특강 1. 수열

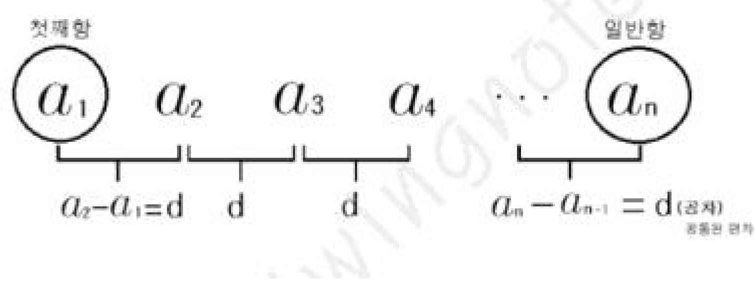
edited by 물만두

2점, 3점으로 쉽게 나오는 문제에서부터 학생들을 완전히 멘붕(?)에 빠뜨려버리는 21번, 30번 문제까지 수열이라는 단원은 굉장히 넓은 난이도 스펙트럼을 보여주고 있는 걸로 유명하다. 이과 수학보다는 쉽다고 평가받고 있는 문과 수학을 다루다 보면 수열이 출제될 때는 킬러문제 30번 문항보다 앞부분에 깔리는 상대적으로 쉽게 느껴지는 문항을 자주 만나게 된다. 기본 개념을 다룬다던지 극한과 결합되어 단원 간 통합형 문항을 만든다던지 유형은 다양하게 출제되고 있는데 어떻게 출제되고 있는지 대표적인 유형을 다뤄보고자 한다.

수열이라는 단어를 듣게 되면 우선 처음에 머릿속에 드는 생각은 공차나 공비 같은 개념들과 굉장히 많은 식들이 떠오를 것이다. 2점, 3점 문항같은 쉬운 문제를 풀 때는 이 정도 공식만 알고 있어도 풀린다. 하지만 가끔 수열 단원에서 어려운 문항이 출제되는 경우가 있는데 이때는 수열에 대한 깊은 이해를 요구할 때도 있다.
수열은 말 그대로 '수의 나열'이다. 그 수의 나열이 처음부터 끝까지 일정한 규칙을 가지고 있다면 그 규칙에 따른 이름을 부여해주어 유형화시킨다. 현 교육과정에서 배우는 대표적인 수열은 두 가지다. 등차수열과 등비수열이다. 지금까지 이 수열들을 공부해올 때 단순한 공식들의 암기에서 끝났겠지만 조금 더 빠른 문제 풀이를 위해서는 딱딱한 공식 암기보다는 유연한 사고가 필요하다. 물론 기본적인 공식은 당연히 외웠다는 것을 전제로 깔고 가야 한다. 이 때 문자로 외우는 것이 버거운 학생들은 한국어로 외우는 것도 좋은 방법이다.

① 등차수열

등차수열은 수열의 항 사이에 일정한 차이가 있는 수열을 의미한다. 항수가 증가함에 따라 일정한 수치가 더해지거나 빼진다고 생각하면 편하다. 등차수열에서 나오는 개념은 초항(a_1), 공차(d), 항수(n)이 있다.



그럼 n번째 항을 표현해주는 일반항(a_n)은 어떻게 표현될까? 위의 수열을 나타낸 그림을 이용해서 생각해보면 쉽다. 초항에서 출발하여 $(n-1)$개의 공차를 더해주면 n번째 항이 식으로 표현된다. 그럼 조금 변형해서 초항에서 출발하지 않고 m번째 항에서 시작하면 어떨까? 조금 생각해보면 m번째 항에서 $(n-m)$개의 공차를 더해주면 n번째 항이 나온다.(참고로 말씀드

리면 m은 n보다 작을 필요가 없습니다.)

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$$

[문제 1]

등차 수열 a_n에서 a_2=5, a_5=14이다. a_n은 어떻게 표현 될 것인가?

(아주 기본적이고 쉬운 문제입니다. 이렇게 쉬운 일반항 구하는 문제를 탄탄하게 해결해 나갈 줄 알아야 더 어려운 개념을 다루는 문제도 수월하게 풀어나갈 수 있습니다)
이러한 문제가 나왔을 때 일반항을 구해주는 것이 가장 급선무이다. 그런데 평범하게 일반항에 대한 식 두 개를 작성하여 연립방정식을 풀어 초항과 공차를 구해내는 방법이 아닌 조금 독특한 방법을 생각해보자. 공차는 수열 값의 차를 항수의 차로 나눠준 값이다. 이것을 수식으로 써보면 다음과 같이 써진다.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

이렇게 빠르게 공차를 구해내고 위의 식을 이용해서 작성해내면 쉽게 일반항을 구해낼 수 있다.

