2017학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(가형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 벡터의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

두 벡터 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(2,k)$를 더하면

$\vec{a}+\vec{b}=(3,2+k)$ 이다.

이 때, 이 벡터의 모든 성분의 합이 10 이므로

$3+(2+k)=10$ 이다.

$\therefore k=5$

2) [정답] ③ (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\sin\theta=\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

3) [정답] ① (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 이항분포의 표준편차를 구할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\frac{1}{4}\right)$을 따를 때의 표준편차를 구하면

$\sigma(X)=\sqrt{48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=3$ 이다.

4) [정답] ② (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 좌표공간에서 대칭이동시킨 점의 좌표를 구할 수 있는가?

[해설]

xy평면에 대하여 대칭이동한 점은 z좌표의 부호가 바뀌므로

$(3,4,-1)$ 이다.

$a+b+c=3+4-1=6$ 이다.

5) [정답] ③ (출제자 : 15 유정훈)

[출제의도] 배반사건의 정의를 알고, 이를 활용하여 문제를 풀 수 있는가?

[해설]

두 사건 A와 B가 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$ 을 만족한다.

두 번째 조건인 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}$ 를 보면,

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)$ 에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}$ 이다.

구하는 답 $\mathrm{P}(A\cup B)$ 는 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 와 같으므로,

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ 의 값인 $\frac{3}{8}$ 이다.

6) [정답] ③ (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r(2x)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{5-r}$ 이다.

$r=3$ 일 때 $\frac{1}{x}$ 의 계수를 구할 수 있으므로

$r=3$ 을 대입하면 ${}_5\mathrm{C}_3\times2^3=80$ 이고,

따라서 답은 80 이다.

7) [정답] ② (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각방정식을 풀 수 있는가?

[해설]

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 에서

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=5\cos\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\cos\beta=4\cos\alpha\sin\beta$ …… ㉠ 이다.

$\cos\alpha\cos\beta\neq0$ 이므로(아래 증명 참고) 양변에 $\cos\alpha\cos\beta$를 나누면

$(\text{좌변})=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

$(\text{우변})=4\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=4\tan\beta=4\times\frac{1}{2}=2$ 이다.

따라서 $\tan\alpha=2$ 이다.

(증명)

$\tan\beta=\frac{1}{2}$ 에서 $\cos\beta\neq0$이다.

$\cos\alpha=0$ 이라고 가정하면 식 ㉠에서 $\sin\alpha\cos\beta=0$ 이고 $\cos\beta\neq0$ 이므로 $\sin\alpha=0$ 이 된다. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq1$ 이므로 $\cos\alpha\neq0$ 이다.

8) [정답] ④ (출제자 : 16 김대현)

[출제의도] 한 점에서 만나는 두 직선의 교점을 구할 수 있는가?

[해설]

직선 $l: \dfrac{1-x}{2}=y+5,\ z=2$ 위의 임의의 점을 $(1-2k,\ k-5,\ 2)$ 라고 둘 수 있다.

두 직선의 교점은 직선 m 위에 존재하므로, $4-2k=\dfrac{k-5}{a}=2$ 이다.

여기서 $k=1$ 이고, $-\dfrac{4}{a}=2$ 이므로 $a=-2$ 이다.

9) [정답] ④ (출제자 : 13 이강산)

[출제의도] 중복조합을 이해하고 계산할 수 있는가?

[해설]

서로 구별되지 않는 10 개의 동전을 3 명의 사람에게 나누어 주는 경우이므로 중복조합을 활용한다.

이 때, 각자가 1000 원 이상씩은 받아야 하므로 모두 500 원짜리 동전 2 개 이상은 받아야한다는 것을 생각하면 4 개의 동전만 나누어 주면 되므로 방정식 $x+y+z=4$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

즉, ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

10) [정답] ② (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 평면도형에서 벡터의 내적 값을 계산할 수 있는가?

[해설]

구하고자하는 값은

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos(\angle\mathrm{CAH})=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AH}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4^2}=8$ 에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BH}}=3+8=11$ 이고,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AH}}=3\times 11=33$ 이다.

11) [정답] ① (출제자 : 16 김민지)

[출제의도] 미분법을 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=2\ln x+1$ 라고 하자.

$f(x)$ 를 미분하면 $f'(x)=\dfrac{2}{x}$

함수 $f(x)$ 의 그래프 위의 점$(e,3)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=\dfrac{2}{e}$ 이므로 점$(e,3)$ 에서의 접선의 방정식 l 은

$y-3=\dfrac{2}{e}(x-e)$

$y=\dfrac{2}{e}x+1$ 이다.

이 직선의 x 절편은 $-\dfrac{e}{2}$, y 절편은 1 이므로 이 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{e}{2}\times 1=\dfrac{e}{4}$ 이다.

12) [정답] ① (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 로그함수가 들어간 부등식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

로그의 진수조건에 의해 $x>-\dfrac{a}{3}$, $x>2$ 가 되고 a 는 자연수이기 때문에 $x>2$ 이 된다.

주어진 식을 정리하면 $\log_2(3x+a)\geq\log_2 8+\log_2(x-2)$ 이 되고

로그의 성질에 의해 $\log_2(3x+a)\geq\log_2(8x-16)$ 이 된다.

그리고 $y=\log_2 x$ 는 증가함수이기 때문에 $3x+a\geq 8x-16$ 이 되고

식을 정리하여 보면 $5x\leq a+16$ 이 된다.

그러므로 x 의 범위는 $2<x\leq\dfrac{a+16}{5}$ 이 되고 주어진 식을 만족하는 정수의 개수가 2 개가 되도록 해야하므로 $x=3$ 또는 $x=4$ 여야 한다.

따라서 $4\leq\dfrac{a+16}{5}<5$ 가 된다. 이 식을 정리하면 $4\leq a<9$ 가 되므로 모든 자연수 a 의 개수는 5 개다.

13) [정답] ④ (출제자 : 16 이희원)

[출제의도] 임의추출한 표본을 통해 모비율을 추정하고 신뢰구간의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

임의추출한 n 명 중 90% 가 단백질 보충제를 복용할 때, 모비율을 신뢰도 95% 로 추정한 신뢰구간은 다음과 같다.

$$0.9-1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}}\leq p\leq 0.9+1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}}$$

$$a=0.9-1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}},\quad b=0.9+1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}}$$

$$b-a=\left(0.9+1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}}\right)-\left(0.9-1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}}\right)$$

$$=2\times 1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}}$$

$$=2\times 1.96\times\frac{0.3}{\sqrt{n}}$$

$$b-a=2\times 1.96\times\frac{0.3}{\sqrt{n}}=0.0588$$

$$\frac{1.96}{\sqrt{n}}=0.098 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{n}=20$$

따라서 $n=400$ 이다.

14) [정답] ① (출제자 : 16 김민지)

[출제의도] 적분법을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

[해설]

선분 AB를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}\sqrt{t\sin t}$ 이고

원의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t)=\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{t\sin t}\right)^2=\frac{1}{4}\pi t\sin t$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\pi t\sin t\,dt=\frac{1}{4}\pi\left([-t\cos t]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos t)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{4}\pi\left(\pi+[\sin t]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{4}\pi^2$$

15) [정답] ② (출제자 : 11 양종현)

[출제의도] 매개변수로 정의된 곡선의 이동 거리를 구할 수 있는가?

[해설]

$\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2}{t}$ 이고 구하고자 하는 값은

$\int_1^2 \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ 이므로

(준식)

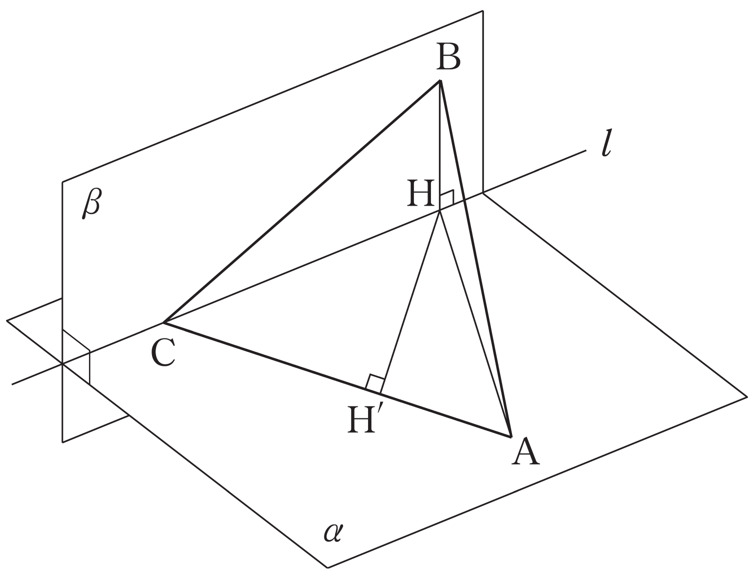
$$=\int_1^2 \sqrt{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2+\left(\frac{2}{t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2 \sqrt{\left(1-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)+\frac{4}{t^2}}\,dt$$
$$=\int_1^2 \sqrt{1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}}\,dt$$
$$=\int_1^2 \sqrt{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2 \left|1+\frac{1}{t^2}\right|dt$$
$$=\int_1^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt \quad (\because 1\le t\le 2 \text{ 일 때, } 1+\frac{1}{t^2}>0)$$
$$=\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^2$$
$$=\frac{3}{2}$$

따라서 답은 ② $\dfrac{3}{2}$ 이다.

16) [정답] ⑤ (출제자 : 15 이상민)

[출제의도] 삼수선의 정리를 사용할 수 있는가?

[해설]



삼각형 ABC는 한 변의 길이가 8인 정삼각형이므로 넓이가 $16\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.

삼각형 ABC와 평면 α 사이의 이면각을 알기 위해서 그림과 같이 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 H에서 선분 CA에 내린 수선의 발을 H′라 하면 삼수선 정리에 의하여 삼각형 ABC와 평면 α 사이의 이면각은 $\angle \mathrm{BH'H}$ 임을 알 수 있다.

선분 BH′의 길이는 정삼각형 ABC의 높이이므로 $\overline{\mathrm{BH'}}=4\sqrt{3}$ 이고

삼각형 HCA는 $\overline{\mathrm{HC}}=\overline{\mathrm{HA}}$ 인 이등변삼각형이므로

직각삼각형 HCH′에서 $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{CH'}}\times\tan\theta=4\times\dfrac{3}{2}=6$ 을 만족한다.

$\cos(\angle \mathrm{BH'H})=\dfrac{6}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

정삼각형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $16\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=24$ 이다.

17) [정답] ⑤ (출제자 : 15 유정훈)

[출제의도] 매개변수 함수를 미분하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

x, y의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$, $\dfrac{dy}{dt}=g'(t)$

이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

이다. 따라서 $x=f(t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{g'(t)}{f'(t)}(x-f(t))+g(t) \qquad \cdots\cdots (1)$$

이다.

점 A와 점 B의 중점은 $\left(\dfrac{t}{2},0\right)$ 이고 직선 AB의 기울기가 $-\dfrac{2}{t}$ 이므로 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4} \qquad \cdots\cdots (2)$$

이다.

(1)과 (2)가 같아야 하므로

$\dfrac{g'(t)}{f'(t)}=\dfrac{t}{2}$, $-\dfrac{g'(t)}{f'(t)}f(t)+g(t)=-\dfrac{t^2}{4}$ 을 만족해야 한다.

$-\dfrac{g'(t)}{f'(t)}f(t)+g(t)=-\dfrac{t^2}{4}$ 식의 $\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$에 $\dfrac{t}{2}$ 를 대입하면

$-\dfrac{t}{2}f(t)+g(t)=-\dfrac{t^2}{4}$ 이다,

$-\dfrac{t}{2}f(t)+g(t)=-\dfrac{t^2}{4}$ 의 양변은 t에 관해 미분하면

$-\dfrac{1}{2}f(t)-\dfrac{t}{2}f'(t)+g'(t)=-\dfrac{t}{2}$ 라는 식이 나오는데 $\dfrac{g'(t)}{f'(t)}=\dfrac{t}{2}$ 를 이용하여 $g'(t)=\dfrac{t}{2}f'(t)$ 를 대입하면, $f(t)=t$가 나오고, 이를 통해 $g(t)=\dfrac{t^2}{4}$ 라는 식이 나온다.

