제 2 교시

수능완성 (문과)

수학 Ⅱ

〔EBS 수능완성 나형 1단원 19번〕

1. 어느 학교 60명의 학생에 대하여 논술, 수학 두 과목의 경시대회 중 논술 경시대회를 신청한 학생이 38명, 수학 경시대회를 신청한 학생이 41명일 때, 논술과 수학 두 과목의 경시대회를 모두 신청한 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오.

〔EBS 수능완성 나형 4단원 19번〕

2. 1이 아닌 양수 x에 대하여 $\dfrac{3}{\log_2 x}+\dfrac{2}{\log_3 x}=\dfrac{1}{\log_a x}$을 만족시키는 상수 a의 값은? (단, $a>0$, $a\neq 1$)

① 66 ② 68 ③ 70 ④ 72 ⑤ 74

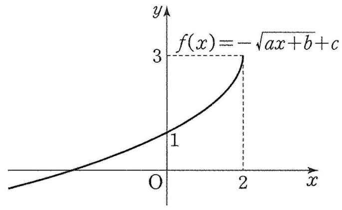
〔EBS 수능완성 나형 1단원 27번〕

3. 양수 x에 대한 함수 $f_n(x)=nx+\dfrac{4n}{x}+2\ (n=1,\ 2,\ 3)$에 대하여 $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$의 최솟값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

〔EBS 수능완성 나형 2단원 유형8 필수유형〕

4. 무리함수 $f(x)=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $f(-6)+f(-1)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① $-\sqrt{6}$ ② $-\sqrt{5}$ ③ -2 ④ $2-\sqrt{6}$ ⑤ $2-\sqrt{5}$

〔EBS 수능완성 나형 3단원 50번〕

5. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$,

(우변)$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로

$(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=1-\frac{1}{(k+1)!}+\boxed{\text{(가)}}$$

$$=1-\boxed{\text{(나)}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식의 합을 $f(k)$라 할 때, $f(4)$의 값은?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{60}$ ③ $\frac{1}{92}$ ④ $\frac{1}{120}$ ⑤ $\frac{1}{240}$

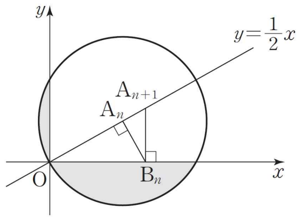
〔EBS 수능완성 나형 3단원 49번〕

6. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$이다.

(나) 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직이고 점 A_n을 지나는 직선이 x축과 만나는 점이 B_n이고, 점 B_n을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점이 A_{n+1}이다.

원점 O에 대하여 점 A_n을 중심으로 하고 선분 OA_n을 반지름으로 하는 원과 원의 내부에서 x축의 아래쪽 영역과 y축의 왼쪽 영역의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $S_5=(a\pi-1)b^8$이다. $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, 영역은 경계선을 포함하고, a, b는 양의 유리수이다.)



〔EBS 수능완성 나형 4단원 12번〕

7. $a^4=3$, $b^6=5$를 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $(a^m+b^{2n})^2-(a^m-b^{2n})^2$이 자연수가 되도록 하는 20 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

〔EBS 수능완성 나형 4단원 7번〕

8. $(3\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{4})^3$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

〔EBS 수능완성 나형 1단원 7번〕

9. 두 집합 $A=\{2,\ a^3-4a^2+a+9,\ 6\}$,

$B=\{3,\ a+2,\ a^2+2a-2,\ a^3-2a^2+a-1\}$에 대하여

$A\cap B=\{3,\ 6\}$일 때, 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

〔EBS 수능완성 나형 3단원 46번〕

10. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1}+\frac{1}{2a_n-1}=0$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔EBS 수능완성 나형 2단원 22번〕

11. 함수 $f(x)=2a|x-2|+3x$ 의 역함수가 존재하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

〔EBS 수능완성 나형 4단원 23번〕

12. 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $\sqrt[5]{a}=\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[5]{b}=\sqrt{c}$ 가 성립할 때, $12\log_c a$의 값을 구하시오.

〔EBS 수능완성 나형 2단원 30번〕

13. 유리함수 $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$ 에 대하여 $(g\circ f)(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ 을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는? (단, $x\neq 1$ 이고 $x\neq -1$ 이다.)

① $\dfrac{1}{2}(x^2+1)$ ② x^2+1 ③ $\dfrac{3}{2}(x^2+1)$

④ $2(x^2+1)$ ⑤ $\dfrac{5}{2}(x^2+1)$

〔EBS 수능완성 나형 3단원 36번〕

14. $-2,\ 1,\ 2$ 중에서 어느 하나의 수를 항의 값으로 갖는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{15} a_k=0,\ \sum_{k=1}^{15}(a_k+2)^2=114$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15}(a_k^3+4)$ 의 값을 구하시오.

〔EBS 수능완성 나형 2단원 27번〕

15. 유리식 $\dfrac{3k^2+4k+1}{k+2}$ 의 값이 정수가 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

〔EBS 수능완성 나형 3단원 34번〕

16. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)=5,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=0$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

〔EBS 수능완성 나형 4단원 24번〕

17. 어느 벤처기업의 10년 전의 매출은 A원이었는데, 그 후 5년 동안은 매출이 매년 전년도에 비하여 10% 씩 감소하고, 그 다음 5년 동안은 매출이 매년 전년도에 비하여 10% 씩 증가하여 현재의 매출은 kA원이 되었다고 한다. $\log k$의 값은? (단, $\log 9.9 = 0.996$으로 계산한다.)

① -0.035 ② -0.03 ③ -0.025 ④ -0.02 ⑤ -0.015

〔EBS 수능완성 나형 3단원 45번〕

18. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

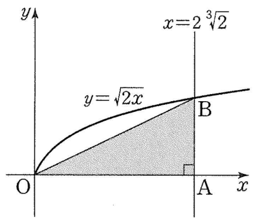
$$a_{n+1} = \frac{na_n}{a_n + 1}$$

을 만족시킬 때, a_5의 값은?

① $\frac{21}{11}$ ② 2 ③ $\frac{23}{11}$ ④ $\frac{24}{11}$ ⑤ $\frac{25}{11}$

〔EBS 수능완성 나형 4단원 13번〕

19. 그림과 같이 직선 $x=2\sqrt[3]{2}$ 가 x축 및 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



〔EBS 수능완성 나형 1단원 12번〕

20. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 부분집합 A에 대하여 $S(A)$를 A의 부분집합의 개수라 하자. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, A^c은 A의 여집합이다.)

보 기

ㄱ. $S(A)\times S(A^c)=2^{10}$

ㄴ. $S(A-B)=S(A)-S(A\cap B)$

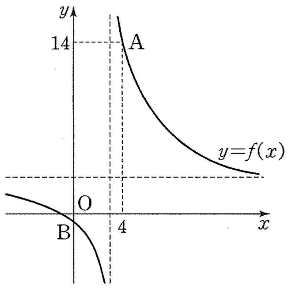
ㄷ. $S(A\cup B)=\dfrac{S(A)\times S(B)}{S(A\cap B)}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〔EBS 수능완성 나형 2단원 32번〕

21. 유리함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x-a}$ 의 그래프가 두 점 A$(4,\ 14)$, B$\left(0,\ -\dfrac{2}{3}\right)$를 지나고 $f(x)=f^{-1}(x)$가 성립할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

미적분 Ⅰ

〔EBS 수능완성 나형 6단원 19번〕

22. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=0$

(나) 함수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2 f(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(5)$의 값을 구하시오.

〔EBS 수능완성 나형 5단원 21번〕

23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ $(n\geq 1)$

(나) 유리함수 $y=\frac{a_n a_{n+2}x-2a_n a_{n+2}+2}{x-2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=b_n$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔EBS 수능완성 나형 5단원 18번〕

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보 기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 2)$가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$이다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다. (단, $a_n \neq 0$)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - n)$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〔EBS 수능완성 나형 7단원 43번〕

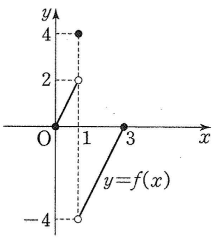
25. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

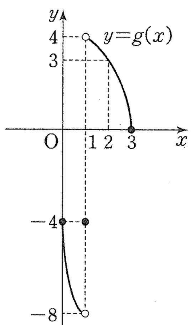
(가) 함수 $|f(x) - 4x|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq 0$이다.

$f(3)$의 값을 구하시오.

〔EBS 수능완성 나형 6단원 23번〕

26. $0 \le x \le 3$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?





보 기

ㄱ. $\lim_{x \to 1+} f(x)g(x) = -16$

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)g(x) = -5x$의 실근이 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〔EBS 수능완성 나형 8단원 28번〕

27. 원점에서 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각

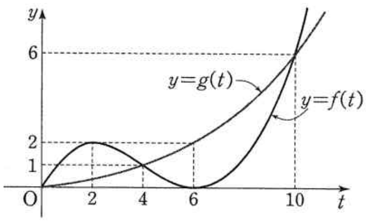
$$v_P(t) = t^2 - 2t,\ v_Q(t) = -t^2 + 4t$$

이다. 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만날 때까지 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

〔EBS 수능완성 나형 7단원 46번〕

28. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 t에서의 위치가 각각 다항함수 $f(t)$, $g(t)$이다. 두 다항함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같고, $f'(2)=f'(6)=0$이다.



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보 기

ㄱ. $0<t<2$일 때, 점 A는 점 B보다 원점에서 항상 멀리있다.

ㄴ. $2<t<6$일 때, 두 점 A, B는 서로 반대 방향으로 움직인다.

ㄷ. $6<t<10$일 때, 두 점 A, B의 속도가 같아지는 순간이 있다.

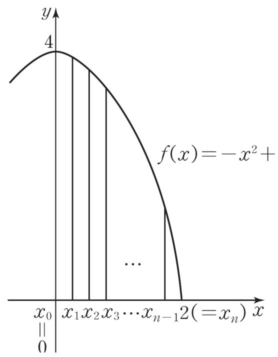
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〔EBS 수능완성 나형 8단원 5번〕

29. 그림과 같이 이차함수 $f(x)=-x^2+4$에 대하여 닫힌 구간 $[0,\ 2]$을 n $(n \geq 2)$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례대로

$$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=2$$

라 하자.