[풀이 1]

주어진 조건을 통해서 우리는 공차 $d = \frac{14-5}{5-2} = 3$이라는 것을 구해낼 수 있다. 그리고 바로 일반항을 구해내면 $a_n = a_2 + (n-2)d = 5 + (n-2) \times 3 = 3n-4$임을 알 수 있다.

$$a_n = 3n-4$$

일반항에 대한 논의점을 지나서 수열의 합에 대해서 생각해보면 크게 두 가지 식이 있다. S_n을 첫째항에서부터 n번째 항까지의 합이라고 하자.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{\text{수}(\text{초항} + \text{마지막항})}{2}$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{\text{개수}(2 \times \text{초항} + (\text{개수} - 1) \times \text{공차})}{2}$$

문자를 이용해서 공식을 외우기 힘든 학생들은 오른쪽에 따로 써놓은 것처럼 한글로 외우는 것도 괜찮다. 이를 조금 확장시키기 위해 한 가지 문제를 풀어보자.

[문제 2]

수열 a_n에서 첫 번째 항에서부터 n번째 항까지의 합을 S_n이라고 한다면 S_n은 다음과 같이 표현된다고 한다.

$$S_n = an^2 + bn + c$$

그렇다면 이 수열이 첫 번째 항에서부터 등차수열이기 위한 조건은 무엇인가?

[풀이 2]

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$이기 때문에 $a_n = S_n - S_{n-1}$이 성립한다. 단, 이 식은 n이 2보다 크거나 같을 때 성립하는 식이고 n이 1일 경우에는 $a_n = S_1$이다. 이제 주어진 S_n을 이용하여 계산을 해보면 다음과 같은 a_n을 구해낼 수 있다.

$$a_n = 2an + (-a + b)\text{(단, } n \geq 2\text{일 경우)}$$

$$a_1 = a + b + c$$

우선 n이 2 이상일 경우의 식을 보면 공차가 $2a$인 등차수열을 나타내는 식이 맞다. 그런데 이러한 a_n이 첫 번째 항에서부터 등차수열을 만족하기 위해서는 a_n의 n에 1을 대입한 값이 a_1의 값과 같아야 한다. 즉, $a + b = a + b + c$가 되어야 하기 때문에 $c = 0$이 답이다.

$$c = 0$$

(S_n을 이용하여 a_n을 구하는 방법의 유형은 뒷부분에 더 자세하게 설명해놓았습니다)

여기서 잠깐 알아놓으면 편한 개념이 등차수열 a_n이 만약 공차 d를 가지고 있다고 하면 일반항은 $a_n = dn + \cdots$가 된다는 개념과(뒤 $\cdots$은 초항에 따라서 맞춰주면 됩니다) 그에 따른 S_n의 식이 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \cdots n$인 상수항을 가지고 있지 않은 이차식이라는 개념이다.

② 등비수열

등비수열은 항 사이에 일정한 비율 관계를 가지고 있는 수열을 의미한다. 항수가 증가하면 증가할수록 그에 해당하는 만큼 일정한 수를 곱해주거나 나눠준다고 생각하면 편하다. 등비수열에서 나오는 개념은 등차수열과 비슷하지만 등차수열의 공차 대신에 공비(r)가 있다.

등차수열에서 일반항을 구해준 방법과 비슷하게 등비수열에서도 똑같이 적용해보면 n번째 항은 첫 번째 항에 $(n-1)$개의 공비를 곱해주면 된다. 또, m번째 항에서 출발한다면 $(n-m)$개의 공비를 곱해주면 된다.(이 때도 등차수열과 비슷하게 m은 n보다 작을 필요가 없습니다)

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} = a_m \times r^{n-m}$$

[문제 4]

등비수열 a_n에서 $a_3 = 9$, $a_5 = 81$이다. 이 수열의 일반항 a_n은 어떻게 표현되는가?

등차수열과 비슷하게 이러한 문제를 풀 때 일반적으로는 a_1,r을 미지수로 놓고 두 개의 n을 대입하여 두 개의 식을 연립하는 방법으로 a_1과 r을 구해낸다. 아까 등차수열에서 d를 구하는 방법처럼 여기서도 비슷한 방법으로 공비 r을 구해보자면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1},\ r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$$

(공비 r을 구할 때 r값이 음수일 수도 있다는 사실만 명심해주세요)

[풀이 4]

등비수열 a_n에서 두 개의 항의 값을 알고 있으므로 공비 r을 구해줄 수 있다. $r^2 = 9$이기 때문에 그에 해당하는 공비는 3과 -3이다. 그러므로 일반항 $a_n = 3^{n-1}$과 $a_n = (-3)^{n-1}$이 있다.

$$a_n = 3^{n-1},\ a_n = (-3)^{n-1}$$

등비수열에서 첫 번째 항에서부터 n번째 항까지의 합 S_n을 구해주는 과정에서는 머릿속에 항상 들어있어야 하는 의문점이 'r이 1인가? 아닌가?'이다. 사실, S_n을 구하는 식이 3가지라고 하지만 2개의 식은 분자, 분모에 -1만 곱해주면 같아지는 식이라 서로 같은 식이라고 볼 수 있다. 즉, S_n의 식은 r이 1인지 아닌지에 따른 2개의 식만 존재하는데 다음과 같다.