따라서 구하는 함수는 $x=t$, $y=\dfrac{t^2}{4}$ 이고 x와 y의 관계식을 통해 포물선 $x^2=4y$ 임을 알 수 있다.

구하는 $h_1(t)$ 는 $\dfrac{t}{2}$ 인 것을 알 수 있고, $h_2(t)$ 는 $\dfrac{t^2}{4}$ 인 것을 알 수 있으므로 구하는 답 $h_1(2)+h_2(4)$ 의 값은 $1+4=5$ 이다.

18) [정답] ③ (출제자 : 15 최봉규)

[출제의도] 타원의 정의를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\overline{\mathrm{AF'}}$ 을 x라고 하면 $\overline{\mathrm{BF'}}=3x$ (단, 길이는 양수이므로 $x>0$)

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{BF'}}=x+3x=4x$,

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=4x$

타원의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF}}=5x$

$\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{BF}}=5x$ 이므로 $\overline{\mathrm{BF}}=5x-3x=2x$,

$\overline{AH}=\overline{AF'}+\overline{F'H}=x+5$, $\overline{BH}=\overline{BF'}-\overline{F'H}=3x-5$

$\overline{FH}^2=\overline{AF}^2-\overline{AH}^2=\overline{BF}^2-\overline{BH}^2$ 이므로

$(4x)^2-(x+5)^2=(2x)^2-(3x-5)^2$

$15x^2-10x-25=-5x^2+30x-25$

$20x^2-40x=0$, $x=2$

$\therefore \overline{AF'}\times\overline{BF'}=3x^2=12$

[별해]

$\overline{AF'}$ 을 x 라고 하면 $\overline{BF'}=3x$ (단, 길이는 양수이므로 $x>0$)

$\overline{AB}=\overline{AF'}+\overline{BF'}=x+3x=4x$,

$\overline{AB}=\overline{AF}$ 이므로 $\overline{AF}=4x$

타원의 장축의 길이는 $\overline{AF'}+\overline{AF}=5x$, $\overline{BF'}+\overline{BF}=5x$ 이므로

$\overline{BF}=5x-3x=2x$

점 A에서 선분 BF에 내린 수선의 발을 H′라고 하면

삼각형 ABF는 이등변 삼각형이므로 $\overline{BH'}=\frac{1}{2}\overline{BF}=x$

$\angle ABH'=\theta$ 라고 하면 $\cos\theta=\frac{\overline{BH'}}{\overline{AB}}=\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$

$\overline{BH}=\overline{BF}\times\cos\theta=2x\times\frac{1}{4}=\frac{x}{2}$, $\overline{BF'}=5+\frac{x}{2}$

$\overline{BF'}$ 을 $3x$ 라고 했으므로 $5+\frac{x}{2}=3x$, $x=2$

$\therefore \overline{AF'}\times\overline{BF'}=3x^2=12$

19) [정답] ⑤ (출제자 : 12 황성문)

[출제의도] 미분을 통해 그래프의 개형을 추론하고 분석할 수 있는가?

[해설]

$-2<x<2$ 일 때, $f(x)=e^{-(x-2)(x+2)}-1$

$x<-2$ 혹은 $x>2$ 일 때, $f(x)=e^{(x-2)(x+2)}-1$이다.

ㄱ. $f(x)=e^{|x^2-4|}-1$

$f(-x)=e^{|(-x)^2-4|}-1=e^{|x^2-4|}-1$이므로

모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 이다.

ㄴ. $-2<x<2$ 에서 $f'(x)=(-2x)e^{-(x-2)(x+2)}$이고

$\lim_{x\to 2-}f'(x)<0$ 이다.

$x<-2$ 혹은 $x>2$ 일 때, $f'(x)=(2x)e^{(x-2)(x+2)}$ 이고

$\lim_{x\to 2+}f'(x)>0$ 이다.

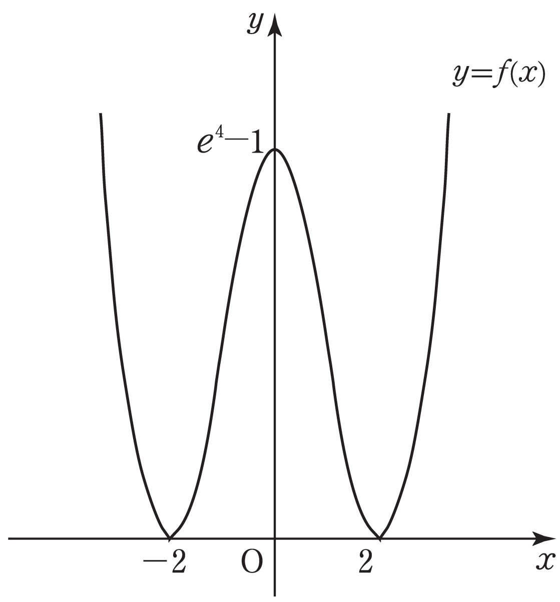
$\lim_{x\to 2-}f'(x)<0$ 이고 $\lim_{x\to 2+}f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ.

$f(x)$ 를 미분하여 아래 증감표를 만들 수 있다.

x		-2		0		2	
$f(x)$		0		e^4-1		0	
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$

증감표를 따라 그래프를 그려보면 아래 [그림]을 그릴 수 있다.



$g(x)=4x+8$ 이라 할 때, $f(-2)=0$ 이고 $g(-2)=0$ 이므로 $f(-2)=g(-2)$ 이고, [그림]에서 $x>0$ 인 부분에서 2 개의 실근이 생긴다.

$\lim_{x\to -2+}f'(x)=4$ x 의 값이 증가하여 $x=0$ 이 될 때까지 미분계수가 증가하며 $\lim_{x\to -2+}g'(x)=4$ 이고 x 의 값이 증가하여도 미분계수는 그대로이다.

따라서 $x=-2$ 에서 단 하나의 근만 생긴다.

그러므로 방정식 $f(x)=4x+8$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3 개이다.

20) [정답] ④ (출제자 : 15 유정훈)

[출제의도] 벡터의 분해를 통한 내적의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 ABC의 밑변을 BC라 하고 점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{BC}=4$ 이고 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AH}=2\sqrt{2}$ 이다.

중심이 O이고 반지름의 길이가 r 인 구가 삼각형과 한 점 P에서 접하고 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AP}$ 라는 조건에서 양변을 2로 나누면

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AP}$ 로 쓸 수 있는데 이를 통해 직선 AP는 선분 BC의 중점 H을 지나고 점 P는 선분 AH의 중점임을 알 수 있다.

한편, 평면 OBC와 평면 α 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인데,

선분 OP의 길이는 r 이고, 선분 PH의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로,

$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{r}{\sqrt{2}}=1$ 에서 $r=\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

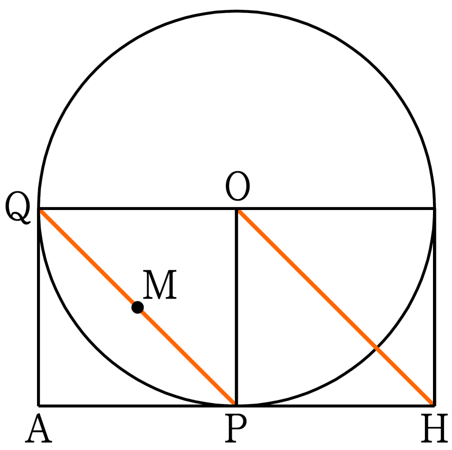
점 Q가 직선 OA와 직선 PQ가 수직인 조건을 만족하며 구 위를 움직이므로 직선 OA는 두 점 P, Q를 포함하는 평면에 수직이다.

점 Q는 점 P를 지나고 직선 OA와 수직인 평면이 구와 만나서 생기는 원 C 위를 움직인다. 또한 선분 PA의 길이와 선분 PO의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 것을 구하면 선분 OA의 길이는 2이고, 직선 OA를 원 C를 포함하는 평면의 법선벡터로 보면 원 C를 포함하는 평면과 α 가 이루는 각이 45°인 것을 알 수 있다.

원 C의 중심을 M이라 하면 선분 OA의 중점이 M이므로 원 C를 포함하는 평면은 구의 중심 O와 1 만큼 떨어져 있다는 것을 알 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 의 최댓값을 구하기 위해 벡터를 분해하자.
원 C의 중심이 M이고, $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}})$에서 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$를 구해보자.
i) 평면 OBC와 평면 α가 이루는 각이 45°이고, 원 C를 포함하는 평면과 α가 이루는 각 또한 45°인 것과
ii) 두 평면이 각각 α와 만나서 생기는 교선이 평행하므로,
평면 OBC와 원 C를 포함하는 평면이 평행함을 알 수 있다.
따라서 평면 OBC와 수직인 직선이 직선 OM이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$이 수직이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=0$이다.
$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$는 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$를 포함하는 평면과 $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$를 포함하는 평면이 평행하고 $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$는 길이가 항상 1로 일정하므로 두 벡터가 서로 같은 방향일 때, $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$의 값이 최대가 된다.
$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$는 원 C의 반지름이 1이고, $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$의 길이가 $2\sqrt{2}$이기 때문에 최댓값이 $2\sqrt{2}$이다.
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ 의 최댓값은
$2\sqrt{2}$ 이다.

[참고]



(위의 그림은 중심이 O인 구를 선분 AH를 포함하고 평면 α에 수직인 평면으로 자른 단면의 모습이다.)

21) [정답] ④ (출제자 : 11 양종현)

[출제의도]

① 정규분포의 표준화를 이용하여 복잡한 함수의 그래프의 해석을 간단하고 빠르게 할 수 있는가?

② 새로운 방정식과 함수가 주어졌을 때, 그 의미를 해석할 수 있는가?

③ 표준정규분포표를 이용하여 주어진 확률을 구할 수 있는가?