$l_k=f(x_{k-1})-f(x_k)$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} l_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$가 성립할 때, x_{20}의 값은?

① $\frac{\sqrt{21}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{22}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{23}}{3}$ ④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

〔EBS 수능완성 나형 5단원 13번〕

30. 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{S_n S_{n+2}}}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

〔EBS 수능완성 나형 7단원 40번〕

31. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

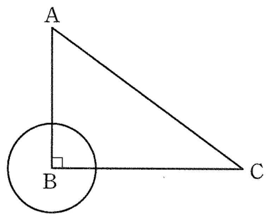
(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3을 갖는다.
(나) 방정식 $|f(x)|=1$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

$f(4)$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

〔EBS 수능완성 나형 6단원 17번〕

32. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\angle \mathrm{B}=90^{\circ}$ 인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 B 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r\,(r>0)$ 인 원이 삼각형 ABC 의 변과 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(r)$ 이라 하자.



최고차항이 계수가 1 인 삼차함수 $g(r)$ 에 대하여 함수 $f(r)g(r)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(8)$ 의 값을 구하시오.

〔EBS 수능완성 나형 8단원 17번〕

33. 함수 $f(x)=2x^2+4x-2$ 에 대하여

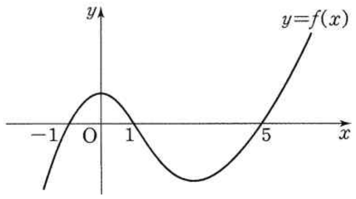
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

〔EBS 수능완성 나형 7단원 28번〕

34. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고,

$f(-1)=f(1)=f(5)=0$이다. 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 극솟값을 가질 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.



〔EBS 수능완성 나형 6단원 20번〕

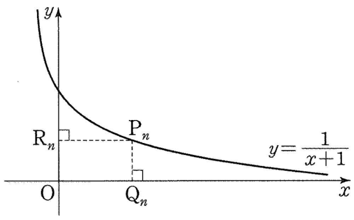
35. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)$를 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^{2n+1}-1}{\{f(x)\}^{2n}+1}$이라 하자. $g(0)>0$이고, 함수 $g(x)$가 $x=-1$, $x=2$에서만 불연속일 때, $f(3)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

〔EBS 수능완성 나형 5단원 15번〕

36. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\dfrac{1}{x+1}$ $(x>-1)$ 위의 점 $\mathrm{P}_n\left(n,\ \dfrac{1}{n+1}\right)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q_n, R_n이라 할 때, 사각형 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(S_{n+1}-S_n)$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

〔EBS 수능완성 나형 8단원 19번〕

37. 함수 $f(x)=(x-3)(x^2+x+1)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔EBS 수능완성 나형 8단원 20번〕

38. 함수 $f(x)=|x-3|(x-1)-4x+12$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 37 ② $\frac{112}{3}$ ③ $\frac{113}{3}$ ④ 38 ⑤ $\frac{115}{3}$

〔EBS 수능완성 나형 5단원 16번〕

39. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}a_k}{a_n+\sum_{k=1}^{n}a_k}$$ 의 값은? $\left(\text{단, } a_n+\sum_{k=1}^{n}a_k \neq 0\right)$

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

〔EBS 수능완성 나형 5단원 19번〕

40. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_4=28,\ a_2+a_5=84$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+3}}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{1}{20}$ ④ $\frac{1}{25}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

〔EBS 수능완성 나형 6단원 22번〕

41. 방정식 $x^3+2x+k-3=0$이 오직 하나의 실근을 가질 때, 그 실근이 열린구간 $(0,\ 2)$에서 존재하도록 하는 정수 k의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

확률과 통계

〔EBS 수능완성 나형 9단원 19번〕

42. $3 < a < b \le 9 < c \le d < 14$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

① 145 ② 150 ③ 155 ④ 160 ⑤ 165

〔EBS 수능완성 나형 10단원 20번〕

43. 주머니에 검은 공 4개와 흰 공 6개가 들어 있다. 이 주머니에서 갑이 먼저 임의로 공 3개를 동시에 꺼낸 후 을이 주머니에 남은 공 중 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 갑이 꺼낸 흰 공의 개수가 을이 꺼낸 흰 공의 개수의 두 배일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

① $\frac{3}{35}$ ② $\frac{4}{35}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{6}{35}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

〔EBS 수능완성 나형 9단원 29번〕

44. 3 이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $(1+x^2)^n$의 전개식에서 x^6의 계수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{8} a_n$의 값은?

① 122　② 124　③ 126　④ 128　⑤ 130

〔EBS 수능완성 나형 10단원 24번〕

45. 좌표평면 위에 두 점 P, Q가 있다. 주사위 1개와 동전 1개를 동시에 던지는 시행에서 주사위의 짝수의 눈이 나오면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, 홀수의 눈이 나오면 점 P를 y축의 방향으로 1만큼 이동하고, 동전의 앞면이 나오면 점 Q를 x축의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 점 Q를 y축의 방향으로 -1만큼 이동한다. 이와 같은 시행을 5회 반복할 때, 점 $(1,\ 1)$에서 출발한 점 P와 점 $(0,\ 4)$에서 출발한 점 Q가 같은 점에 도착할 확률은 p이다. $2^{10}p$의 값을 구하시오.

〔EBS 수능완성 나형 11단원 48번〕

46. 어느 광역버스를 이용하는 각 손님들의 광역버스 하루 이용 시간은 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 광역버스를 이용하는 손님 중에서 100명을 임의추출하여 조사하였더니 광역버스 하루 이용 시간의 평균이 60분이었다. 이 광역버스를 이용하는 손님들 전체의 광역버스 하루 이용 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

① $56.08 \leq m \leq 63.92$　② $57.06 \leq m \leq 62.94$

③ $58.04 \leq m \leq 61.96$　④ $58.54 \leq m \leq 61.46$

⑤ $59.02 \leq m \leq 60.98$

〔EBS 수능완성 나형 9단원 16번〕

47. 서로 다른 7개의 공을 세 상자 A, B, C에 빈 상자가 없도록 남김없이 나누어 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 620　② 625　③ 630　④ 635　⑤ 640

〔EBS 수능완성 나형 10단원 15번〕

48. 어느 학교의 전체 학생을 대상으로 등교할 때 이용한 모든 교통수단을 조사하였다. 조사에 참여한 학생 중 지하철을 이용한 학생의 수는 버스를 이용한 학생의 수의 $\frac{7}{8}$ 이었다. 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 지하철을 이용하여 등교하였을 때, 이 학생이 버스도 이용하여 등교한 학생일 확률이 $\frac{5}{7}$ 이다. 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 버스를 이용하여 등교하였을 때, 이 학생이 지하철도 이용하여 등교한 학생일 확률은? (단, 조사에 참여한 학생 중에는 버스와 지하철을 모두 이용하거나 모두 이용하지 않는 학생이 있을 수 있다.)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

〔EBS 수능완성 나형 11단원 37번〕

49. 이산확률변수 X 의 확률질량함수가

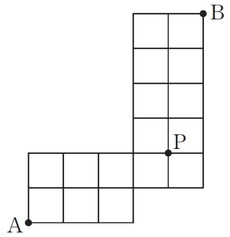
$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{2-x^2}{4} \quad (x=-1,\ 0,\ 1)$$

인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$ 라 하자. $\mathrm{V}(4\overline{X})=1$ 일 때, n 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

〔EBS 수능완성 나형 9단원 13번〕

50. 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는?



① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

〔EBS 수능완성 나형 10단원 23번〕

51. 주머니에 빨간 구슬 3개와 파란 구슬 2개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 구슬 중에서 빨간 구슬의 개수를 다음과 같은 표에 기록하고 꺼낸 구슬을 다시 주머니에 넣는다. 이와 같은 시행을 6회 반복할 때, 첫 번째 시행부터 여섯 번째 시행까지 표에 기록된 수의 합이 16일 확률은 $\frac{n}{5^5}$ 이다. 자연수 n의 값을 구하시오.

시행	첫 번째	두 번째	세 번째	네 번째	다섯 번째	여섯 번째
빨간 구슬의 개수						

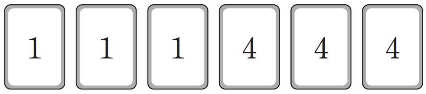
〔EBS 수능완성 나형 9단원 15번〕

52. 승현이와 주현이를 포함한 6명의 학생을 일렬로 세울 때, 승현이와 주현이는 이웃하지 않고 승현이가 주현이보다 앞에 서게 되는 경우의 수는?

① 230 ② 240 ③ 250 ④ 260 ⑤ 270

〔EBS 수능완성 나형 10단원 21번〕

53. 앞면에는 숫자 1, 뒷면에는 숫자 4가 적혀 있는 6장의 카드가 그림과 같이 숫자 1과 4가 적혀 있는 면이 각각 3장씩 보이도록 일렬로 놓여 있다.



6장의 카드 중에서 임의로 서로 다른 3장의 카드를 동시에 뒤집는 것을 1회의 시행이라고 하자. 이 시행을 2회 반복한 후 카드의 보이는 면에 적혀 있는 수의 합이 21일 확률은?

① $\frac{13}{50}$ ② $\frac{6}{25}$ ③ $\frac{11}{50}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{9}{50}$

실전편

〔EBS 수능완성 나형 실전모의 1회 15번〕

54. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$

(나) $\sum_{n=1}^{10} f'(n)=130$

$f(2)$의 값은? [4점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

〔EBS 수능완성 나형 실전모의 2회 19번〕

55. $0\le a\le 1$일 때, 함수 $f(a)=\int_0^1 |x^2-(2a+2)x+a^2+2a|\,dx$ 에 대하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

〔EBS 수능완성 나형 실전모의 2회 12번〕

56. 어느 토론대회에 참가하여 본선에 진출한 사람들의 남녀 비율은 남자가 60%, 여자가 40% 이고, 본선에 진출한 사람들 중에서 남자들의 80% 와 여자들의 20% 는 본선에서 제시된 주제에 찬성을 선택하였다. 본선에 진출한 사람 중 임의로 선택한 한 명이 본선에서 제시된 주제에 대하여 찬성한 사람일 때, 그 사람이 남자일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

〔EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 18번〕

57. 스마트폰의 어플 A 를 이용하는 사람들의 하루 동안의 어플 A 의 이용시간은 표준편차가 40 인 정규분포를 따른다고 한다. 어플 A 를 이용하는 사람들 중에서 400 명을 임의추출하여 하루 동안의 어플 A 의 이용시간을 조사하였더니 하루 동안의 어플 A 의 이용시간이 평균이 150 이었다. 어플 A 를 이용하는 사람들의 하루 동안의 어플 A 의 이용시간의 평균 m 에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간이 $a \le m \le b$ 이다. $100(b-a)$ 의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$ 로 계산하고 시간의 단위는 분이다.) [4점]

① 774 ② 779 ③ 784 ④ 789 ⑤ 794

〔EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 12번〕

58. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q는 다음과 같다.

p : $|x|+|x-1| \leq 5$

q : $x \leq a$ 또는 $x > b$

명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 참이 되기 위한 정수 a의 최댓값과 정수 b의 최솟값의 합은? (단, $a < b$) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

〔EBS 수능완성 나형 실전모의 1회 21번〕

59. 최고차항의 계수가 5인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

(나) 모든 일차함수 $g(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=0$ 이다.

