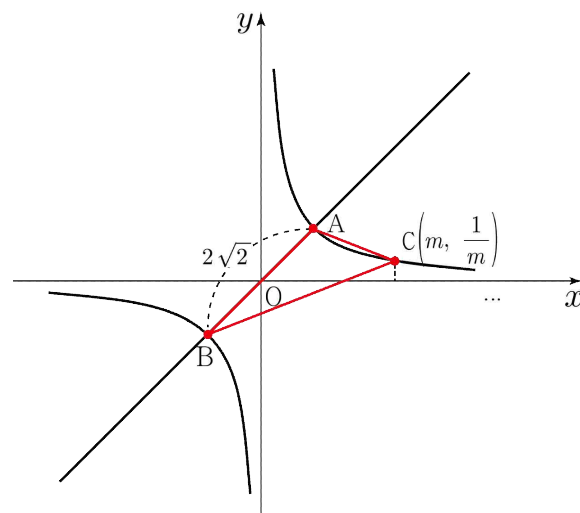
$y = \frac{1}{x}$ 와 $y=x$ 의 그래프의 교점은

A(1,1), B(-1,-1)가 된다.



선분 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이고 $x=m$ 과 $y = \frac{1}{x}$ 의 교점은

$C(m, \frac{1}{m})$ 이 된다. (C라 하자)



삼각형 ABC에서 밑변 AB는 고정된 길이이므로, 점 C에서 $y=x$ 까지의 거리가 높이가 된다.

그러므로 $y-x=0$ 에 대해서,

높이가 $\frac{|m - \frac{1}{m}|}{\sqrt{2}}$ 가 되고,

$\frac{1}{2} \cdot \frac{|m - \frac{1}{m}|}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} = |m - \frac{1}{m}|$ 가 20 이하가 되는 m 을 찾으면 된다.

그냥 일일이 찾되,

m 이 음수가 되는 값들 역시 놓치지 말고 찾자.

그리고 $m=1, -1$ 이 되는 점은 되지 않는 것 역시 확인해야 한다.

따라서

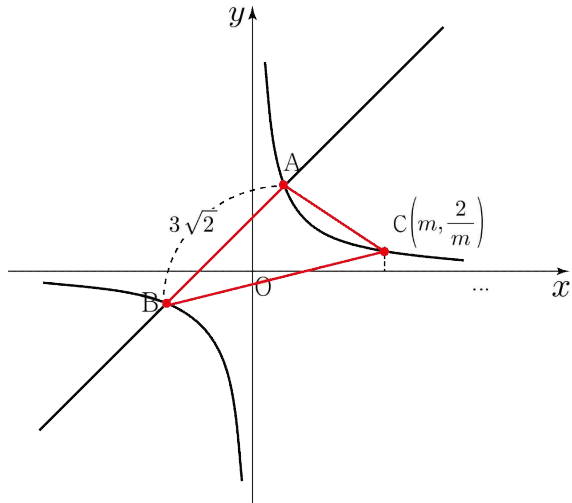
m 은 $2, 3, 4, 5, \dots, 21$,

그리고 $-2, -3, -4, \dots, -19$

총 38개가 된다.

2) $n=1$ 일 경우,

$y = \frac{2}{x}$ 와 $y = x+1$ 의 형태로 살펴보자.



$A(1, 2)$, $B(-2, -1)$ 가 되고,

마찬가지로 밑변 $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$

점 C에서 $y = x+1$ 에 내린 수선이 높이가 되므로

$d = \frac{\left| \frac{1}{m} - m - 1 \right|}{\sqrt{2}}$ 가 되고 삼각형 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\left| \frac{1}{m} - m - 1 \right|}{\sqrt{2}}$ 가 되며 이 역시 20보다 작아지는 m 값을 찾는다.