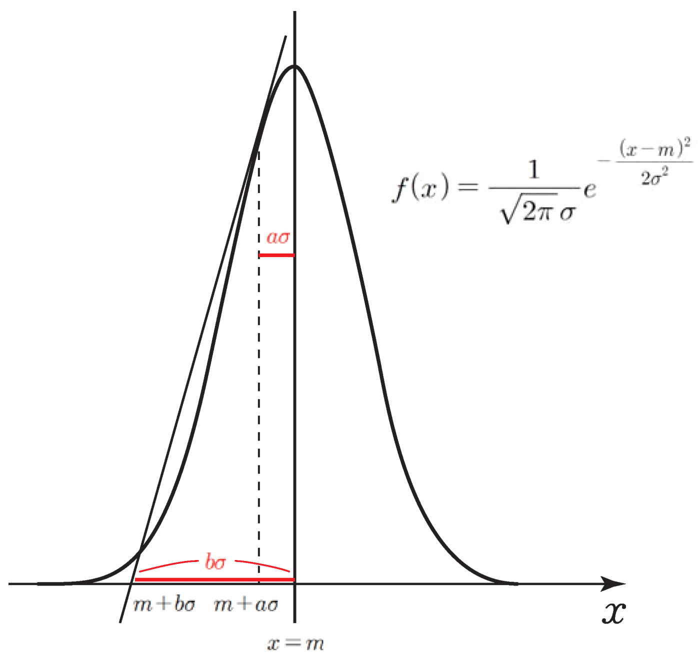
[해설]

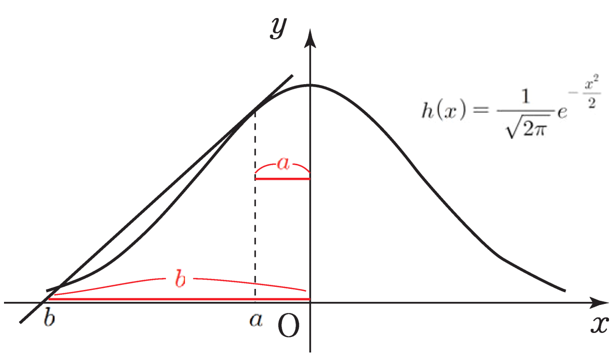
정규분포를 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$를 표준화한 표준정규분포의 확률밀도함수를 $h(x)$라고 하면 $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 이다. ($m=0$, $\sigma=1$ 대입 // [교과서 기본개념] 참고)

곡선 $y=h(x)$는 곡선 $y=f(x)$의 다음 과정들을 거쳐서 만들 수 있다.
$h(x)=\sigma f(\sigma x+m)$ 이므로

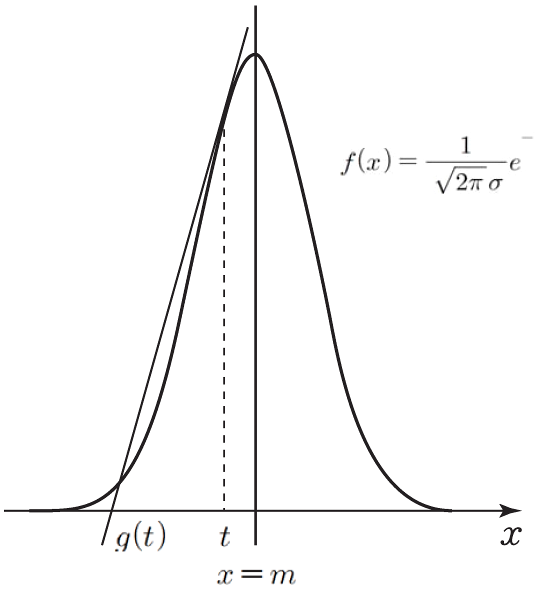
$y=f(x)$
↓ x축의 방향으로 좌우 $\dfrac{1}{\sigma}$배 확대·축소
$y=f(\sigma x)$
↓ x축으로 $-\dfrac{m}{\sigma}$ 만큼 평행이동
$y=f(\sigma x+m)$
↓ y축의 방향으로 상하 σ배 확대·축소
$y=\sigma f(\sigma x+m)$

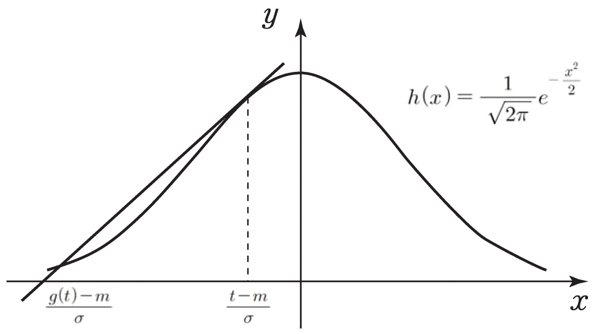
표준화는 평행이동, 좌우로 확대, 상하로 축소 ($\sigma>1$에서)임을 인지하고 $z=\dfrac{x-m}{\sigma}$는 일대일대응이면서 일차함수이다. 따라서 표준화하기 전의 곡선과 표준화한 후의 곡선이 사실상 같은 성질을 가진다는 것을 인지한다. 여기서 같은 성질이란, 변곡점이 되는 지점이 대칭축으로부터 떨어진 정도, 접선에서의 x절편이 대칭축으로부터 떨어진 정도 등이 정확히 σ배만큼 차이가 있다는 것이다.





특히 문제에서 주어진 x절편 $g(t)$를 표준화한 $z=\dfrac{g(t)-m}{\sigma}$ 값은 t를 표준화한 지점에서의 접선의 x절편과 같음을 알 수 있다.





따라서 표준정규분포의 확률밀도함수 $y=h(x)$ 위의 점 $(t,\ h(t))$ 에서의 접선의 방정식 $y=h'(t)(x-t)+h(t)$ 자리에 $(z,\ 0)$ 대입하여 생각해볼 수 있다. 즉, $0=h'(t)(z-t)+h(t)$ 가 성립한다.

한편 $z=\dfrac{g(t)-m}{\sigma}$ 로부터 $|g(t)-m|=|\sigma z|=\sigma|z|$ ($\because \sigma>0$)
이므로 $|g(t)-m|$ 가 최솟값을 가진다는 것은 $|z|$ 가 최솟값을 가진다는 것과 필요충분조건이다.

그런데

$$z=-\frac{h(t)}{h'(t)}+t=-\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-t)e^{-\frac{1}{2}t^2}}+t=\frac{1}{t}+t\ \ (t\neq 0)$$

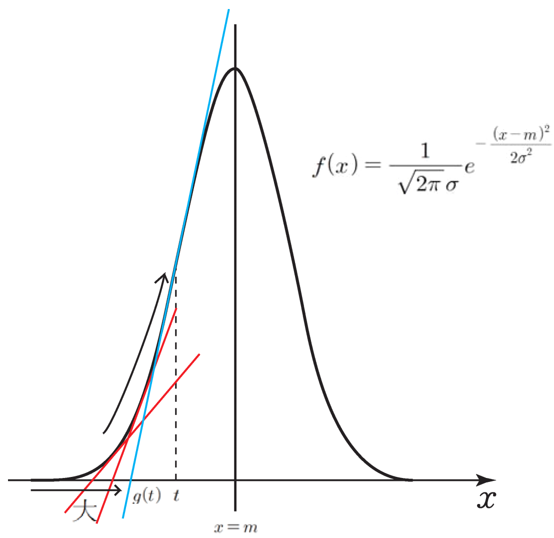
는 $z>0,\ t>0$ 일 때, 산술기하평균에 의해 $t=1$ 일 때 최솟값을 갖는다.
또한 $z<0,\ t<0$ 일 때, $t=-s$ 로 치환하면 $s>0$ 이고, $-z=\dfrac{1}{s}+s$ 로부터 $|z|\ (=-z)$ 는 $s=1$ 에서 최솟값을 갖는다. 즉, $|z|$ 는 $t=-1$ 에서도 최솟값을 갖는다.

종합해보면 표준화를 하고 나서는 $t=\pm 1$ 에서 $|z|$ 가 최솟값을 가진다.
이는 곧, 표준화를 하기 전에는 $m+\sigma$, $m-\sigma$ 에서 최솟값을 가진다는 말이므로 (직접 표준화의 역과정을 취해보거나 별해 I 의 그림 참고), $m-\sigma=4$, $m+\sigma=8$ 로부터 $m=6$, $\sigma=2$ 이다.

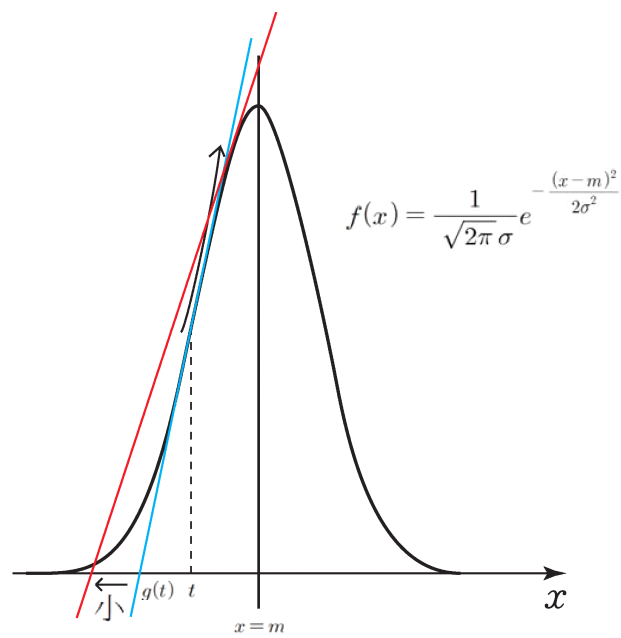
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(2\le X\le 10)&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)\\&=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=2\times 0.4772\\&=0.9544\end{aligned}$$

이다. 따라서 답은 ④ 0.9544 이다.

[별해 I]
정규분포와 표준정규분포의 변곡점이 있음을 예측하고, $g(t)$ 가 변곡점에서의 접선의 x 절편일 때, 함수 $|g(t)-m|$ 이 최솟값을 가짐을 예측할 수 있다면 다음과 같이 문제를 해결할 수 있다.



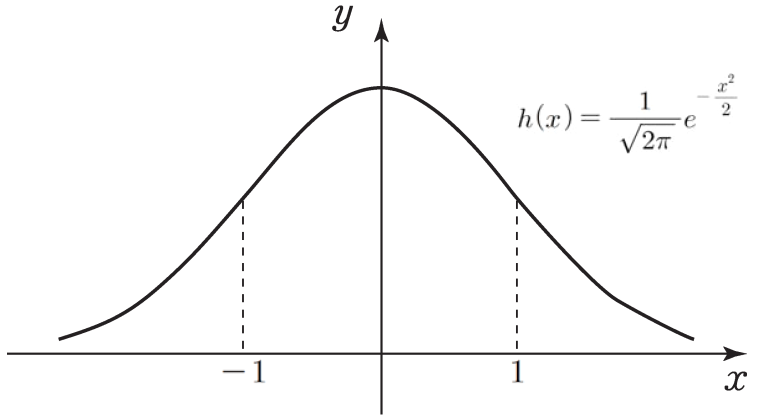
t 가 변곡점에서의 x 좌표 값보다 작다면, $g(t)$ 는 증가한다.



t 가 변곡점에서의 x 좌표 값보다 크다면, $g(t)$ 는 감소한다.

위 그림과 같이 대칭축을 기준으로 왼쪽에 있는 변곡점 주변에서 접선의 방정식의 변화를 살펴보자. 변곡점의 왼쪽 근방에서 t 가 증가할수록, x 절편 값은 증가하고 있음을 알 수 있다. 반대로 변곡점의 오른쪽 근방에서 t 가 증가할수록, x 절편 값은 감소하고 있음을 알 수 있다. 이러한 현상은 $t\to m-$ 까지 지속되며, $t<m$ 일 때, $|g(t)-m|$ 은 t 가 변곡점의 x 좌표일 때 최솟값을 갖는다.
$t>m$ 에서도 비슷한 상황이 일어나며, $t<m$ 일 때와 $t>m$ 일 때의 최솟값은 같다는 사실을 대칭성을 통해 알 수 있다. 따라서 표준정규분포의 확률밀도함수 $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 가 어느 점에서 변곡점을 갖는지를 인하면 된다.

$h'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, $h''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$
이므로 함수 $y=h(x)$ 는 $x=\pm 1$ 에서 변곡점을 갖는다.



각각의 x 값은 표준화의 역과정을 거치면 $x=m+\sigma$, $x=m-\sigma$ 임을 알 수 있고, 이후의 풀이는 동일하다.

[별해Ⅱ]
별해Ⅰ처럼 변곡점에서의 접선임은 깨달았으나, 표준화시키는 방법을 몰랐거나 떠올리지 못했을 경우에는

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left\{\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}-1\right\}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=0$$

이 되는 두 점 $x=m+\sigma$, $m-\sigma$ 를 구하여도 답은 나온다.

[출제자의 말]
정규분포의 확률밀도함수는 교과서에 실려 있는 기본개념이므로 최근 수능, 평가원에 나오지 않았다고 소홀히 하지 마시고, 개념을 익혀두시길 바란다는 차원에서 만든 문제입니다. 하지만 최근 수능, 평가원에 나오지 않은 점과 97 년도 수능 문제를 고려하여 확률밀도함수의 식을 문제에서 직접 제시하여 암기 없이 풀 수 있도록 문제를 구성하였습니다. 신유형의 출제 근거는 아래 표에서 성취기준 '상'을 참고하였습니다.