함수 $f(x)$의 극솟값은? [4점]

① $-\frac{62}{25}$ ② $-\frac{12}{5}$ ③ $-\frac{58}{25}$ ④ $-\frac{56}{25}$ ⑤ $-\frac{54}{25}$

〔EBS 수능완성 나형 실전모의 5회 21번〕

60. 함수 $f(x)=\int_0^x (4t^3+at^2+bt)dt$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다. (나) x 에 대한 방정식 $f(x)=-1$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(1)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

[EBS 수능완성 나형 실전모의 1회 7번]

61. 1)두 함수 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x-1}$, $g(x)=b+\dfrac{3}{x+c}$ 이 서로 역함수일 때, $g(a)$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[EBS 수능완성 나형 실전모의 1회 20번]

62. [2]6자리의 자연수 중 다음 조건을 만족시키는 홀수의 개수는?[4점]

(가) 각 자리의 수 중 0의 개수는 1이하이다.
(나) 각 자리의 수의 합은 7이다.

① 47 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 51

[EBS 수능완성 나형 실전모의 1회 26번]

63. [3]실수 x에 대하여 세 조건 p, q, r가 다음과 같다.

p : $|x-2| \geq 3$

q : $|x| \geq a$

r : $|x| > b$

q는 p이기 위한 필요조건이고, r는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값을 M, b의 최솟값을 m이라 하자. $40(m-M)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 양수이다.) [4점]

[EBS 수능완성 나형 실전모의 1회 29번]

64. 4)좌표평면 위에서 $|x|+|y|\le 2$를 만족시키는 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역을 D라 하자. $-2<t<2$인 실수 t에 대하여 영역 D가 직선 $y=t$에 의하여 잘려진 두 영역 중 넓이가 크지 않은 영역의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $90\int_{-1}^{1} S(t)dt$의 값을 구하시오. [4점]

[EBS 수능완성 나형 실전모의 1회 30번]

65. 5)실수 t에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & (x<3) \\ x^2-4x & (x\ge 3) \end{cases}$$

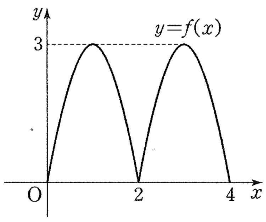
의 그래프와 직선 $y=tx$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $h(t)$에 대하여 $g(t)h(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\lim_{t\to 3}\frac{20g(t)}{h(t)}$의 값을 구하시오. [4점]

[EBS 수능완성 나형 실전모의 2회 13번]

66. 그림은 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}3x(2-x) & (0\le x<2)\\ 3(2-x)(x-4) & (2\le x\le 4)\end{cases}$$

의 그래프를 나타낸 것이다.

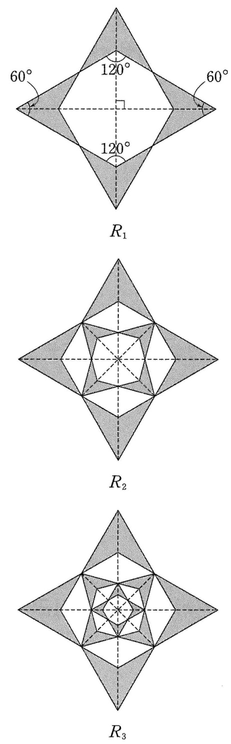


6)함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=3$에 대하여 대칭이동한 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[[EBS 수능완성 나형 실전모의 2회 18번]

67. 7)그림과 같이 한 변의 길이가 2이고 마주 보는 두 내각의 크기가 $60°$, $120°$인 마름모 2개를 공통부분이 모든 변의 길이가 같은 팔각형이 되도록 그리고, 두 마름모의 내부이면서 공통부분이 아닌 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 두 마름모의 네 교점 중 각각 두 점을 두 꼭짓점으로 하여 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 마름모 2개를 그리고, 두 마름모의 내부이면서 공통부분이 아닌 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, 모든 마름모의 대각선의 교점은 일치한다.) [4점]



R_1

R_2

R_3

⋮

① $3-\sqrt{3}$ ② $3-\sqrt{2}$ ③ $2(3-\sqrt{3})$

④ $2(3-\sqrt{2})$ ⑤ $3(3-\sqrt{3})$

[EBS 수능완성 나형 실전모의 2회 20번]

68. 8)두 양수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3-3ax+b$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보 기

ㄱ. $f(2\sqrt{a})=f(-\sqrt{a})$

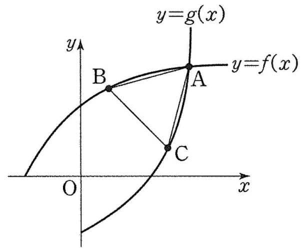
ㄴ. 함수 $f(x)$의 극댓값은 $2a\sqrt{a}+b$이다.

ㄷ. $0<a<\frac{1}{4}$일 때, 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS 수능완성 나형 실전모의 2회 21번]

69. 9)그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\sqrt{2}-1$ ② $2\sqrt{3}-3$ ③ $2(\sqrt{2}-1)$ ④ $3\sqrt{3}-4$ ⑤ $4(\sqrt{2}-1)$

[EBS 수능완성 나형 실전모의 2회 29번]

70. 10)다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_1^4 f'(x)dx$의 최솟값을 구하시오. [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

(나) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=8$

(다) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

[EBS 수능완성 나형 실전모의 2회 30번]

71. 11)양수 x에 대하여 x의 소수 부분을 $f(x)$라 하자. 3이상의 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{k}{n}\right)$가 자연수이고 n의 배수가 되도록 하는 자연수 m의 최솟값을 a_n이라 할 때, a_9+a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

[EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 7번]

72. 12)자연수 14의 분할 중에서 숫자 4를 포함하고 2개 이상의 짝수의 합으로만 나타내어지는 서로 다른 분할의 수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

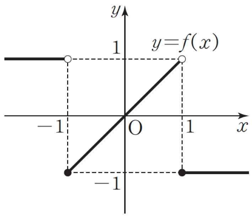
[EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 14번]

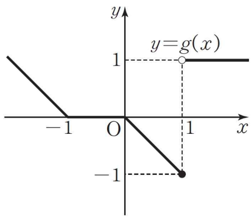
73. 13)직선 AB가 x축과 만나는 점을 C, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 H의 x좌표를 $t\,(t>1)$이라 할 때, 점 $\mathrm{D}(1,\ 0)$에 대하여 $\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}^3}{\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AH}}}$의 값은? [4점]

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{2}$

[EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 15번]

74. 14)두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]





보 기

ㄱ. $\lim_{x \to -1} f(x)g(x)=0$

ㄴ. 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

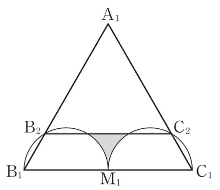
[EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 17번]

75. 15)집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 있다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$의 치역이 $\{1,\ 2,\ 4\}$이고, $f(3)=2$, $f(4)=4$일 때, $f(1)+f(2)$의 값은? [4점]

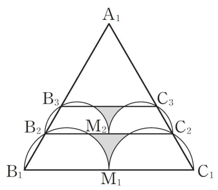
① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

[EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 19번]

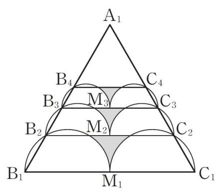
76. [16]그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 $A_1B_1C_1$에서 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하자. 선분 B_1M_1을 지름으로 하는 반원이 선분 A_1B_1과 점 B_1이 아닌 점에서도 만나도록 그리고, 그 만나는 점을 B_2, 선분 M_1C_1을 지름으로 하는 반원이 선분 A_1C_1과 점 C_1이 아닌 점에서도 만나도록 그리고, 그 만나는 점을 C_2라 하자. 두 반원과 선분 B_2C_2로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하자. 선분 B_2M_2를 지름으로 하는 반원이 선분 A_1B_2와 점 B_2가 아닌 점에서도 만나도록 그리고, 그 만나는 점을 B_3, 선분 M_2C_2를 지름으로 하는 반원이 선분 A_1C_2와 점 C_2가 아닌 점에서도 만나도록 그리고, 그 만나는 점을 C_3이라 하자. 새로 그린 두 반원과 선분 B_3C_3으로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

⋮

① $\frac{16}{21}(8\sqrt{3}-4\pi)$ ② $\frac{16}{21}(9\sqrt{3}-4\pi)$ ③ $\frac{16}{21}(10\sqrt{3}-4\pi)$

④ $\frac{16}{21}(9\sqrt{3}-3\pi)$ ⑤ $\frac{16}{21}(10\sqrt{3}-3\pi)$

[EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 21번]

77. [17]최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는 $g(x)=f(x)-|f'(x)|$이다. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=4$
(나) $f(a)=g(a)=0$인 1보다 큰 상수 a가 존재한다.
(다) 함수 $f(x)$의 극댓값은 4이다.