역시 음수일 때를 놓치지 말아야 하고,

점 A, B가 되는 값은 제외해주면

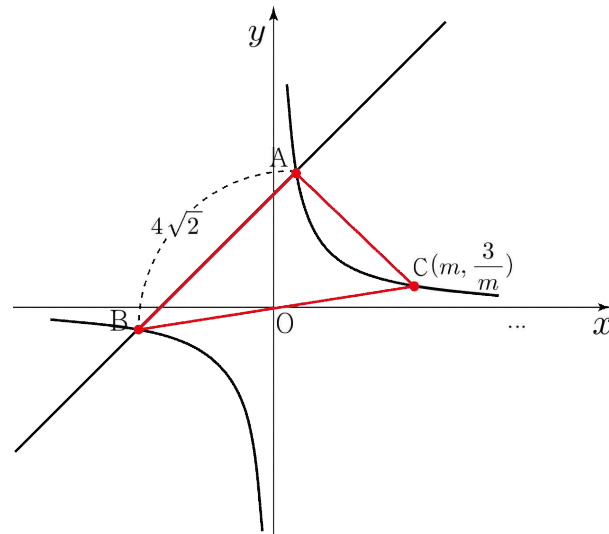
$m = 2, 3, 4, \dots, 12$

$m = -1, -3, -4, \dots, -14$

따라서 $f(1) = 24$

3) $n=2$ 일 경우,

$y = \frac{3}{x}$ 와 $y = x+2$ 의 형태로 살펴보자.



$A(1, 3)$, $B(-3, -1)$ 가 되고,

점 C에서 $y = x+2$ 에 내린 수선이 높이가 되므로

$d = \frac{\left| \frac{1}{m} - m - 2 \right|}{\sqrt{2}}$ 가 되고 삼각형 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\left| \frac{1}{m} - m - 2 \right|}{\sqrt{2}}$ 가 되며

넓이가 20보다 작아지는 m 값을 찾는다.

역시 음수일 때를 놓치지 말아야 하고,

점 A, B가 되는 값은 제외해주면

$m = 2, 3, 4, \dots, 8$

$m = -1, -2, -4, \dots, -12$

따라서 $f(2) = 18$

모두 더하면, 80개가 된다.

문과 2번 - 초성민

A주머니에 공 한 개를 먼저 넣어두고 시작하자

그리고 흰 공이 총 2개이므로

흰 공을 기준으로 공을 어떻게 분배할지 생각하는 것이다.

1) A주머니 흰 공 두 개

자연스럽게 B, C 주머니에는 검은 공이 2개씩은 들어가게 된다.

그리고 그 이후가 문제인데, 여기서 분배하는 아이디어는 자연수 분할이다.

어느 곳이든 갈수는 있지만, 크기가 정해져있기에

남은 공들에 있어서 숫자적으로 어떻게 배분할 것 인지 정해주면 크기 순서대로 공들이 가게 된다.

현재 검은 공 3개가 남아있으므로

$P(3, 1) + P(3, 2) + P(3, 3) = 3$ 이 된다.

(예를 들어, $P(3, 2) = 1$, $(1 + 2 = 3)$ 가지인데, 이는 남은 검은 공 3개를 1개와 2개로 나누어서 A, B, C에 분배하는데, 무게가 정해져있으므로 자연스럽게 2개는 C 1개는 B에 들어갈 수 밖에 없는 구조이다.)

2) A에 흰 공 한 개, B나 C에 흰 공 한 개 (2가지)

A에 흰 공 하나를 넣고 B에 흰 공 하나를 넣자.

그러면 역시 C에는 검은 공 하나가 들어가고

남은 검은 공 6개를 A, B, C에 분배하는 구조이므로

$P(6, 1) + P(6, 2) + P(6, 3)$ 이 된다.

(위와 같은 원리이다.)

$P(6, 1) = 1$, $P(6, 2) = 3$, $P(6, 3) = 3$

즉 총 7가지인데, B에 흰 공이 아닌 C에 흰 공을 넣는 경우도 같아 14가지이다.

따라서 $14 + 3 = 17$