교육과정 내용	성취기준	핵심 성취 기준	성취수준	
				편차를 구할 수 있다.
			하	간단한58) 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
④ 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.	확통1314-1. 정규분포의 뜻을 알고, 정규분포를 나타내는 곡선의 성질을 이해한다.		상	정규분포의 뜻을 알고 정규분포의 확률밀도함수를 이용하여 정규분포를 나타내는 곡선의 성질을 파악하고 설명할 수 있다.
			중	정규분포의 뜻을 알고 정규분포를 나타내는 곡선의 성질을 말할 수 있다.
			하	정규분포의 뜻을 말할 수 있다.
	확통1314-2. 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있다.	✓	상	표준화의 필요성과 그 과정을 이해하고, 표준정규분포를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
			중	표준정규분포를 활용하여 간단한 정규분포59)의 확률을 구할 수 있다.
			하	표준정규분포와 표준화의 뜻을 말할 수 있다.

출처 : 변희현 외, 2009 개정 교육과정에 따른 고등학교 수학과 핵심 성취기준 개발 연구, 한국교육과정평가원, 부록 183쪽

[교과서 기본개념]

일반적으로 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음과 같을 때, 확률변수 X는 **정규분포**를 따른다고 한다.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (x\text{는 모든 실수})$$

여기서, m과 σ $(\sigma>0)$는 각각 확률변수 X의 평균과 표준편차를 나타내는 상수이며, e는 그 값이 $2.718281\cdots$인 무리수이다.

평균이 m이고 표준편차가 σ, 즉 분산이 σ^2인 정규분포를 기호로

$\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$

과 같이 나타낸다.

출처 : 이강섭 외, 확률과 통계, 미래엔, 111쪽

평균이 0이고 분산이 1인 정규분포를 **표준정규분포**라고 하며, 이것을 기호로

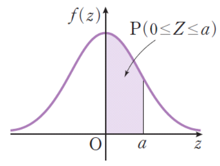
$\mathrm{N}(0,\ 1)$

과 같이 나타낸다.

확률변수 Z가 표준정규분포를 따르면 Z의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (z\text{는 모든 실수})$$

이때 Z가 $0\le Z\le a$일 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le a)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고, 그 값은 부록에 있는 표준정규분포표에 주어져 있다.



출처 : 이강섭 외, 확률과 통계, 미래엔, 112쪽

[같이 풀어보면 좋은 문제]

12. 연속확률변수 X 가 평균 m , 표준편차 σ 인 정규분포를 따를 때, X 의 확률밀도함수는

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$$

$(-\infty < x < \infty)$

이다. 아래의 표준정규분포표를 이용하여

$$\int_4^{6.6}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}dx$$

의 근사값을 구하면? [2 점]

① 0.1199
② 0.3864
③ 0.6826
④ 0.9505
⑤ 1.9184

표준정규분포표

z	$P(0 < Z \le$
0.1	0.0398
0.2	0.0793
0.3	0.1179
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580
0.8	0.2881
0.9	0.3159
1.0	0.3413

출처 : 1997학년도 대수능 자연계 12번

22) [정답] 10　(출제자 : 15 오민지)
[출제의도] 지수함수의 미분을 할 수 있는가?

[해설]
$f(x)=5e^{2x-4}$ 를 미분하면
$f'(x)=5e^{2x-4}\times 2=10e^{2x-4}$ 이다.
$\therefore f'(2)=10e^0=10$

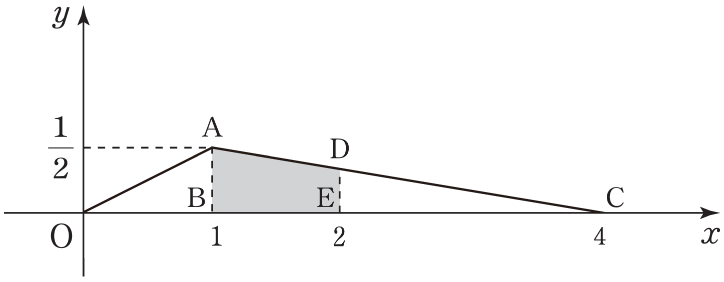
23) [정답] 5　(출제자 : 15 오민지)

[출제의도] 확률밀도함수를 보고 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

확률 $\mathrm{P}(1 \le X \le 2) = a$ 는 다음 그래프에서 색칠된 부분의 넓이를 의미한다.

닮음을 이용하여 길이를 구할 수 있다.



$\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{DEC}$ 이고, 닮음비는 $3:2$ 이다.

선분 AB의 길이가 $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ 이므로 선분 DE의 길이는 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이다.

사다리꼴의 넓이를 구하면

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ 이다.

$\therefore 12a = 5$

[별해]

직선의 방정식을 구해서 선분 DE의 길이를 구할 수 있다.

$y = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$ $(1 \le x \le 4)$ 이므로 함수의 그래프는 $\left(2, \frac{1}{3}\right)$ 을 지난다.

24) [정답] 26　(출제자 : 13 이강산)

[출제의도] 음함수의 미분법을 사용하여 도함수를 구할 수 있는가?

[해설]

음함수로 표현된 곡선의 방정식이므로, 음함수 미분법을 사용하여 양변을 미분하면

$\frac{dy}{dx} = 1 - 4\cos y \frac{dy}{dx}$ 이고, 식을 정리하면 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + 4\cos y}$ 이다.

주어진 점은 좌표가 $(0, 0)$ 이므로 원점이고, 우변의 y 에 0을 대입하면 원점에서의 접선의 기울기를 알 수 있다.

따라서 $\frac{q}{p} = \frac{1}{5}$ 이므로 정답은 $1^2 + 5^2 = 26$ 이다.

25) [정답] 8　(출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 확률변수 X 에 대응하는 확률을 구하고 평균을 계산할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2 이다.

$X = 0$ 일 때, 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_0 \times {}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ 이다.

$X = 1$ 일 때, 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ 이다.

$X = 2$ 일 때, 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ 이다.

$\mathrm{E}(X)$ 의 값은 $0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$ 이다.

따라서 $\mathrm{E}(7X) = 7\mathrm{E}(X) = 8$ 이 답이다.

26) [정답] 7　(출제자 : 16 이희원)

[출제의도] 자연수의 분할을 응용할 수 있는가?

[해설]

우선 사탕들을 4개의 덩어리로 나누어보자.

이 경우의 수는 $\mathrm{P}(7, 4)$ 와 같다.

$7 = 4 + 1 + 1 + 1$

$7 = 3 + 2 + 1 + 1$

$7 = 2 + 2 + 2 + 1$

이므로 $\mathrm{P}(7, 4) = 3$ 이다.

① $7 = 4 + 1 + 1 + 1$

이 경우 4개의 사탕을 민주가 가져야 하고, 나머지 세 사람은 각각 1개씩 가지면 되므로 경우의 수는 1가지이다.

② $7 = 3 + 2 + 1 + 1$

이 경우 3개의 사탕을 민주가 가져야 하고, 사탕 2개를 가져갈 사람을 한 명 골라야 하므로 경우의 수는 3가지이다.

③ $7 = 2 + 2 + 2 + 1$

이 경우 2개의 사탕을 민주가 가져야 하고, 사탕을 1개 가져갈 사람 한 명을 고르면 되므로 경우의 수는 3가지이다.

따라서 모든 경우의 수는 $1 + 3 + 3 = 7$ (가지)이다.

27) [정답] 6　(출제자 : 12 황성문)

[출제의도] 조건부 확률을 이용해 문제에서 물어보는 것을 구할 수 있는가?

[해설]

뽑은 공이나 버린 공 중에서 빨간 공이 있을 때, 상자 B에 검은 공이 있을 확률을 구해야한다.

경우를 두 가지로 생각할 수 있다.

(1) 뽑은 공이 빨간 공일 때

(2) 버린 공이 빨간 공일 때

(1) 의 경우 뽑은 공이 빨간 공이어야 하므로 $\frac{3}{5}$ 이다.

(2) 의 경우 버린 공이 빨간 공이어야 하므로 검은 공을 뽑아 빨간 공을 버려야한다. 즉 $\frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$

이 두 가지 경우 중 (2) 만이 검은 공이 상자 B로 들어가므로 문제에서 요구하는 확률은 $\frac{(2)}{(1)+(2)}$ 라고 할 수 있다.

즉, $\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{5} + \frac{3}{20}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{15}{20}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ 이다.

따라서 $p = 5$, $q = 1$ 이므로 $p + q = 6$ 이다.

28) [정답] 25 (출제자 : 16 안성준)

[출제의도] 도형에서 삼각함수의 극한을 이해할 수 있는가?

[해설]

삼각형 ABC 에 대하여 $\angle CAD = \angle DCB = \theta$ 이고, $\overline{AB}=1$ 이므로

$\overline{BC}=\tan\theta$, $\overline{BD}=\tan^2\theta$, $\overline{AD}=1-\tan^2\theta$, $\overline{CD}=\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}$,

$\overline{AC}=\dfrac{1}{\cos\theta}$ 이다.

내접원의 반지름 길이를 $r(\theta)$ 이라 하면 삼각형 ACD 의 넓이는

$\triangle ACD = \dfrac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{BC}=\dfrac{1}{2}r(\theta)\times(\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{CD})$

위 식을 이용하여 $r(\theta)$ 의 값을 구하면

$$r(\theta)=\frac{\overline{AD}\times\overline{BC}}{\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{CD}}=\frac{(1-\tan^2\theta)\tan\theta}{\sec\theta+1-\tan^2\theta+\tan\theta\sec\theta}$$

$$=\frac{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)\tan\theta}{(1+\tan\theta)(1-\tan\theta+\sec\theta)}$$

$$r(\theta)=\frac{\tan\theta\,(1-\tan\theta)}{1-\tan\theta+\sec\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta\,(\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta})}{\dfrac{\cos\theta-\sin\theta+1}{\cos\theta}}=\frac{\tan\theta\,(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta+1}$$

$$S(\theta)=\left\{\frac{\tan\theta\,(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta+1}\right\}^2\pi=\tan^2\theta\left\{\frac{(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta+1}\right\}^2\pi$$

$$\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\left\{\frac{(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta+1}\right\}^2\pi$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\left\{\frac{(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta+1}\right\}^2\pi=\frac{1}{4}\pi$$

$a=\dfrac{1}{4}$ 이고, 그러므로 $100a=25$

뒷면에 29번, 30번 해설이 있습니다.

29) [정답] 53 (출제자 : 13 오인수) (컬러로 보세요!!)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 도형의 위치 관계를 파악하여

① 두 평면의 이면각을 구할 수 있는가?

② 평행한 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

[출제자의 말]

'[해설]'을 읽을 때, 단계별로 잘 이해하면서 따라오시길 바랍니다.
수험생 여러분의 수능 대박을 기원합니다.

[해설]

1. 대략적인 '위치'와 '구하고자 하는 값' 파악하기

① 구 $S: x^2+y^2+z^2=25$ 는 원점을 중심으로 하고
반지름의 길이가 5 이므로 점 $\mathrm{A}(0,0,5)$ 를 지나고,
평면 $\alpha: x+2\sqrt{2}y+4(z-5)=0$ 는
점 $\mathrm{A}(0,0,5)$ 를 지나므로, 점 $\mathrm{A}(0,0,5)$ 는
구 S 와 평면 α 가 만나서 생기는 원 C 위에 있다.