$a\times f(5)$의 값은? [4점]

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

[EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 25번]

78. [18]최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, x축과 서로 다른 세 점에서 만난다. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-2}^{x} f(t)dt \geq 0$을 만족시킨다. $\int_{-2}^{0} f(x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

[EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 27번]

79. [19]0이 아닌 세 정수 a, b, c에 대하여 $|a|+|b|+|c|=10$을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오. [4점]

[EBS 수능완성 나형 실전모의 3회 30번]

80. [20]두 실수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=2x^3-ax^2+2bx-8$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $f(2) \geq 0$
(나) $f(x)$는 극값을 갖는다.
(다) $\int_0^1 f(x)dx \leq 0$

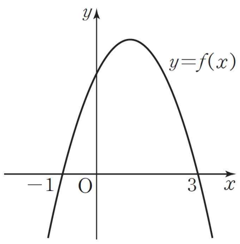
[EBS 수능완성 나형 실전모의 4회 7번]

81. [21]상자 A에는 1, 1, 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있고, 상자 B에는 6, 6, 6, 7, 7의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다. 두 상자 A, B에서 각각 임의로 카드를 한 장씩 꺼낸다. 두 상자 A, B에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 홀수일 때, 두 수의 합이 8일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[EBS 수능완성 나형 실전모의 4회 12번]

82. 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만난다. 11번과 12번의 두 물음에 답하시오.



22)자연수 n에 대하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(n,\ f(n))$에서의 접선의 기울기를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k=-30$일 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[EBS 수능완성 나형 실전모의 4회 15번]

83. 23)두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{3-x}+a & (x<2) \\ \dfrac{bx+8}{x-1} & (x\geq 2) \end{cases}$$

의 치역이 $\{y\mid y>-2\}$일 때, $f(ab)$의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[EBS 수능완성 나형 실전모의 4회 17번]

84. 24)어느 공장에서 생산되는 A 제품 한 개의 무게 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고, $\mathrm{P}(X \ge 6) = 0.5$, $\mathrm{P}(X \le 4) = 0.1587$을 만족시킨다. 이 공장에서 생산된 A 제품 중에서 100개를 임의추출하여 조사한 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(5.8 \le \overline{X} \le 6.2)$의 값은? (단, 제품의 무게의 단위는 g이다.) [4점]

① 0.3174 ② 0.3413 ③ 0.6857 ④ 0.6826 ⑤ 0.8413

[EBS 수능완성 나형 실전모의 4회 18번]

85. 25)삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1) - f(1)$의 값은? [4점]

(가) $f(0) = f(2) = 0$

(나) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(2)}{x+1} = 6$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[EBS 수능완성 나형 실전모의 4회 20번]

86. [26]흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 꺼내어 공의 색을 조사한다. 이 주머니에서 두 개의 흰 공을 모두 꺼냈을 때, 그때까지 꺼낸 모든 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 예를 들어 흰 공, 검은 공, 검은 공, 흰 공을 꺼냈을 때, $X=4$이다. $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.) [4점]

① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6

[EBS 수능완성 나형 실전모의 4회 21번]

87. [27]실수 t와 함수 $f(x)=|x|$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_0^2 xf(x-2t)dx$$

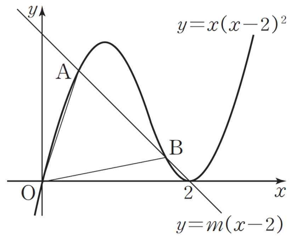
라 하자. 닫힌구간 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$에서 함수 $g(t)$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $\frac{m}{M}$의 값은? [4점]

① $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ③ $2-\sqrt{2}$

④ $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

[EBS 수능완성 나형 실전모의 4회 30번]

88. $-1<m<0$인 실수 m에 대하여 직선 $y=m(x-2)$와 곡선 $y=x(x-2)^2$이 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, 삼각형 AOB의 넓이의 제곱을 $S(m)$이라 하자. 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 함수 $S(m)$의 최댓값을 M이라 할 때, $27M$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



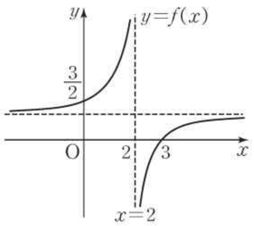
[EBS 수능완성 나형 실전모의 5회 9번]

89. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left|\frac{3k}{n}-1\right|$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

[EBS 수능완성 나형 실전모의 5회 14번]

90. 세 상수 a, b, c에 대하여 유리함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$의 그래프는 그림과 같이 두 점 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $(3,\ 0)$을 지나고 이 그래프의 y축과 평행한 점근선의 방정식은 $x=2$이다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



두 함수

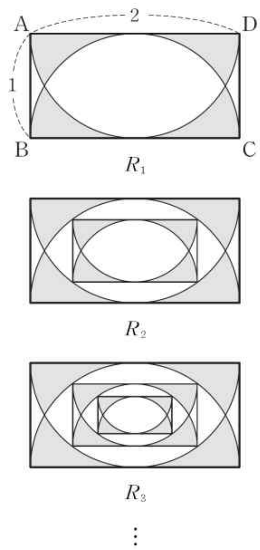
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\neq 2) \\ 3 & (x=2) \end{cases},\quad h(x)=x^2+px+q$$

에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(1)$의 값은? (단, p, q는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[EBS 수능완성 나형 실전모의 5회 19번]

91. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$인 직사각형 ABCD 안에 지름이 각각 AD, BC인 두 개의 반원을 그린 후, 두 반원의 내부 중 서로 겹치지 않는 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 두 반원이 겹치는 부분의 내부에 네 꼭짓점이 두 반원의 호 위에 있고 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 2 : 1인 직사각형을 그리고, 이 직사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 반원을 그린 후 두 반원의 내부 중 서로 겹치지 않는 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 그려진 두 반원이 겹치는 부분의 내부에 네 꼭짓점이 두 반원의 호 위에 있고 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 2 : 1인 직사각형을 그리고, 이 직사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 반원을 그린 후 두 반원의 내부 중 서로 겹치지 않는 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\dfrac{50\sqrt{3}-25\pi}{48}$ ② $\dfrac{75\pi-125\sqrt{3}}{48}$ ③ $\dfrac{50\pi-75\sqrt{3}}{48}$ ④ $\dfrac{25\pi-25\sqrt{3}}{48}$ ⑤ $\dfrac{75\sqrt{3}-25\pi}{48}$

[EBS 수능완성 나형 실전모의 5회 27번]

92. 어느 공장에서 생산되는 제품 A의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 이 공장에서 생산된 제품 A 중 임의로 1개를 선택할 때, 선택한 제품의 무게가 165 이하일 확률은 0.1587이고 201 이하일 확률은 0.9772이다. m의 값을 구하시오. (단, 제품의 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$로 계산한다.) [4점]

[EBS 수능완성 나형 실전모의 5회 30번]

93. A, B, C, D, E 다섯 명의 선수가 출전한 씨름 대회가 있다. 이 대회에서는 출전한 모든 선수가 다른 선수와 각각 한 번씩 씨름 시합을 하여 승리를 가장 많이 거둔 선수를 우승자로 정한다. 모든 선수가 각 시합에서 상대 선수를 이길 확률이 $\frac{1}{2}$로 모두 같을 때, 이 대회에서 선수 E가 선수 A에게만 패하고 나머지 선수에게는 모두 승리하여 3승 1패로 우승할 확률은 $a \times \left(\frac{1}{2}\right)^9$이다. a의 값을 구하시오. (단, 각 시합에서 비기는 경우는 없고, 선수 E 이외에 3승을 거두는 선수는 없다.) [4점]

정 답

1.	19	2.	④	3.	⑤	4.	④
5.	④	6.	2	7.	⑤	8.	④
9.	④	10.	17	11.	②	12.	②
13.	③	14.	54	15.	10	16.	③
17.	④	18.	④	19.	8	20.	③
21.	⑤	22.	15	23.	4	24.	③
25.	39	26.	⑤	27.	④	28.	⑤
29.	④	30.	③	31.	⑤	32.	112
33.	⑤	34.	5	35.	③	36.	②
37.	67	38.	②	39.	①	40.	③
41.	④	42.	②	43.	④	44.	③
45.	50	46.	③	47.	③	48.	⑤
49.	④	50.	②	51.	432	52.	②
53.	⑤	54.	②	55.	⑤	56.	②
57.	③	58.	③	59.	③	60.	⑤
61.	①	62.	③	63.	160	64.	420
65.	15	66.	③	67.	③	68.	⑤
69.	②	70.	9	71.	104	72.	①
73.	②	74.	①	75.	④	76.	②
77.	⑤	78.	4	79.	288	80.	55
81.	⑤	82.	③	83.	③	84.	④
85.	②	86.	①	87.	③	88.	16
89.	⑤	90.	①	91.	⑤	92.	177
93.	7						

1) 정답 ①

함수 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x-1}=2+\dfrac{a+2}{x-1}$ 이므로 점근선은

$x=1,\ y=2$ 이다.

이때 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수이므로 $g(x)$ 의 점근선은 $x=2,\ y=1$ 이어야 한다.

$b=1,\ c=-2$ 이므로 $g(x)=1+\dfrac{3}{x-2}$ 이다.

이때 $g(1)=-2$ 이므로 $f(-2)=-\dfrac{a-4}{3}=1$ 에서 $a=1$ 이다.

따라서 $g(a)=g(1)=-2$

2) 정답 ③

(i) $7=2+1+1+1+1+1$ 인 경우, 즉 1, 2가 각각 5개, 1개 사용될 때 $\square\square\square\square\square\boxed{2}$는 짝수이므로 이때의 홀수의 개수는 $\dfrac{6!}{5!}-1=5$

(ii) $7=3+1+1+1+1+0$ 인 경우, 즉 0, 1, 3이 각각 1개, 4개, 1개 사용될 때 $\boxed{0}\square\square\square\square\square$는 다섯 자리의 자연수이고, $\square\square\square\square\square\boxed{0}$은 짝수이므로 이때의 홀수의 개수는

$$\frac{6!}{4!}-\left(\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{4!}\right)=20$$

(iii) $7=2+2+1+1+1+0$ 인 경우, 즉 0, 1, 2가 각각 1개, 3개, 2개 사용될 때, $\boxed{0}\square\square\square\square\square$는 다섯 자리의 자연수이고, $\square\square\square\square\square\boxed{0}$ 또는 $\boxed{1}\square\square\square\square\boxed{2}$ 또는 $\boxed{2}\square\square\square\square\boxed{2}$는 짝수이므로 이때의 홀수의 개수는

$$\frac{6!}{3!2!}-\left(\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{3!}\right)=24$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 홀수의 개수는 $5+20+24=49$

3) 정답 160

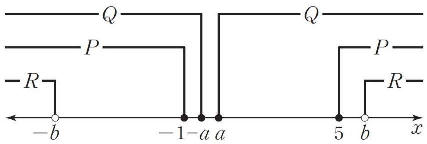
세 조건 $p,\ q,\ r$ 의 진리집합을 $P,\ Q,\ R$ 라 하면

$P=\{x\mid x\le -1$ 또는 $x\ge 5\}$

$Q=\{x\mid x\le -a$ 또는 $x\ge a\}$

$R=\{x\mid x<-b$ 또는 $x>b\}$

이때 q 는 p 이기 위한 필요조건이고, r 는 p 이기 위한 충분조건이면 $R\subset P\subset Q$ 이어야 한다.



따라서 $b\ge 5$ 이고 $-b\le -1$ 에서 $b\ge 5$ 이므로 b 의 최솟값을 $m=5$

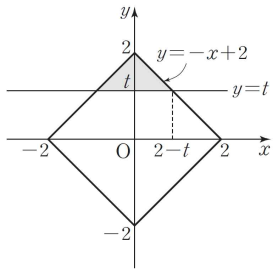
$a\le 5$ 이고 $-a\ge -1$ 에서 $0<a\le 1$ 이므로 a 의 최댓값은 $M=1$

따라서 $40(m-M)=40\times(5-1)=160$

4) 정답 420

$|x|+|y|\le 2$ 를 만족시키는 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역은 네 점 $(2,\ 0),\ (0,\ 2),\ (-2,\ 0),\ (0,\ -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 마름모와 마름모의 내부이다.

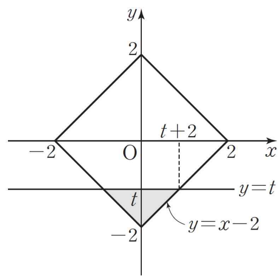
(i) $0\le t<2$ 일 때,



직선 $y=-x+2$ 가 직선 $y=t$ 와 만나는 점의 x 좌표가 $x=2-t$ 이므로 구하는 영역의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times 2(2-t)\times(2-t)=(2-t)^2=t^2-4t+4$$

(ii) $-2<t<0$ 일 때



직선 $y=x-2$ 가 직선 $y=t$ 와 만나는 점의 x 좌표가 $x=t+2$ 이므로 구하는 영역의 넓이는

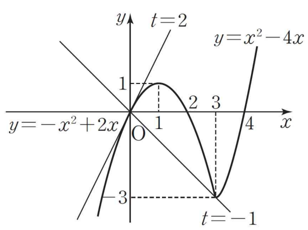
$$S(t)=\frac{1}{2}\times 2(t+2)\times(t+2)=(t+2)^2=t^2+4t+4$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}S(t)dt&=\int_{-1}^{0}(t^2+4t+4)dt+\int_{0}^{1}(t^2-4t+4)dt\\&=\left[\frac{1}{3}t^3+2t^2+4t\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t\right]_{0}^{1}\\&=0-\left(-\frac{1}{3}+2-4\right)+\left(\frac{1}{3}-2+4\right)-0\\&=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

이므로 $90\displaystyle\int_{-1}^{1}S(t)dt=90\times\frac{14}{3}=420$

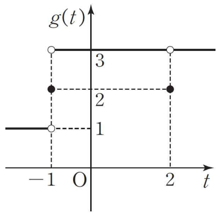
5) 정답 15



$x<3$ 일 때, $f'(x)=-2x+2$ 이므로 $f'(0)=2$ 이다.

따라서 함수 $g(t)$ 는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<-1)\\ 2 & (t=-1 \text{ 또는 } t=2)\\ 3 & (-1<t<2 \text{ 또는 } t>2)\end{cases}$$



$h(t)=t^2+pt+q$ (p, q는 상수)라 할 때, 함수 $g(t)h(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $t=-1$과 $t=2$에서 연속이어야 한다.

(ⅰ) $t=-1$에서 연속일 때

$$\lim_{t\to-1+}g(t)h(t)=\lim_{t\to-1+}g(t)+\lim_{t\to-1+}h(t)$$
$$=3h(-1)$$
$$\lim_{t\to-1-}g(t)h(t)=\lim_{t\to-1-}g(t)+\lim_{t\to-1-}h(t)$$
$$=h(-1)$$
$$g(-1)h(-1)=2h(-1)$$

함수 $g(t)h(t)$가 $t=-1$에서 연속이어야 하므로

$3h(-1)=h(-1)=2h(-1)$에서 $h(-1)=0$

(ⅱ) $t=2$에서 연속일 때

$$\lim_{t\to2+}g(t)h(t)=\lim_{t\to2+}g(t)+\lim_{t\to2+}h(t)$$
$$=3h(2)$$
$$\lim_{t\to2-}g(t)h(t)=\lim_{t\to2-}g(t)+\lim_{t\to2-}h(t)$$
$$=3h(2)$$
$$g(2)h(2)=2h(2)$$

함수 $g(t)h(t)$가 $t=2$에서 연속이어야 하므로

$3h(2)=2h(2)$에서 $h(2)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $h(-1)=0$, $h(2)=0$이므로

$h(-1)=1-p+q=0$ …… ㉠

$h(2)=4+2p+q=0$ …… ㉡

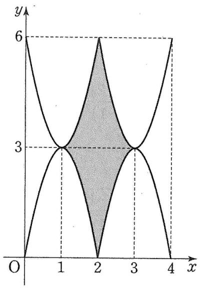
㉠, ㉡에서 $p=-1$, $q=-2$

따라서 $h(t)=t^2-t-2$이므로

$$\lim_{t\to3}\frac{20g(t)}{h(t)}=\frac{20g(3)}{h(3)}=\frac{20\times3}{4}=15$$

6) 정답 ③

곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=3$에 대하여 대칭이동한 곡선이 $y=g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

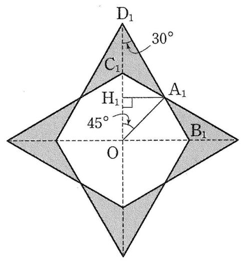


따라서 구하는 넓이는

$$2\int_1^3\{3-f(x)\}dx=4\int_1^2\{3-f(x)\}dx$$
$$=4\int_1^2(3-6x+3x^2)dx$$
$$=4\Big[3x-3x^2+x^3\Big]_1^2$$
$$=4\{(3\times2-3\times2^2+2^3)-(3\times1-3\times1^2+1^3)\}$$
$$=4(2-1)$$
$$=4$$

7) 정답 ③

그림에서 마름모의 대각선의 교점을 O, 두 마름모의 교점 중 하나를 A_1, 점 A_1에 이웃하고 내각의 크기가 $120°$인 팔각형의 두 꼭지점을 각각 B_1, C_1이라 하자. 직선 OC_1 위에 있는 마름모의 꼭짓점 중 점 A_1에 가까운 점을 D_1이라 하고, 점 A_1에서 선분 OD_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하자.



$\angle B_1D_1O=30°$이고 $\overline{B_1D_1}=2$이므로 $\overline{OB_1}=1$, $\overline{OD_1}=\sqrt{3}$

마찬가지로 $\overline{OC_1}=\overline{OB_1}=1$

$\overline{A_1H_1}=h$라 하면 $\angle A_1D_1H_1=30°$이므로 $\overline{D_1H_1}=\sqrt{3}h$이고,

$\angle H_1OA_1=45°$이므로 $\overline{OH_1}=h$이다.

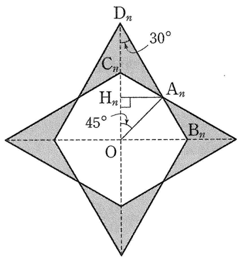
$\overline{D_1H_1}+\overline{OH_1}=\overline{OD_1}$이므로 $\sqrt{3}h+h=\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}+1)h=\sqrt{3}$

따라서 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{D_1C_1}\times\overline{A_1H_1}\times8$$
$$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}-1)\times\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}\times8$$
$$=2\sqrt{3}\times(\sqrt{3}-1)^2=4(2\sqrt{3}-3)$$

그림 R_n의 새로 그린 두 마름모로 이루어진 도형에서 두 마름모의 교점중 하나를 A_n, 점 A_n에 이웃하고 내각의 크기가 $120°$인 팔각형의 두 꼭짓점을 각각 B_n, C_n이라 하자. 직선

OC_n 위에 있는 마름모의 꼭짓점 중 점 A_n에 가까운 점을 D_n이라 하고, 점 A_n에서 선분 OD_n에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.



$\overline{A_nH_n}=h_n$이라 하면 $\angle A_nD_nH_n=30°$이므로 $\overline{D_nH_n}=\sqrt{3}h_n$이고,

$\angle H_nOA_n=45°$이므로 $\overline{OH_n}=h_n$, $\overline{OA_n}=\sqrt{2}h_n$이다.

$\overline{OD_n}:\overline{OA_n}=(\sqrt{3}h_n+h_n):\sqrt{2}h_n=(\sqrt{3}+1):\sqrt{2}$

이므로 $\dfrac{\overline{OA_n}}{\overline{OD_n}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$

따라서 S_n은 첫째항이 $4(2\sqrt{3}-3)$이고 공비가

$\left\{\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}\right\}^2=2-\sqrt{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4(2\sqrt{3}-3)}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{4(2\sqrt{3}-3)}{\sqrt{3}-1}=2(3-\sqrt{3})$

8) 정답 ⑤

ㄱ. $f(2\sqrt{a})=(2\sqrt{a})^3-3a\times2\sqrt{a}+b$

$=8a\sqrt{a}-6a\sqrt{a}+b$

$=2a\sqrt{a}+b$

$f(-\sqrt{a})=(-\sqrt{a})^3-3a\times(-\sqrt{a})+b$

$=-a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}+b$

$=2a\sqrt{a}+b$

따라서 $f(2\sqrt{a})=f(-\sqrt{a})$이다. (참)

ㄴ. $f(x)=x^3-3ax+b$에서

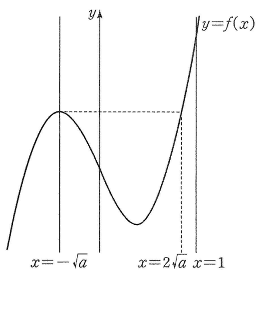
$f'(x)=3x^2-3a=3(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$이므로

$x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

따라서 극댓값은 $x=-\sqrt{a}$일 때 $2a\sqrt{a}+b$이다. (참)

ㄷ. $0<a<\dfrac{1}{4}$이므로 $0<\sqrt{a}<\dfrac{1}{2}$

따라서 $0<2\sqrt{a}<1$이고 ㄱ, ㄴ 에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $0<a<\dfrac{1}{4}$일 때, 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

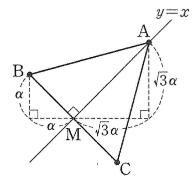
9) 정답 ②

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같다.