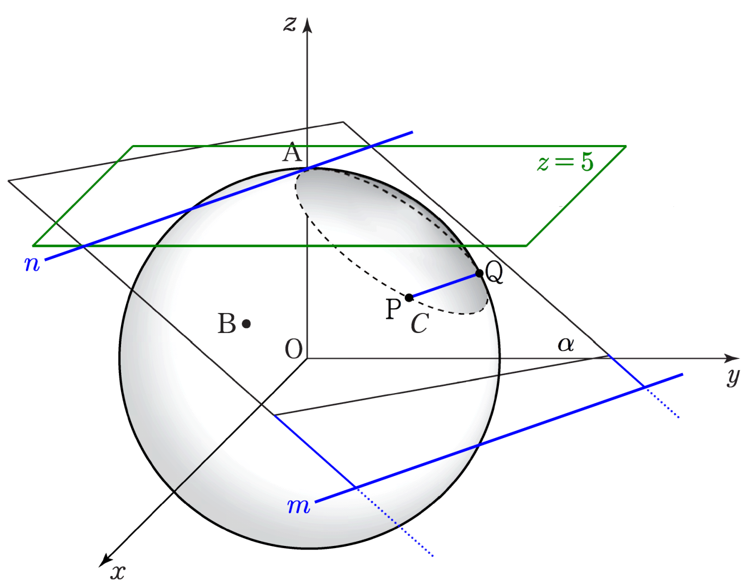
② 직선 PQ 는 z축과 서로 수직이고, z축은 xy 평면에 수직이므로
직선 PQ 는 xy 평면에 평행하다.

③ 세 점 A, P, Q 는 평면 α 위에 있으므로
평면 APQ 는 평면 α 라 할 수 있다.

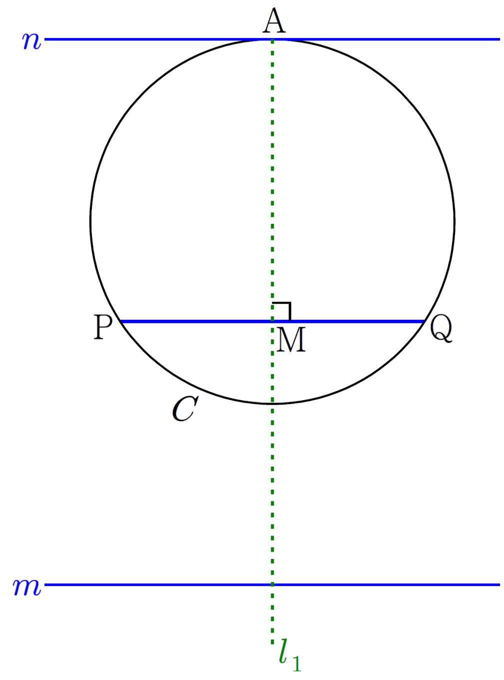
④ 따라서 평면 APQ 와 평면 BPQ 가 이루는 예각의 크기 θ 는
평면 α 와 평면 BPQ 가 이루는 예각의 크기와 같다.

⑤ 평면 α 와 평면 BPQ 의 교선은 직선 PQ 이므로
직선 PQ 에 수직인 '평면 α 위의 직선'을 l_1 이라 하고,
직선 PQ 에 수직인 '평면 BPQ 위의 직선'을 l_2 라 하면,
두 직선 l_1, l_2 가 이루는 예각의 크기가 θ 이다.

⑥ 한편, 점 $\mathrm{A}(0,0,5)$ 는 구 S 와 평면 $z=5$ 의 접점이므로
평면 α 에서 점 A 와 원 C 위의 두 점 P, Q 의 위치관계는
다음 그림과 같다.
[보충] 평면 $z=5$ 는 xy 평면에 평행하다는 점에 유의합니다.



(그림 설명)
직선 m : 평면 α 와 xy 평면의 교선
직선 n : 평면 α 와 평면 $z=5$ 의 교선



⑦ 이때 선분 PQ 의 중점을 M 이라 하면,
직선 l_1 은 직선 AM 이라 할 수 있다.
[보충] 점 A 에서 선분 PQ 에 내린 수선의 발이 점 M 입니다.

⑧ 한편, 구하고자 하는 값은 삼각형 BPQ 의 넓이이므로
점 B 와 직선 PQ 사이의 거리를 h 라 하면,
삼각형 BPQ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times h$ 이다.

2. 구체적인 '위치'와 '구하고자 하는 값' 파악하기

① '1.'에서 평면 APQ 와 평면 BPQ 가 이루는 예각의 크기 θ 는
직선 AM 과 직선 l_2 가 이루는 예각의 크기와 같음을 보였다.

② 직선 AM 과 직선 l_2 가 이루는 예각을 구체적으로 알기위해
점 M 에서 '점 B 를 지나고, 직선 PQ 에 평행한 직선 (직선 l)'에
내린 수선의 발을 H 라 하면,
직선 AM 과 직선 l_2 가 이루는 예각은 $\angle$AMH 라 할 수 있다.

③ 직선 PQ 는 '평면 α 와 xy 평면의 교선 (직선 m)'에 평행하므로
직선 PQ 의 방향벡터는 직선 m 의 방향벡터와 같다고 할 수 있고,
직선 m 의 방정식은
$\alpha: x+2\sqrt{2}y+4(z-5)=0$ 에 $z=0$ 을 대입하면,
$m: x+2\sqrt{2}y=20$, $z=0$ 이다.
[보충] 정확히는 두 직선 PQ, m 의 방향벡터가 평행한 것입니다.
이때, 두 방향벡터가 같다고 해도 괜찮습니다.

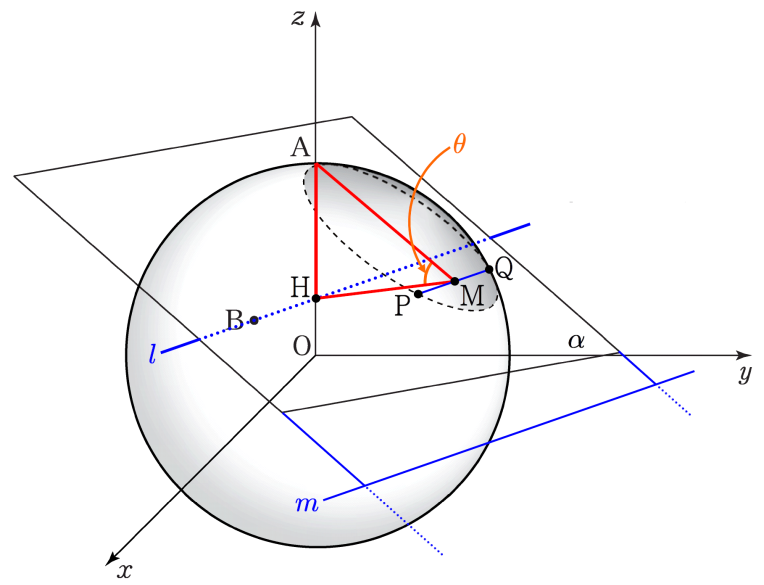
④ 따라서 직선 l 의 방정식은
i) 점 $\mathrm{B}(4, -\sqrt{2}, 1)$ 를 지나고,
ii) 직선 m 의 방향벡터와 같다고 할 수 있으므로
$l: (x-4)+2\sqrt{2}(y+\sqrt{2})=0$, $z=1$
즉, $l: x+2\sqrt{2}y=0$, $z=1$ 이다.
[보충] 두 직선의 방향벡터가 같다. ⇔ 두 직선의 기울기가 같다.

⑤ 한편, 직선 l은 'z축과 서로 수직인 직선 PQ'에 평행하므로
직선 l과 z축 (직선 OA)은 서로 수직이고,
직선 AM은 '직선 l에 평행한 직선 PQ'에 수직이므로
직선 l과 직선 AM은 서로 수직이다.

⑥ 따라서 직선 l은 평면 OAM에 수직이므로
점 M에서 직선 l에 내린 수선의 발 H는
평면 OAM과 직선 l이 만나는 점이다.

⑦ 이때 평면 OAM은 z축을 포함하고
직선 l은 z축 위의 점 $(0,0,1)$을 지나므로
점 H는 $\mathrm{H}(0,0,1)$이라 할 수 있다.

* ①~⑦의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

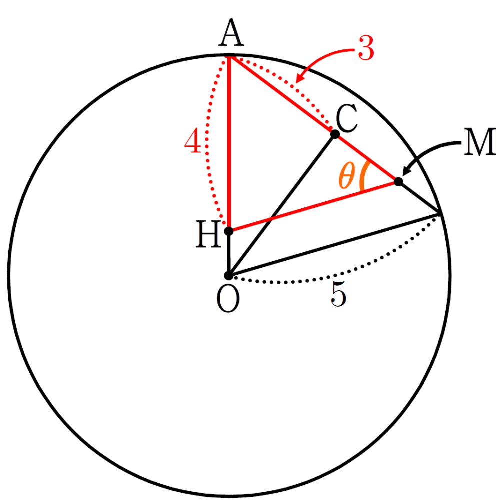


⑧ 한편, 원점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 C라 하면
원점 O와 평면 α 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OC}}=\frac{|-20|}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2+4^2}}=\frac{20}{\sqrt{25}}=4 \text{ 이고,}$$

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3 \text{ 이다.}$$

⑨ 평면 OAC는 두 점 M, H를 포함하므로
구와 평면 OAC가 만나는 교선을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



⑩ $\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{AMH})=\frac{3}{5}$에서

$\cos(\angle\mathrm{OAC})=\cos(\angle\mathrm{HAM})=\frac{3}{5}$ 이므로

$\therefore\ \angle\mathrm{AMH}=\angle\mathrm{HAM}$ 이다.

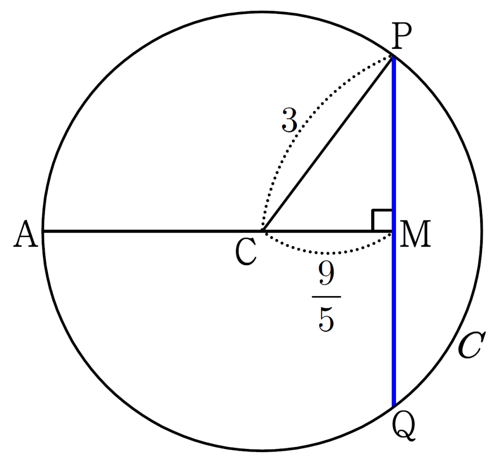
[보충] $\angle\mathrm{AMH}=180^\circ-\angle\mathrm{HAM}$이라 생각할 수도 있지만,
$\angle\mathrm{AMH}+\angle\mathrm{HAM}<180^\circ$ 이어야하므로 불가능합니다.

⑪ 따라서 삼각형 AHM은 $\overline{\mathrm{HM}}=\overline{\mathrm{HA}}$인 이등변삼각형이므로
구하고자 하는 값 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times h$에서 $h=\overline{\mathrm{HM}}=\overline{\mathrm{HA}}=4$ 이다.

⑫ 한편, $\overline{\mathrm{AM}}=2\times(\overline{\mathrm{AH}}\cos\theta)=2\times(4\cos\theta)=\frac{24}{5}$ 이므로

$\overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{AM}}-\overline{\mathrm{AC}}=\frac{24}{5}-3=\frac{9}{5}$ 이다.

⑬ 원 C를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



⑭ $\overline{\mathrm{PQ}}=2\times\overline{\mathrm{PM}}=2\times\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CM}}^2}$ 에서

$\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CM}}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{12}{5}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\times\frac{12}{5}=\frac{24}{5}$ 이다.

⑮ 따라서 구하고자 하는 값인 삼각형 BPQ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times h=\frac{1}{2}\times\frac{24}{5}\times4=\frac{48}{5}$ 이다.

⑯ 따라서 $p=5$, $q=48$이므로 $\therefore\ p+q=53$

30) [정답] 12 (출제자 : 11 양종현)

[출제의도]

① 도함수와 이계도함수를 이용하여 주어진 함수의 그래프의 개형을 파악할 수 있는가?

② 주어진 열린구간 I에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$ 이면 함수 $f(x)$ 가 상수함수임을 알고 있는가?

[해설]

[출제자의 말 + 목차]

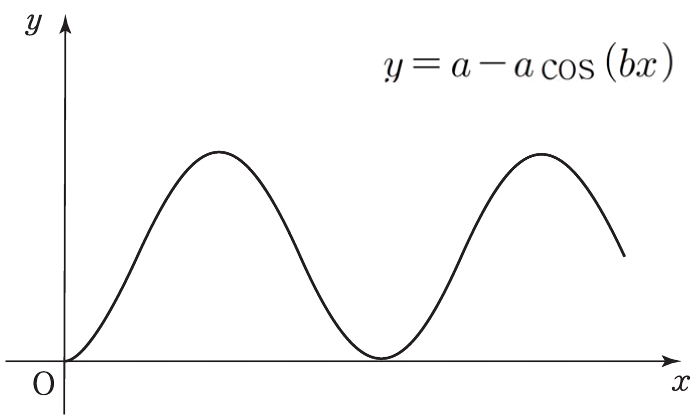
> [해설] → [별해] → [증명 Ⅰ~Ⅴ] →
> [같이 풀면 좋은 문제 Ⅰ~Ⅲ] → [교과서 기본개념 Ⅰ~Ⅱ]
> 순서로 구성되어 있습니다. [증명 Ⅰ~Ⅴ]는 [해설]의 그림(직관)에서 이해되지 않는 학생들이 보면 좋고, 그 외에 엄밀한 논리가 필요한 학생들이 보면 좋을 것 같습니다.
> 증명은 형식적이기 때문에, 이 방법이 개념 이해에 최선이라고 할 수는 없습니다. 다만, 평가원 기출문제에서 최근 반복적으로 나왔던 개념이기에, 다음에 맞닥뜨렸을 경우 의심 없이 직관을 사용하라는 의미에서 증명을 보여드리는 것입니다. 이 해설에서 직관으로 푸는 설명은 드리지 않고 있으며, 그에 대한 부분은 직접 연구하여 이해하시길 바랍니다.

[해설] (11쪽에서 끝남)

함수 $f(x)$ 가 연속함수이고, $y=|x|$ 역시 연속함수이므로 합성함수 $y=|f(x)|$ 도 연속함수이다. 따라서 적분과 미분의 관계(미적분학 제1기본정리)에 의하여 $g(x)=\int_0^x |f(t)|\,dt$ 의 양변을 미분하면 $g'(x)=|f(x)|$ 이다.

한편 $0 \le x \le 2\pi$ 일 때, $f(x)=a-a\cos(bx) \ge 0$ 이므로 ($\because -1 \le \cos(bx) \le 1$) $g'(x)=|f(x)|=f(x)=a-a\cos(bx)$ 이다.

함수 $y=a-a\cos(bx)$ 의 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.



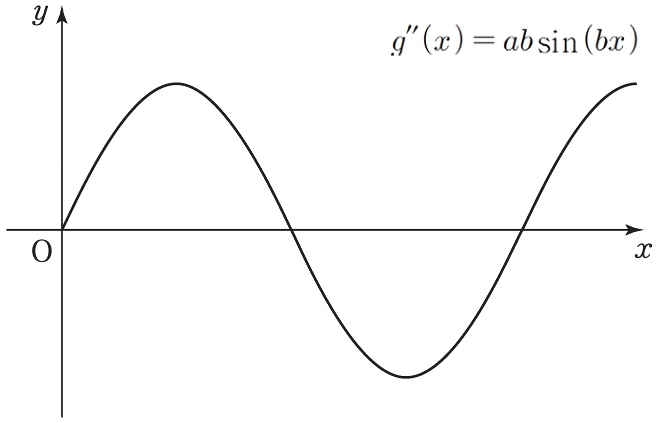
닫힌구간 $[0,\,2\pi]$ 에서 $g'(x)=a-a\cos(bx)$ 이므로 열린구간 $(0,\,2\pi)$ 에서 $g''(x)=ab\sin(bx)$ 이다. 이는 결과적으로 닫힌구간 $[0,\,2\pi]$ 에서 $g''(x)=ab\sin(bx)$ 가 성립하게 된다. ([증명Ⅰ]과 [같이 풀면 좋은 문제 Ⅰ])

또한 (나) 조건 $(x-\pi)g''(x) \le 0$ 을 다음과 같이 해석할 수 있다.

ⅰ) $x>\pi$ 이면 $g''(x) \le 0$

ⅱ) $x<\pi$ 이면 $g''(x) \ge 0$

($x=\pi$ 에서는 이미 $(\pi-\pi)g''(\pi) \le 0$ 가 $g''(\pi)$ 값에 관계없이 성립하므로, 추가적인 정보를 얻을 수 없다.)

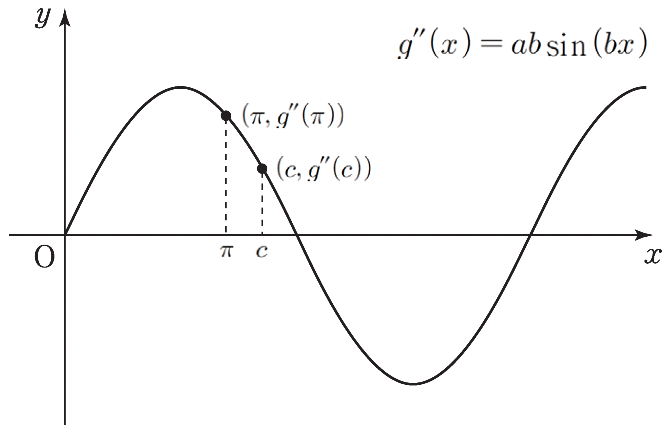


따라서 위 그림에서 점 $(\pi,\,g''(\pi))$ 의 후보는 크게 세 가지가 있다.

case 1) $g''(\pi)>0$ 인 경우

다음 그림과 같이 그려져서 충분히 작은 양수 h에 대하여 열린구간 $(\pi,\,\pi+h)$ 에 속하는 어떤 실수 c에 대하여 $g''(c)>0$ 이다. ([증명Ⅱ] 참고)

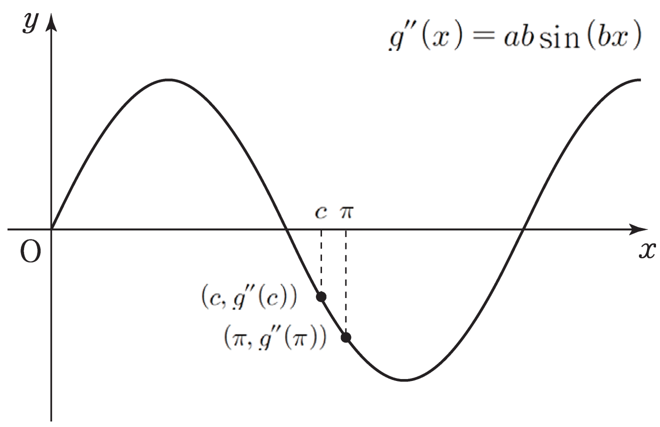
이는 ⅰ) $x>\pi$ 이면 $g''(x) \le 0$ 의 조건에 모순이다.



case 2) $g''(\pi)<0$ 인 경우

다음 그림과 같이 그려져서 열린구간 $(0,\,\pi)$ 에 속하는 어떤 실수 c에 대하여 $g''(c)<0$ 이다. ([증명Ⅲ] 참고)

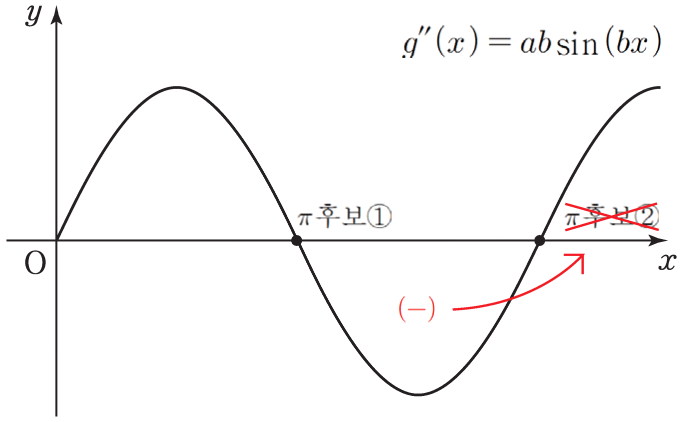
이는 ⅱ) $x<\pi$ 이면 $g''(x) \ge 0$ 의 조건에 모순이다.



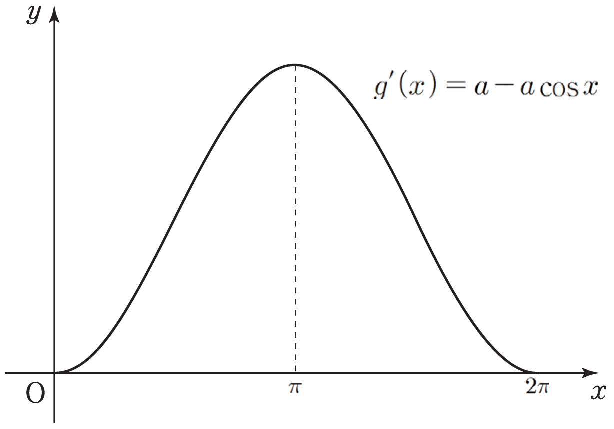
([별해] 참고)

case 3) $g''(\pi)=0$ 인 경우

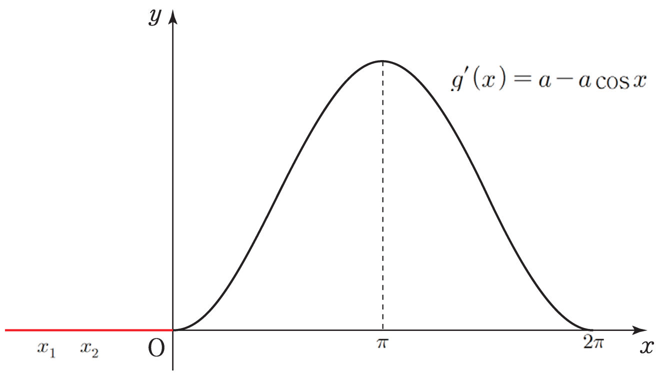
다음 그림에서 점 $(\pi,\,g''(\pi))$ 은 $y=g''(x)$ 의 그래프와 x축과의 교점이 가능하며, ⅱ) $x<\pi$ 이면 $g''(x) \ge 0$ 조건에 의해 ①번의 경우만이 가능하다. 즉, $\frac{2\pi}{b}=2\pi$ 이므로 $b=1$ 이다.



따라서 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$ 에서 $g'(x)=a-a\cos x$ 이다.
즉, $g(x)=ax-a\sin x+C$ 이다. (단, C는 적분상수)



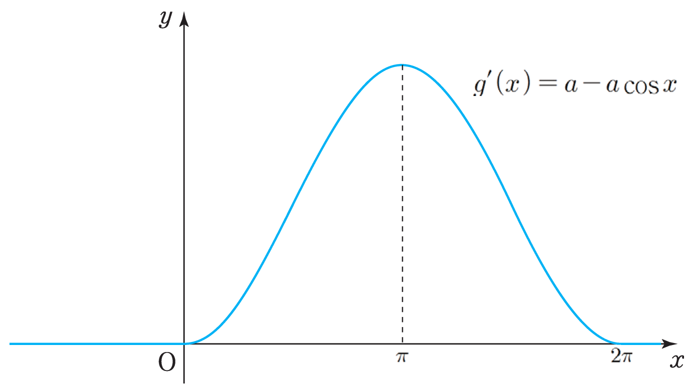
다시 ii) $x<\pi$ 이면 $g''(x)\geq 0$ 에 의해 $x\leq 0$ 이면 $g''(x)\geq 0$ 라고 할 수 있다. 즉, $x_1<x_2\leq 0$ 이면 $g'(x_1)\leq g'(x_2)\leq g'(0)=0$ 가 성립한다. ([증명Ⅳ] 참고)
해설 가장 처음에 $g'(x)=|f(x)|$ 라 하였다. 우변은 절댓값이므로 항상 0 보다 크거나 같다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq 0$ 이다. 이를 방금 구한 부등식과 연립하면
$0\leq g'(x_1)\leq g'(x_2)\leq g'(0)=0$ 이 성립하여 모든 음의 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$ 이 된다. ([다른 증명Ⅴ], 같이 풀면 좋은 문제 Ⅱ, Ⅲ 참고)



마찬가지 방법으로 i) $x>\pi$ 이면 $g''(x)\leq 0$ 에 의해 $x>2\pi$ 인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$ 임을 보일 수 있다. (꼭 스스로 해보길 바란다.)
종합하면

$$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ a-a\cos x & (0\leq x\leq 2\pi) \\ 0 & (x>2\pi) \end{cases}$$

이고 그래프는 아래 그림과 같다.