$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2,\ x^2-x-2=0,\ (x-2)(x+1)=0$

이때 $x>0$이므로 $x=2$이다. 즉, A$(2,\ 2)$이다.



선분 BC의 중점을 M이라 하고, 두 점 B, M의 x좌표의 차를 $\alpha\,(\alpha>0)$이라 하면 두 점 B, M의 y좌표의 차는 α이고,

$\overline{BM}=\sqrt{2}\alpha$, $\overline{AM}=\sqrt{3}\,\overline{BM}=\sqrt{6}\alpha$이므로 두 점 A, M의 x좌표의 차는 $\sqrt{3}\alpha$, 두 점 A, M의 y좌표의 차는 $\sqrt{3}\alpha$이다.

따라서 M$(2-\sqrt{3}\alpha,\ 2-\sqrt{3}\alpha)$, B$(2-\sqrt{3}\alpha-\alpha,\ 2-\sqrt{3}\alpha+\alpha)$

점 B가 곡선 $y=f(x)$위의 점이므로

$2-\sqrt{3}\alpha+\alpha=\sqrt{(2-\sqrt{3}\alpha-\alpha)+2}$

$(2-\sqrt{3}\alpha+\alpha)^2=(2-\sqrt{3}\alpha-\alpha)+2$

$4+3\alpha^2+\alpha^2-4\sqrt{3}\alpha-2\sqrt{3}\alpha^2+4\alpha=2-\sqrt{3}\alpha-\alpha+2$

$2(2-\sqrt{3})\alpha^2=(3\sqrt{3}-5)\alpha$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2(2-\sqrt{3})}=\dfrac{(3\sqrt{3}-5)(2+\sqrt{3})}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\alpha\times\sqrt{6}\alpha=2\sqrt{3}\times\alpha^2$

$=2\sqrt{3}\times\dfrac{4-2\sqrt{3}}{4}$

$=2\sqrt{3}-3$

10) 정답 9

조건 (나)에서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f'\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\int_0^2 f'(x)dx=f(2)-f(0)=8$$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$f(2)-f(0)=(8+4a+2b+c)-c$

$=8+4a+2b=8$

에서 $2a+b=0$이므로 $b=-2a$이다.

이때, $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 조건 (다)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+2ax+b\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-3b=a^2+6a=a(a+6)\le0$

즉, $-6\le a\le0$

$$\int_1^4 f'(x)dx = f(4)-f(1)$$

$$=(64+16a+4b+c)-(1+a+b+c)$$

$$=(64+8a+c)-(1-a+c)$$

$$=63+9a$$

이므로 $9 \le 63+9a \le 63$

따라서 $\int_1^4 f'(x)dx$의 최솟값은 9이다.

11) 정답 104

(ⅰ) $n=9$일 때

$$\frac{1}{9},\ \frac{1+2}{9}=\frac{1}{3},\ \frac{1+2+3}{9}=\frac{2}{3},\ \frac{1+2+3+4}{9}=\frac{10}{9},$$

$$\frac{1+2+3+4+5}{9}=\frac{5}{3},\ \frac{1+2+\cdots+6}{9}=\frac{7}{3},$$

$$\frac{1+2+\cdots+7}{9}=\frac{28}{9},\ \frac{1+2+\cdots+8}{9}=4$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{k}{9}\right)=f\left(\frac{1}{9}\right)+f\left(\frac{2}{9}\right)+f\left(\frac{3}{9}\right)+\cdots+f\left(\frac{m}{9}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{8}{9}+0\right)$$

$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{8}{9}+0\right)+\cdots$$

$$=4+4+\cdots$$

에서 $4\times q$가 9의 배수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 q의 값이 9이므로

$a_9=9\times 9-1=80$

(ⅱ) $n=10$일 때

$$\frac{1}{10},\ \frac{1+2}{10}=\frac{3}{10},\ \frac{1+2+3}{10}=\frac{3}{5},\ \frac{1+2+3+4}{10}=1,$$

$$\frac{1+2+3+4+5}{10}=\frac{3}{2},\ \frac{1+2+\cdots+6}{10}=\frac{21}{10}$$

$$\frac{1+2+\cdots+7}{10}=\frac{14}{5},\ \frac{1+2+\cdots+8}{10}=\frac{18}{5},$$

$$\frac{1+2+\cdots+9}{10}=\frac{9}{2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{k}{10}\right)=f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{10}\right)+f\left(\frac{3}{10}\right)+\cdots+f\left(\frac{m}{10}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\cdots+\frac{9}{10}+0\right)$$

$$+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\cdots+\frac{9}{10}+0\right)+\cdots$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+\cdots$$

에서 $\frac{9}{2}\times r$가 10의 배수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 r의 값이 20이고, $\frac{9}{2}\times r'+1$이 10의 배수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 r'의 값이 2이므로

$a_{10}=2\times 10+4=24$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$a_9+a_{10}=80+24=104$

12) 정답 ①

숫자 4를 포함하는 자연수 14의 분할은 자연수 10의 각 분할에 숫자 4를 더한 것과 같으므로 자연수 14의 분할 중에서 4를 포함하고 2개 이상의 짝수의 합으로만 나타내어지는 분할은 자연수 5의 분할에 2를 곱하고 숫자 4를 더한 것으로 표현할 수 있다.

$5=4+1=3+2$

$=3+1+1=2+2+1$

$=2+1+1+1$

$=1+1+1+1+1$

이므로 자연수 14의 분할 중에서 4를 포함하고 2개 이상의 짝수의 합으로만 나타내어지는 분할은

$10+4=8+2+4=6+4+4$

$=6+2+2+4=4+4+2+4$

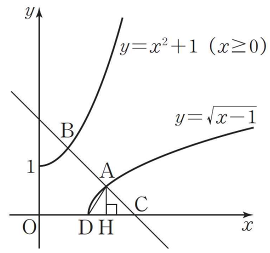
$=4+2+2+2+4$

$=2+2+2+2+2+4$

로 개수는 7이다.

13) 정답 ②

점 A의 좌표는 $(t,\ \sqrt{t-1})$이고, 점 H의 좌표는 $(t,\ 0)$이다.



점 D의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로

$$\overline{AD}=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{t-1}-0)^2}=\sqrt{t^2-t}$$

직선 AB의 기울기가 -1이므로 삼각형 AHC는

$\overline{AH}=\overline{CH}=\sqrt{t-1}$ 인 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{AC}=\sqrt{2}\times\overline{AH}=\sqrt{2}\sqrt{t-1}$ 이므로

$$\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{AC}^3}{\overline{AD}-\overline{AH}}=\lim_{t\to 1+}\frac{(\sqrt{2}\sqrt{t-1})^3}{\sqrt{t^2-t}-\sqrt{t-1}}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{2\sqrt{2}\sqrt{t-1}(t-1)}{\sqrt{t-1}(\sqrt{t}-1)}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{2\sqrt{2}(t-1)}{\sqrt{t}-1}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{2\sqrt{2}(t-1)(\sqrt{t}+1)}{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{2\sqrt{2}(t-1)(\sqrt{t}+1)}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1+}2\sqrt{2}(\sqrt{t}+1)$$

$$=2\sqrt{2}\times 2=4\sqrt{2}$$

14) 정답 ①

ㄱ. $\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=-1\times 0=0,\ \lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=1\times 0=0$

이므로 $\lim_{x\to -1}f(x)g(x)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=-1\times1=-1$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=-1$

그런데 $f(1)g(1)=(-1)\times(-1)=1$ 이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$ 이 되어 함수 $y=f(x)g(x)$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to1+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{-1}{1}=-1$, $\lim_{x\to1-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{-1}=-1$ 이므로

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$

그런데 $\dfrac{f(1)}{g(1)}=\dfrac{-1}{-1}=1$ 이므로 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq\dfrac{f(1)}{g(1)}$ 이 되어 함수

$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)

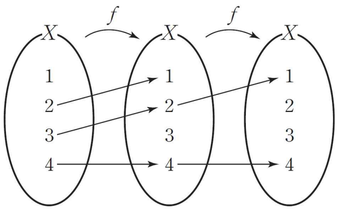
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

15) 정답 ④

함수 $(f\circ f)(x)$ 의 치역을 Z라 하자.

$f(3)=2$ 이므로 $Z=\{1,\ 2,\ 4\}$ 이기 위해서는 $f(2)\neq3$ 이다.

(i) $f(2)=1$ 일 때

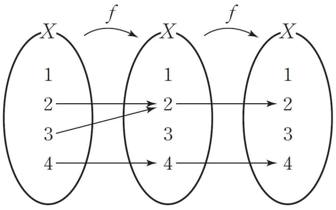


$f(1)=1$ 또는 $f(1)=3$ 또는 $f(1)=4$ 이면 Z는 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 가 될 수 없다.

$f(1)=2$ 이면 $Z=\{1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

따라서 $f(1)+f(2)=2+1=3$

(ii) $f(2)=2$ 일 때

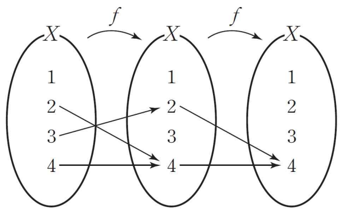


$f(1)=2$ 또는 $f(1)=3$ 또는 $f(1)=4$ 이면 Z는 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 가 될 수 없다.

$f(1)=1$ 이면 $Z=\{1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

따라서 $f(1)+f(2)=1+2=3$

(iii) $f(2)=4$ 일 때

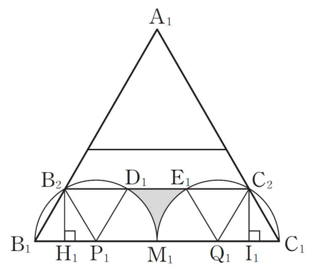


$f(1)$ 의 값이 1, 2, 3, 4 중에서 어떤 값을 갖든지 Z는 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 가 될 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)+f(2)=3$

16) 정답 ②

그림 R_1 에서 두 선분 B_1M_1, M_1C_1 의 중점을 각각 P_1, Q_1 이라 하고, 선분 B_1M_1 을 지름으로 하는 반원이 선분 B_2C_2 와 만나는 점 중에서 B_2 가 아닌 점을 D_1, 선분 M_1C_1 을 지름으로 하는 반원이 선분 B_2C_2 와 만나는 점 중에서 C_2 가 아님 점을 E_1 이라 하자. 또 두 점 B_2, C_2 에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, I_1 이라 하자.



삼각형 $A_1B_1C_1$ 은 정삼각형이고 $\overline{B_1P_1}=\overline{B_2P_1}$ 이므로 삼각형 $B_1P_1B_2$ 는 정삼각형이다. 또 선분 B_1C_1 과 선분 B_2C_2 는 평행하므로

$$\angle P_1B_2D_1=\angle B_2P_1B_1=60°$$

이때 $\overline{D_1P_1}=\overline{B_2P_1}$ 이므로 $\angle P_1B_2D_1=\angle B_2D_1P_1$ 이다.

또 $\angle B_2D_1P_1=\angle M_1P_1D_1$ 이므로 $\angle M_1P_1D_1=60°$ 이다.

따라서 부채꼴 $P_1M_1D_1$ 은 중심각의 크기가 $60°$ 이고 반지름의 길이가

$$\overline{P_1M_1}=\frac{1}{4}\overline{B_1C_1}=\frac{1}{4}\times8=2$$

마찬가지로 부채꼴 $Q_1M_1E_1$ 도 중심각의 크기가 $60°$ 이고 반지름의 길이가 2 이다.

구하는 ▽ 모양의 도형의 넓이 S_1 은 사다리꼴 $B_1C_1C_2B_2$ 의 넓이에서 한 변의 길이가 2 인 정삼각형 4 개의 넓이와 중심각의 크기가 $60°$ 이고 반지름의 길이가 2 인 부채꼴 2 개의 넓이를 빼면 된다.

한 변의 길이가 2 인 정삼각형 $B_1P_1B_2$ 의 높이는

$$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

이므로 정삼각형 $B_1P_1B_2$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

$\overline{B_1H_1}=\overline{C_1I_1}=2\times\frac{1}{2}=1$ 이므로 $\overline{B_2C_2}=8-2=6$ 이다.

따라서

$$S_1=\frac{1}{2}\times(6+8)\times\sqrt{3}-4\times\sqrt{3}-2\times\pi\times2^2\times\frac{60}{360}$$

$$=7\sqrt{3}-4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

$$=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

한편, $\overline{B_1C_1}:\overline{B_2C_2}=8:6=4:3$ 이므로 두 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 과 $A_1B_2C_2$ 의 닮음비는 $4:3$ 이고 넓이의 비는 $16:9$ 이다.

따라서 그림 R_2 에서 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2 는

$$S_2=S_1+\frac{9}{16}S_1$$

같은 방법으로

$$S_3=S_1+\frac{9}{16}S_1+\left(\frac{9}{16}\right)^2S_1$$

$$\vdots$$

$$S_n=S_1+\frac{9}{16}S_1+\left(\frac{9}{16}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}S_1$$

따라서 $S_n=S_1\left\{1+\frac{9}{16}+\left(\frac{9}{16}\right)^2+\cdots+\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}\right\}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\times\frac{1}{1-\frac{9}{16}}$$

$$=\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\times\frac{16}{7}$$

$$=\frac{16}{21}(9\sqrt{3}-4\pi)$$

다른 풀이

구하는 ▽ 모양의 도형의 넓이 S_1 은 사다리꼴 $P_1Q_1E_1D_1$ 의 넓이에서 중심각의 크기가 $60°$ 이고 반지름의 길이가 2 인 부채꼴 2 개의 넓이를 빼면 된다.

$\overline{B_2H_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$, $\overline{D_1E_1}=2$, $\overline{P_1Q_1}=4$ 이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}-2\times\pi\times2^2\times\frac{60}{360}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

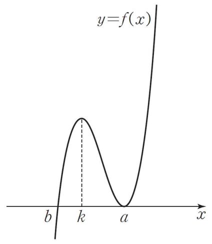
17) 정답 ⑤

조건 (다)에서 삼차함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4 이므로 $f(k)=4$ 를 만족시키는 실수 k 가 존재하고, $f'(k)=0$ 이다.

또한 조건 (나)에서 1 보다 큰 상수 a 에 대하여

$f(a)=g(a)=f(a)-|f'(a)|=0$ 이므로 $f(a)=f'(a)=0$ 이다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고 극솟값은 0 이다.



삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로

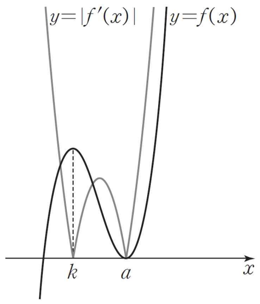
$f(x)=(x-b)(x-a)^2$ (b 는 상수이고 $b<k<a$) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

또 $f'(x)=(x-a)^2+2(x-b)(x-a)=(x-a)(3x-a-2b)$

$f'(k)=0$ 이므로 $k=\frac{a+2b}{3}$ …… ㉡

(i) 구간 $(-\infty,\ k]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하고, 함수 $|f'(x)|$ 는 감소하므로 함수 $g(x)=f(x)-|f'(x)|$ 는 $x=k$ 에서 최댓값 4 를 갖는다.



(ii) 닫힌구간 $[k,\ a]$ 에서 $f(x)$ 는 감소하고,

$|f'(x)|\ge0$, $f'(k)=f'(a)=0$ 이므로

$g(x)=f(x)-|f'(x)|$ 는 $x=k$ 에서 최댓값 4 를 갖는다.

(i), (ii)로부터 구간 $(-\infty,\ a]$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $x=k$ 에서 최댓값 4 를 갖는다.

이때 $a>1$ 이고, 조건 (가)에서 $g(1)=4$ 이므로 $k=1$ 이다.

㉡에서 $1=\frac{3-a}{2}$ 이므로

$$b=\frac{3-a}{2}$$

$b=\frac{3-a}{2}$ 를 ㉠에 대입하면

$$f(x)=\left(x-\frac{3-a}{2}\right)(x-a)^2$$

이때 $g(1)=f(1)-|f'(1)|=4$ 에서 $f'(1)=0$ 이므로 $f(1)=4$ 이다.

$$\left(1-\frac{3-a}{2}\right)(1-a)^2=\frac{(a-1)^3}{2}=4$$

$$(a-1)^3=8$$

$a-1>0$ 이므로

$$a-1=2,\ a=3$$

따라서 $f(x)=x(x-3)^2$ 이므로

$$a\times f(5)=3\times5\times(5-3)^2=60$$

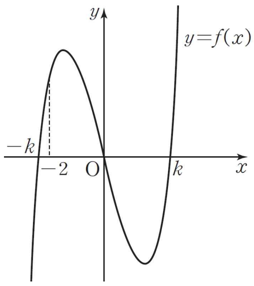
18) 정답 4

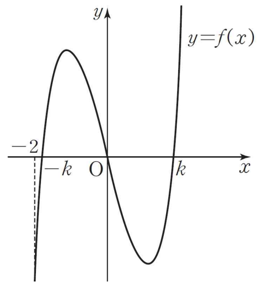
삼차함수 $f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, x 축과 서로

다른 세 점에서 만나므로

$$f(x)=x(x-k)(x+k) \quad (k>0)$$

으로 놓을 수 있다.





(ⅰ) $-k<-2$, 즉 $k>2$이면 $\int_{-2}^{-k}f(t)dt=-\int_{-k}^{-2}f(t)dt<0$

(ⅱ) $-k=-2$, 즉 $k=2$이면

$f(x)=x(x-2)(x+2)=x^3-4x$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{-2}^{x}f(t)dt=\int_{-2}^{x}(t^3-4t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^2\right]_{-2}^{x}$$
$$=\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2\right)-(4-8)$$
$$=\frac{1}{4}x^4-2x^2+4$$
$$=\frac{1}{4}(x^2-4)^2\geq 0$$

(ⅲ) $-2<-k<0$, 즉 $0<k<2$이면 $\int_{-k}^{-2}f(t)dt<0$

따라서 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-2}^{x}f(t)dt\geq 0$이어야 하므로 $k=2$이다.

이때 $f(x)=x(x-2)(x+2)$이므로

$$\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_{-2}^{0}x(x-2)(x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}$$
$$=4$$

19) 정답 288

0이 아닌 세 정수 a, b, c에 대하여 $|a|=X$, $|b|=Y$, $|c|=Z$라 하면 $X\geq 1$, $Y\geq 1$, $Z\geq 1$이므로 방정식 $X+Y+Z=10$을 만족시키는 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수는 방정식 $X'+Y'+Z'=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X', Y', Z'의 순서쌍 $(X',\ Y',\ Z')$의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$$

$|a|=X$, $|b|=Y$, $|c|=Z$이므로 a는 X 또는 $-X$ 중 하나의 수, b는 Y 또는 $-Y$ 중 하나의 수, c는 Z 또는 $-Z$ 중 하나의 수이다.

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$36\times 2\times 2\times 2=288$$

20) 정답 55

조건 (가)에서 $f(2)\geq 0$이므로 $16-4a+4b-8\geq 0$

$$b\geq a-2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 $f(x)$는 극값을 가지므로

$f'(x)=6x^2-2ax+2b=2(3x^2-ax+b)$에서

이차방정식 $3x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

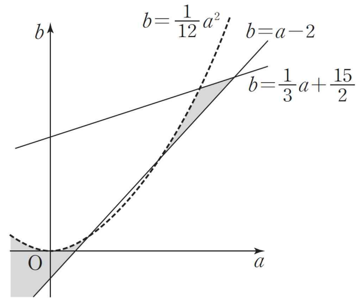
$$a^2-12b>0,\ b<\frac{1}{12}a^2 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

조건 (다)에서

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(2x^3-ax^2+2bx-8)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+bx^2-8x\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{3}a+b-\frac{15}{2}\leq 0$$

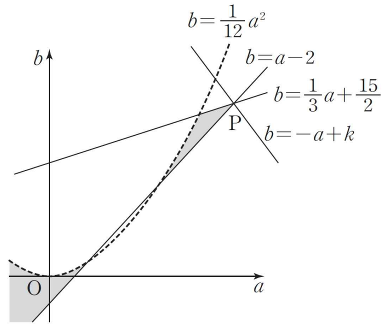
즉, $b\leq\frac{1}{3}a+\frac{15}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

부등식 ㉠, ㉡, ㉢이 나타내는 영역은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



(단, 실선은 경계선을 포함하고 점선은 경계선을 제외한다.)