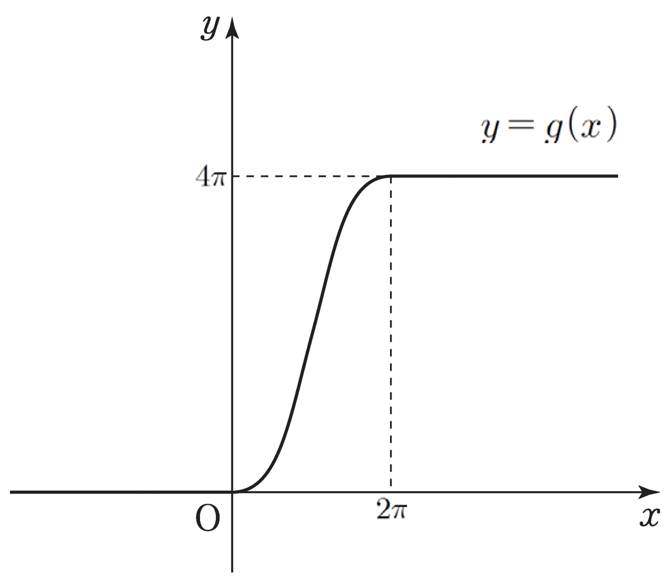


그런데 $g'(x)=0$ 인 구간에서는 함수 $g(x)$ 가 각각 상수함수이고 ([교과서 기본개념Ⅰ] 참고), $g(0)=\displaystyle\int_0^0 |f(t)|\,dt=0$ 이다.
함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하여 미분가능한 함수이므로, 실수 전체의 집합에서 연속이고, 따라서 $x<0$ 에서는 $g(x)=0$, $x>2\pi$ 에서는 $g(x)=2a\pi$ 이다.

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ ax-a\sin x & (0\leq x\leq 2\pi) \\ 2a\pi & (x>2\pi) \end{cases}$$

따라서 $x<0$ 에서는 $g(x)=0$ 이므로 조건 (다)로부터
$g(2\pi)-g(-2\pi)=g(2\pi)=2a\pi=4\pi$ 이므로 $a=2$ 이다.

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ 2x-2\sin x & (0\leq x\leq 2\pi) \\ 4\pi & (x>2\pi) \end{cases}$$



그러므로 준식 $\displaystyle\int_0^{4\pi} g(x)\,dx$ 을 구하면

$$\int_0^{4\pi} g(x)\,dx=\int_0^{2\pi}(2x-2\sin x)\,dx+\int_{2\pi}^{4\pi}4\pi\,dx$$
$$=\left[x^2+2\cos x\right]_0^{2\pi}+8\pi^2$$
$$=12\pi^2$$

이므로 답은 $k=12$ 이다.

본해설 끝

[별해]
i) $x>\pi$ 이면 $g''(x)\le 0$
ii) $x<\pi$ 이면 $g''(x)\ge 0$
임을 알았다면 복잡하게 구하지 않고
$\lim_{x\to\pi+} g''(x)\le 0$, $\lim_{x\to\pi-} g''(x)\ge 0$ 으로부터 $g''(\pi)=0$ 임을 알 수 있다.
왜냐하면 $0\le x\le 2\pi$ 에서 $g''(x)=ab\sin(bx)$ 는 연속함수이기 때문이다.

[증명Ⅰ]
요구사항 : $[0,\,2\pi]$ 에서 $g'(x)=a-a\cos(bx)$ 이면 $[0,\,2\pi]$ 에서 $g''(x)=ab\sin(bx)$ 인가?
$(0,\,2\pi)$ 에서 $g''(x)=ab\sin(bx)$ 임은 자명하므로 $g''(0)=ab\sin 0$, $g''(2\pi)=ab\sin(2\pi b)$ 임을 증명하면 된다.

$g(x)$ 는 이계도함수가 존재하므로 $g'(x)$ 는 미분가능한 함수이다.
따라서 $g''(0)$ 이 존재하고, 그 극한값은 $\lim_{h\to0+}\dfrac{g'(h)-g'(0)}{h}$ 또는 $\lim_{h\to0-}\dfrac{g'(h)-g'(0)}{h}$ 둘 중 아무거나로 택해도 같다. (핵심)
그런데 우리는 $[0,\,2\pi]$ 에서만 $g'(x)$ 의 정보를 알고 있으므로 우극한으로 구하는 것이 자연스럽다.

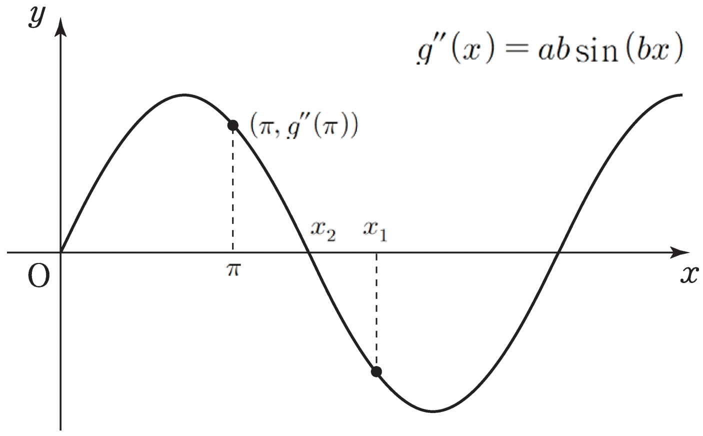
$$\begin{aligned}g''(0)&=\lim_{h\to0+}\frac{g'(h)-g'(0)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{(a-a\cos(bh))-(a-a)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{a(1-\cos(bh))}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{a\sin^2(bh)}{h(1+\cos(bh))}\\&=0\end{aligned}$$

마찬가지 이유로 $g''(2\pi)$ 값 역시 좌극한으로 구하는 것이 자연스럽고 $\lim_{h\to0-}\dfrac{g'(2\pi+h)-g'(2\pi)}{h}$ 와 같으므로

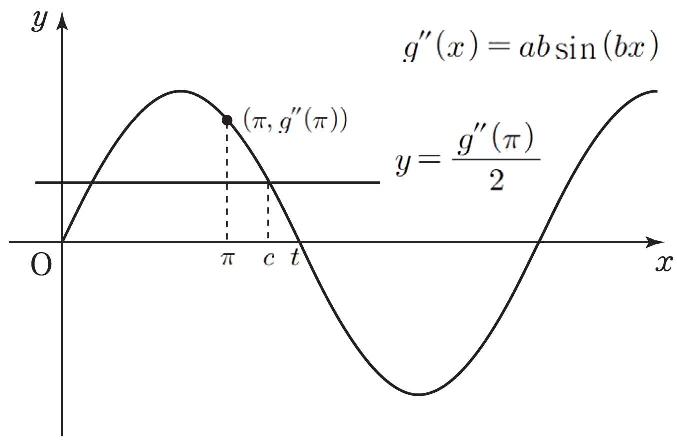
$$\begin{aligned}g''(2\pi)&=\lim_{h\to0-}\frac{g'(2\pi+h)-g'(2\pi)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{(a-a\cos(b(2\pi+h)))-(a-a\cos(2\pi b))}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{-a\cos(b(2\pi+h))+a\cos(2\pi b)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{-ab(\cos(2\pi b+bh)-\cos(2\pi b))}{bh}\\&=-ab(-\sin(2\pi b))\quad (y=\cos x\text{ 의 미분계수의 정의})\\&=ab\sin(2\pi b)\end{aligned}$$

일반적으로 도함수가 어떤 열린구간 $(a,\,b)$ 에서 연속함수이면 그 열린구간에서의 도함수를 닫힌구간 $[a,\,b]$ 로까지 확장할 수 있다.
마찬가지로 이계도함수가 어떤 열린구간 $(a,\,b)$ 에서 연속함수이면 그 열린구간에서의 이계도함수를 닫힌구간 $[a,\,b]$ 로까지 확장할 수 있다. ⇒ [같이 풀면 좋은 문제 Ⅰ] 참고

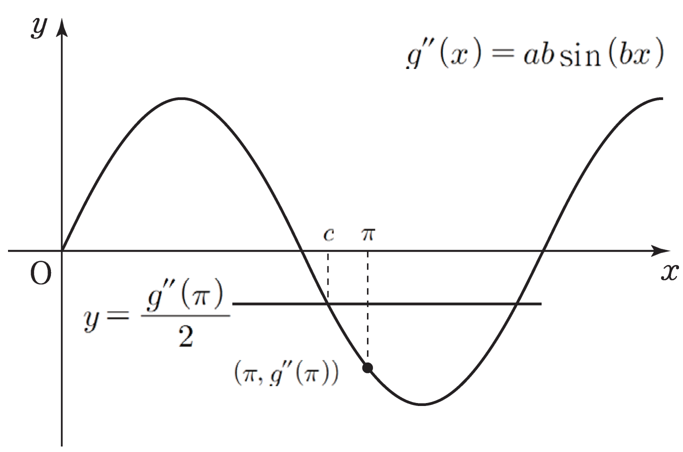
[증명Ⅱ]
조건 i) $x>\pi$ 이면 $g''(x)\le 0$ 로부터
$\pi<t<2\pi$ 인 어떤 실수 t 에 대하여 $g''(t)=0$ 일 수밖에 없음을 보이자.
귀류법으로 증명하기 위해 그러한 실수 t 가 없다고 가정하면(**가정***)
$x>\pi$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g''(x)<0$ 이어야 한다.
따라서 $\pi<x_1<2\pi$ 인 어떤 실수 x_1 은 $g''(x_1)<0$ 이다. 또한 $g''(\pi)>0$ 인 경우로 가정했으며 $g''(x)=ab\sin(bx)$ 는 연속함수이므로 사이값 정리에 의하여 $\pi<x_2<x_1<2\pi$ 인 어떤 실수 x_2 가
$g''(x_1)<g''(x_2)=0<g''(\pi)$ 을 만족시킨다.



이는 (**가정***)에 모순이므로, 귀류법에 의하여 $\pi<t<2\pi$ 인 어떤 실수 t 에 대하여 $g''(t)=0$ 을 만족시킨다. 다시 사이값 정리를 이용하면 $\pi<c<t$ 인 어떤 실수 c 에 대하여
$0=g''(t)<g''(c)=\dfrac{g''(\pi)}{2}<g''(\pi)$ 를 만족시킨다. 즉, 충분히 작은 양수 h 에 대하여 열린구간 $(\pi,\,\pi+h)$ 에 속하는 어떤 실수 c 에 대하여 $g''(c)>0$ 이다.
그런데 이는 i) $x>\pi$ 이면 $g''(x)\le 0$ 의 조건에 모순이다.



[증명Ⅲ]
$g''(0)=0$ 이고 $g''(\pi)<0$ 라고 가정했으며, $g''(x)=ab\sin(bx)$ 는 연함수이므로 사이값 정리에 의하여 $0<c<\pi$ 인 어떤 실수 c 가
$g''(\pi)<g''(c)=\dfrac{g''(\pi)}{2}<g''(0)=0$ 을 만족시킨다. 즉, $g''(c)<0$ 이다.
그런데 이는 조건 ii) $x<\pi$ 이면 $g''(x)\ge 0$ 에 모순이다.



[증명Ⅳ] ⇒ [교과서 기본개념Ⅱ] 참고

$x_1 < x_2 \le 0$ 이라 하자. 함수 $g(x)$ 는 이계도함수가 존재하므로 $g'(x)$ 는 미분가능한 함수이다. 따라서 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{g'(x_2)-g'(x_1)}{x_2-x_1}=g''(c)$ 인 c가 $x_1 < c < x_2 \le 0$ 에 존재한다.

$x \le 0$ 인 모든 실수 x에 대하여 $g''(x) \ge 0$ 이라 하였으므로 $g''(c) \ge 0$ 이다. 즉, $\dfrac{g'(x_2)-g'(x_1)}{x_2-x_1} \ge 0$ 이다.

그런데 처음에 $x_1 < x_2 \le 0$ 라고 가정하였으므로 $x_2 - x_1 > 0$ 이고, 분모가 양수이므로 분자 역시 $g'(x_2)-g'(x_1) \ge 0$ 이다.

따라서 $x_1 < x_2 \le 0$ 인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

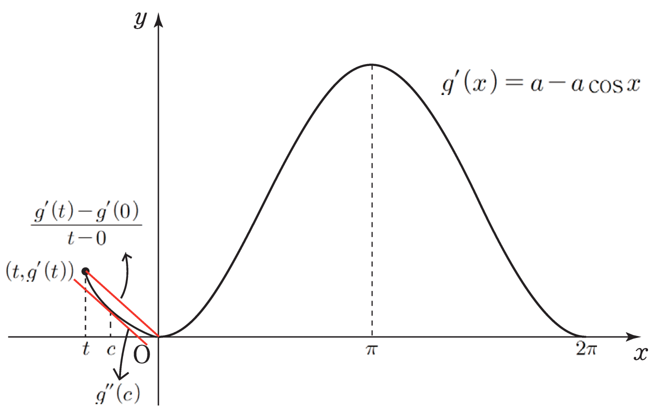
$g'(x_1) \le g'(x_2) \le g'(0)$ 을 만족시킨다.

[다른 증명Ⅴ]

요구사항 : 모든 음의 실수 x에 대하여 $g''(x) \ge 0$ 이고 $g'(x) \ge 0$ 이며 $g'(0)=0$ 이면 모든 음의 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$ 인가?

모든 음의 실수 x에 대하여 $g'(x) \ge 0$ 이므로 $g'(x) > 0$ 인 음의 실수 x가 존재하지 않음을 보이는 것으로 충분하다.

귀류법으로 증명하기 위해 어떤 음의 실수 t에 대하여 $g'(t) > 0$ 라고 가정하자.



$g'(x)$ 는 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{g'(t)-g'(0)}{t-0}=g''(c)$ 인 c가 $t < c < 0$ 에 존재한다. 그런데 $g'(t) > 0$ 이고 $g'(0)=0$ 이므로 좌변의 분자는 0 보다 크다. 또한 $t < 0$ 이므로 좌변 전체는 음수이다. 따라서 $g''(c) < 0$ 이다. 이는 모든 음의 실수 x에 대하여 $g''(x) \ge 0$ 라는 전제에 모순이다.

따라서 귀류법에 의하여 $g'(t) > 0$ 인 음의 실수 t는 존재하지 않으므로, 모든 음의 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$ 일 수밖에 없다.

⇒ [같이 풀면 좋은 문제Ⅱ, Ⅲ] 참고

[같이 풀면 좋은 문제 Ⅰ]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(0 < a < 2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=f(-x)$
>
> (나) $\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)\,dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때 $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출처 : 2017학년도 6월 모의평가 가형 30번

(나)의 양변을 두 번 미분하면 $f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 이고, 그 범위는 열린 구간 $\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ 이다. 그럼에도 불구하고 $x=-\frac{a}{2}$ 를 대입할 수 있었던 이유는, 열린 구간 $\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ 에서 도함수 $f'(x)=-3b\sin(3x)-5c\sin(5x)$ 가 연속함수이기 때문에 열린 구간 $\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ 을 닫힌 구간 $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$ 로 확장할 수 있기 때문이다.

※ 사실 고등학교 과정에서는 엄밀하게는 $x=\frac{a}{2}$ 에서의 좌미분계수, $x=-\frac{a}{2}$ 에서의 우미분계수 정의를 이용하여 구해야하지만, 다르부 정(Darboux's theorem)에 의해 위처럼 사용하여도 무방하다. 물론 다르부 정리는 대학과정이기에 소개하지는 않는다.

[같이 풀면 좋은 문제Ⅱ]

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

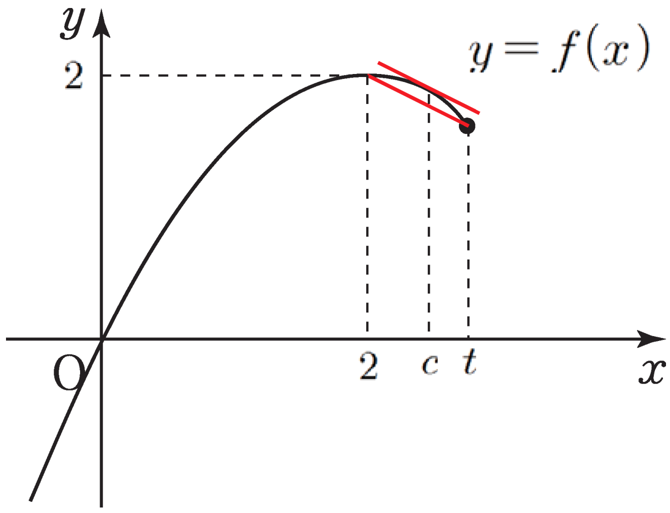
> (가) $x \le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출처 : 2016학년도 대수능 B형 30번

$f'(x)=\sqrt{4-2f(x)} \ge 0$ 이고 $f(x) \le 2$ 이고 $f(2)=2$ 로부터
$x \ge 2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 상수함수 $f(x)=2$ 임을 증명해보자.
$f(x) \le 2$ 이므로, $x > 2$ 이고 $f(x) < 2$ 인 실수 x가 존재하지 않음을 보이는 것으로 충분하다.

귀류법으로 증명하기 위해 $t>2$인 어떤 실수 t에 대하여 $f(t)<2$ 라고 가정하자. $f(x)$ 는 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(t)-f(2)}{t-2}=f'(c)$ 인 실수 c가 $2<c<t$에 존재한다. $f(2)=2$ 이고 $t-2>0$ 이므로 $\dfrac{f(t)-f(2)}{t-2}<0$ 이다. 즉, $f'(c)<0$ 인데, 이는 $f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}\geq 0$ 에 모순이다. 따라서 $x>2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=2$ 이다.



[같이 풀면 좋은 문제Ⅲ]

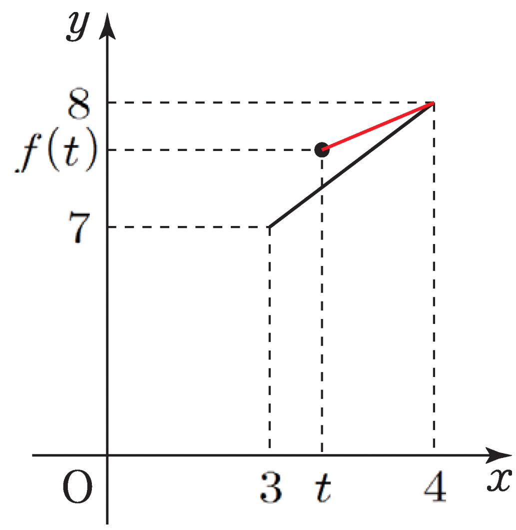
30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $1\leq f'(x)\leq 3$이다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.
> (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k,\ 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx=a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

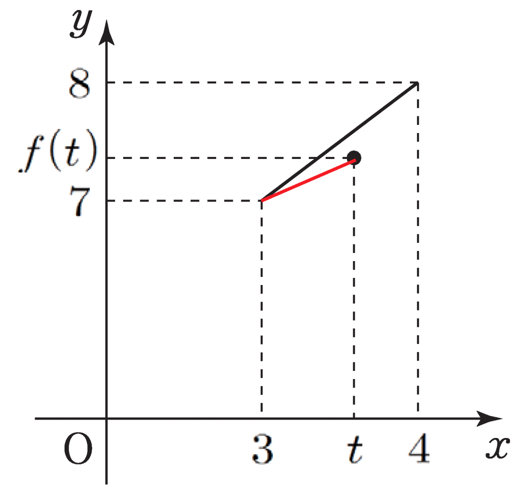
출처 : 2015학년도 6월 모의평가 B형 30번

닫힌 구간 $[3,4]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 일차함수 $y=x+4$ 의 일부임을 증명해보자.
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(3,7)$ 과 $(4,8)$ 을 지나고, $f'(x)\geq 1$ 이다.
이때, $f(x)$ 를 직선 $y=x+4$ 을 기준으로 세 가지 경우로 나눌 수 있다.
case1) $3<t<4$인 어떤 실수 t에 대하여 $f(t)>t+4$ 인 경우



함수 $f(x)$ 는 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}=f'(c)$ 인 어떤 실수 c가 $3<t<c<4$에 존재한다.
$f(t)>t+4$ 이므로 $f(t)-f(4)>t-4$ ($\because f(4)=8$)이다.
또한 $t-4<0$ 이므로 $f'(c)=\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}<1$ 이다. 이는 $f'(x)\geq 1$ 에 모순이다.

case2) $3<t<4$인 어떤 실수 t에 대하여 $f(t)<t+4$ 인 경우
함수 $f(x)$ 는 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(t)-f(3)}{t-3}=f'(c)$ 인 어떤 실수 c가 $3<c<t<4$에 존재한다.
$f(t)<t+4$ 이므로 $f(t)-f(3)<t-3$ ($\because f(3)=7$)이다.
또한 $t-3>0$ 이므로 $f'(c)=\dfrac{f(t)-f(3)}{t-3}<1$ 이다. 이는 $f'(x)\geq 1$ 에 모순이다.



case3) $3<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x+4$ 이다.
case1)과 case2)는 불가능하므로 case3)일 수밖에 없다.
[교과서 기본개념Ⅰ]

예제 2 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고, 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하며 $f'(x)=0$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 상수함수임을 보여라.

풀이 $a<x\leq b$인 임의의 x에 대하여 닫힌 구간 $[a,x]$에서 평균값 정리를 적용하면
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$
인 c가 a와 x 사이에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(c)=0$이므로 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$에서 $f(x)=f(a)$이다.
따라서 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 상수함수이다.

답 풀이 참조

출처 : 이강섭 외, 미적분 Ⅰ, 미래엔, 116쪽

[교과서 기본개념Ⅱ]

이제 평균값 정리를 이용하여 함수의 증가, 감소와 미분계수의 부호 사이의 관계를 알아보자.

함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 임의의 x에 대하여 $f'(x)>0$이라고 하자. 이때 그 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여 평균값 정리가 성립하므로

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 c가 x_1과 x_2 사이에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $f'(c)>0$이고 $x_2-x_1>0$이므로 $f(x_2)-f(x_1)>0$이다. 즉,

$$f(x_1)<f(x_2)$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 열린 구간 (a, b)에서 증가한다.

같은 방법으로 함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 임의의 x에 대하여 $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$가 그 구간에서 감소함을 보일 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 임의의 x에 대하여
① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

출처 : 이강섭 외, 미적분 Ⅰ, 미래엔, 118쪽