$a+b=k$라 하면 직선 $b=-a+k$가 두 직선 $b=\frac{1}{3}a+\frac{15}{2}$와 $b=a-2$가 만나는 점 P를 지날 때 $a+b$는 최댓값을 갖는다.



(단, 실선은 경계선을 포함하고 점선은 경계선을 제외한다.)

두 직선 $b=a-2$, $b=\frac{1}{3}a+\frac{15}{2}$가 만나는 점 P의 좌표가 $\left(\frac{57}{4},\ \frac{49}{4}\right)$이므로 $a+b$의 최댓값은 $\frac{53}{2}$이다.

따라서 $p+q=2+53=55$

21) **정답** ⑤

두 상자 A, B에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 홀수인 사건을 C, 두 수의 합이 8인 사건을 D라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(D|C)$이다. 두 상자 A, B에서 임의로 꺼낸 카드에 적혀 있는 숫자를 각각 a, b라 하자.

카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 홀수인 경우는 $a=1$, $b=7$ 또는 $a=3$, $b=7$일 때이므로

$$\mathrm{P}(C)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

또 두 수의 곱이 홀수이면서 두 수의 합이 8인 경우는 $a=1$, $b=7$일 때이므로

$$\mathrm{P}(C\cap D)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

따라서 $\mathrm{P}(D|C)=\dfrac{\mathrm{P}(C\cap D)}{\mathrm{P}(C)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{15}}=\dfrac{3}{4}$

22) **정답** ③

$f(x)=a(x^2-2x-3)$ ($a<0$인 상수)이므로

$$f'(x)=a(2x-2)$$

a_n은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(n,\ f(n))$에서의 접선의 기울기이므로

$$a_n=f'(n)=a(2n-2)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k&=\sum_{k=1}^{10}a(2k-2)=2a\sum_{k=1}^{10}(k-1)\\&=2a\left(\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1\right)\\&=2a\left(\frac{10\times11}{2}-10\right)\\&=2a\times45=90a\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=-30$에서 $90a=-30$, $a=-\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{3}(x^2-2x-3)$이므로

$$f(0)=\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-3)=1$$

23) **정답** ③

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}+a & (x<2)\\ \dfrac{bx+8}{x-1} & (x\ge2)\end{cases}$에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

$\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$에서

$$\sqrt{3-2}+a=\frac{2b+8}{2-1},\ 1+a=2b+8$$

$$a=2b+7 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

$x<2$일 때, $\sqrt{3-x}+a>\sqrt{3-2}+a=1+a$

$x\ge2$일 때

$$f(x)=\frac{bx+8}{x-1}=\frac{b(x-1)+b+8}{x-1}=b+\frac{b+8}{x-1}$$

이므로 $x=2$에서 연속인 함수 $f(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y>-2\}$이려면

$b\ne-8$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선인 직선 $y=b$가 직선 $y=-2$와 일치해야 한다.

따라서 $b=-2$이다.

$b=-2$를 ㉠에 대입하면

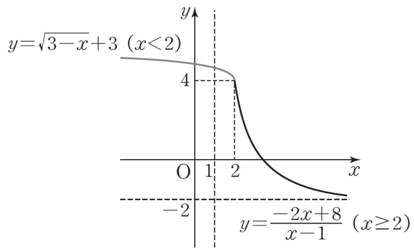
$$a=2\times(-2)+7=3$$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}+3 & (x<2)\\ \dfrac{-2x+8}{x-1} & (x\ge2)\end{cases}$이므로

$$f(ab)=f(-6)=\sqrt{3-(-6)}+3=6$$

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



24) **정답** ④

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(X\ge6)=0.5$에서 $m=6$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le4)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{4-6}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{2}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2}{\sigma}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)\\&=0.1587\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.3413 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(6,\ \dfrac{\sigma^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(6,\ \left(\dfrac{\sigma}{10}\right)^2\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(5.8\le\overline{X}\le6.2)&=\mathrm{P}\left(\frac{5.8-6}{\frac{\sigma}{10}}\le Z\le\frac{6.2-6}{\frac{\sigma}{10}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{2}{\sigma}\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)\\&=2\times0.3413\\&=0.6826 \quad (㉠\text{에 의해})\end{aligned}$$

25) **정답** ②

조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$는

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx\ \ (a,\ b,\ c\text{는 상수},\ a\ne0)$$

으로 놓을 수 있다.

$f(2)=0$에서 $8a+4b+2c=0$

$$4a+2b+c=0 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(2)}{x+1}=6$ 에서

$x\to-1$ 일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to-1}\{f(x)-f(2)\}=0$ 이므로

$$f(-1)=f(2)=0$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(2)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=6$$

이때 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로

$f'(-1)=6$ 에서

$$3a-2b+c=6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$f(-1)=0$ 에서 $-a+b-c=0$

$$a-b+c=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$a=2,\ b=-2,\ c=-4$$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2-4x$, $f'(x)=6x^2-4x-4$ 이므로

$$f'(1)-f(1)=(6-4-4)-(2-2-4)=-2-(-4)=2$$

다른 풀이

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(2)}{x+1}$ 의 값이 존재하고 $x\to-1$ 일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to-1}\{f(x)-f(2)\}=0$ 이므로

$f(-1)=f(2)=0$ (조건 (가)에 의해)

또 $f(0)=0$ 이므로 삼차함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=ax(x+1)(x-2) \quad (a\text{는 0이 아닌 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(2)}{x+1}&=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{ax(x+1)(x-2)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}ax(x-2)\\&=3a\end{aligned}$$

$3a=6$ 에서 $a=2$

따라서 $f(x)=2x(x+1)(x-2)=2x^3-2x^2-4x$,

$$f'(x)=6x^2-4x-4$$

$$f'(1)-f(1)=(6-4-4)-(2-2-4)=-2-(-4)=2$$

26) 정답 ①

확률변수 X의 값이 k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 6)$인 경우는 흰 공 1개, 검은 공 $(k-2)$개를 꺼낸 후, k번째로 흰 공을 꺼낸 경우이다.

6개의 공 중에서 꺼낸 공 $(k-1)$개에 흰 공 1개, 검은 공 $(k-2)$개가 있을 확률은

$$\begin{aligned}\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_{k-2}}{{}_6\mathrm{C}_{k-1}}&=2\times\frac{4!}{(k-2)!(6-k)!}\times\frac{(k-1)!(7-k)!}{6!}\\&=\frac{(k-1)(7-k)}{15}\end{aligned}$$

그 후 k번째로 뽑은 공이 흰 공일 확률은

$\frac{1}{6-(k-1)}=\frac{1}{7-k}$ 이므로

$X=k$ $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 6)$일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k)&=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_{k-2}}{{}_6\mathrm{C}_{k-1}}\times\frac{1}{7-k}\\&=\frac{(k-1)(7-k)}{15}\times\frac{1}{7-k}\\&=\frac{k-1}{15}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=2}^{6}k\mathrm{P}(X=k)\\&=\sum_{k=2}^{6}\frac{k(k-1)}{15}\\&=\sum_{k=1}^{6}\frac{k(k-1)}{15}\\&=\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{6}(k^2-k)\\&=\frac{1}{15}\left(\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}k\right)\\&=\frac{1}{15}\left(\frac{6\times7\times13}{6}-\frac{6\times7}{2}\right)\\&=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

참고

$X=2$ 일 때, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

$X=3$ 일 때, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{15}$

$X=4$ 일 때, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

$X=5$ 일 때, $\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_4}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$

$X=6$ 일 때, $\mathrm{P}(X=6)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_4}{{}_6\mathrm{C}_5}\times1=\frac{1}{3}$

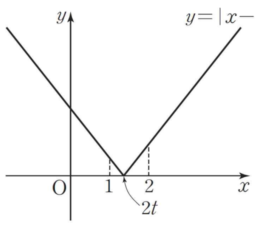
이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	2	3	4	5	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

27) 정답 ③

$\frac{1}{2}\le t\le1$ 일 때 $1\le2t\le2$ 이므로

함수 $f(x-2t)=|x-2t|$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $\frac{1}{2} \le t \le 1$이고 $0 \le x \le 2$일 때

$$xf(x-2t) = x|x-2t| = \begin{cases} -x(x-2t) & (0 \le x \le 2t) \\ x(x-2t) & (2t \le x \le 2) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^2 xf(x-2t)dx \\ &= \int_0^{2t} \{-x(x-2t)\}dx + \int_{2t}^2 x(x-2t)dx \\ &= \int_0^{2t} (-x^2-2tx)dx + \int_{2t}^2 (x^2-2tx)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+tx^2\right]_0^{2t} + \left[\frac{1}{3}x^3-tx^2\right]_{2t}^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3}t^3+4t^3\right)+\left\{\frac{8}{3}-4t-\left(\frac{8}{3}t^3-4t^3\right)\right\} \\ &= \frac{8}{3}t^3-4t+\frac{8}{3} \end{aligned}$$

즉, $g(t) = \frac{8}{3}t^3-4t+\frac{8}{3}$ $\left(단, \frac{1}{2} \le t \le 1\right)$

$$g'(t) = 8t^2-4 = 8\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$g'(t)=0$에서 $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

닫힌구간 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	↘	극소	↗	$\frac{4}{3}$

닫힌구간 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$에서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 극소이면서 최소이므로 함수 $g(t)$의 최솟값 m은

$$\begin{aligned} m &= g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}+\frac{8}{3} \\ &= \frac{8-4\sqrt{2}}{3} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{3} \end{aligned}$$

또 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}-2+\frac{8}{3} = 1$, $g(1) = \frac{8}{3}-4+\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

이므로 닫힌구간 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$에서 함수 $g(t)$의 최댓값 M은

$M = \frac{4}{3}$이다.

따라서 $\frac{m}{M} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{3} \times \frac{3}{4} = 2-\sqrt{2}$