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} (r\text{이 1이 아닐 때})$$

$$S_n = a_1 \times n (r\text{이 1일 때})$$

등차수열보다는 중요성이 떨어지지만 그래도 등비수열일 때 가지는 S_n의 특징을 보자.

[문제 5]

수열 a_n에서 첫 번째 항에서부터 n번째 항까지의 합을 S_n이라고 하자. 그 S_n의 식이 다음과 같이 표현된다고 한다.

$$S_n = ar^n + b$$

이 S_n이 첫 번째 항부터 등비수열이기 위한 a와 b의 조건은 무엇인가?

[풀이 5]

등차수열에서 다루었던 방법과 비슷하게 a_n에 대한 식을 구해보면 다음과 같이 정리된다.

$a_n = a(r-1)r^{n-1}$(단, $n \geq 2$일 경우)

$a_1 = ar + b$

이 수열 a_n이 첫 번째 항부터 등비수열이기 위해서는 a_n의 식에 $n=1$을 대입한 값이 a_1과 같으면 된다. 즉, $ar - a = ar + b$가 성립하면 되므로 $a = -b$가 성립하면 된다.

$a = -b$

수열 문제를 접근하기 위해서 당연히 알아야하는 개념을 정리해보았다. 이제 수열 파트에서 나오는 대표적인 유형을 정리해보도록 하겠다.

유형1. 기초적인 개념 문제

이 유형의 문제는 주로 2점이나 앞부분 3점에서 출제된다. 위에 서술해준 기초 개념만 숙지하고 있다면 어렵지 않게 푸는 유형이다. 이러한 유형은 최대한 빠르고 정확하게 풀어낼 줄 알아야하며 그렇게 하기 위해서는 수열 단원의 공식이 체화되어 있어야 하는 것은 기본이다. 대표 유형으로 2017학년도 9평 6번을 가져왔다.

6. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_7}{a_5} = 4$$

일 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

유형2. $\sum$와 S_n에 대한 이해

아직 $\sum$가 익숙하지 않은 학생이라면 이 기호만 나오면 기겁하여 문제 풀기를 기피할 수 있다. 근데 그럴 필요가 없는 것이 $\sum$는 정말로 '읽을 줄'만 알면 쉽게 풀린다. 절대 당황하지 말고 차근차근 시그마 기호가 하라는 대로만 대입하고 나열할 줄만 알면 겉으로는 굉장히 어렵게 느껴지는 문제일지라도 결국에는 매우 쉬운 문제로 바뀌는 것을 볼 수 있다. 즉, $\sum$는 어렵지 않다! 저돌적인 패기로 밀어붙이는 능력을 가지고 있어야 한다.
그럼 $\sum$는 도대체 무엇이고 왜 나온 것일까? $\sum$는 수식을 어렵게 만들려고 생긴 것이 아니고 오히려 간단하게 만들기 위해서 수학자들이 만든 개념이다. 항이 차례대로 더해져있는 식을 나열하는 것이 불편한 수학자들은 보기 쉽게 표기하려고 $\sum$라는 개념을 만들었다. $\sum$에서는 두 가지만 알아내면 된다. '무슨 문자에 어떤 수부터 어떤 수까지 넣으면 되는 것인가'와 '어떤

식에 넣으면 되는 것인가'이다. 가령 a_m에서부터 a_n까지의 합을 나타내는 식이 있다고 하자. 그 식은 아주 기본적으로는 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

좌변에서 우변으로 $\sum$를 만들어내는 것도 익숙해야겠지만 우변에서 좌변으로 $\sum$를 자연스럽게 풀어내는 것도 굉장히 중요하다. 근데 위의 표현이 유일한 시그마 표현법일까? 당연히 아니다. 시그마는 표현법이 다양할 수 있으니 어떤 표현법으로 써져 있던지 간에 읽어낼 줄 아는 능력이 굉장히 중요하다.

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n-m+1} a_{k+m-1}$$

이렇게 $\sum$만 읽을 줄 알면 풀리는 대표적인 유형으로 2017학년도 9평 9번을 가져왔다.

9. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{6} (a_k + 1)$$

을 만족시킬 때, a_7의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

절대로 $\sum$를 무서워하면 안된다. 물론 이 문제가 쉬운 문제이기도 하겠지만 차근차근 대입하다보면 문제가 원하는 값으로 가고 있는 자신의 풀이를 볼 수 있다. 이렇게 노골적으로 $\sum$를 물어보는 문제도 있지만 다음과 같은 2017학년도 9평 14번과 17번처럼 문제 제시의 '수단'이 되는 경우도 있다.(이 문제 둘을 보면 왜 $\sum$가 수열의 합 표기를 더 쉽게 하기 위해 나온 수단인지 알 수 있습니다)

14. 첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

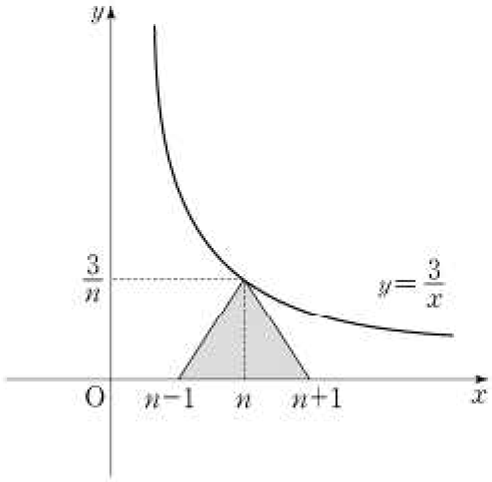
$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$$

의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

17. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{3}{x}\ (x>0)$ 위의 점 $\left(n,\ \frac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1,\ 0)$, $(n+1,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}}$의 값은? [4점]

① 410　② 420　③ 430　④ 440　⑤ 450



시그마와 비슷한 개념인 S_n은 말 그대로 a_1에서부터 a_n까지의 합을 의미한다. S_n이 쓰이는 대표적인 유형으로는 S_n을 이용하여 a_n을 구해내는 유형이다. S_n은 n번째 항까지의 합을 의미하고 S_{n-1}은 $(n-1)$번째 항까지의 합을 의미하기 때문에 $S_n-S_{n-1}=a_n$이라는 사실을 알 수 있다. 그런데 이 유형에서 가장 염두해야 하는 개념은 $n\geq 2$인지 아닌지를 잘 봐야 한다는 점이다. 잘 생각하면 n이 1이 되면 S_n-S_{n-1}이 정의되지 않는다.(S_0이라는 것은 있을 수가 없어요) 그래서 정확하고 세밀하게 따지면 다음과 같은 식이 나온다.

$$
\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1}\,(n\geq 2)\\
&= S_1\,(n=1)
\end{aligned}
$$

S_n을 이용해서 a_n을 구해내는 유형에서 틀릴만한 부분은 이 부분밖에 없다고 생각한다.(물론 계산실수가 없다는 가정에서요) 이 유형으로 나온 최근 기출로는 2016학년도 6평 19번을 가져왔다.

19. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$라 할 때,

$$a_{n+1} = (2^n - 1)(S_n + 1) \quad (n \geq 1) \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 식 (*)의 양변에 S_n을 더하여 정리하면
>
> $S_{n+1} + 1 = 2^n(S_n + 1)$
>
> 이다. $b_n = \log_2(S_n + 1)$이라 하면 $b_1 = 1$이고
>
> $b_{n+1} = \boxed{(가)} + b_n$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $b_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{2} \quad (n \geq 1)$
>
> 이므로
>
> $S_n = 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} - 1 \quad (n \geq 1)$
>
> 이다. 그러므로 $a_1 = 1$이고, $n \geq 2$일 때
>
> $a_n = S_n - S_{n-1}$
>
> $= 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} - 2^{\boxed{(나)}}$
>
> $= 2^{\boxed{(나)}} \times (2^{n-1} - 1)$
>
> 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(12) - g(5)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

이 문제에서 참고할 것은 S_n에서 a_n을 구하는 과정에서 n이 1일 때와 2보다 크거나 같을 때를 나누어서 고려해주었다는 점이다.
그런데 S_n을 무작정 a_1에서부터 a_n까지의 합이라고 머릿속에 고정시켜놓으면 가끔씩 이런 류의 유형 문제에 당할 수가 있다. S_n을 새롭게 정의내리는 유형이다.

[문제 6]
수열 a_n에 대해서 S_n을 다음과 같이 정의를 내리고자 한다.

$$S_n = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

이렇게 정의가 내려진 S_n은 $S_n = n^3 + 6n^2 + 8n + 4$의 식을 가지고 있다고 한다. 이 수열

a_n의 첫 번째 항에서부터 k번째 항까지의 합을 구하시오. (단 k는 2보다 큰 자연수라고 한다.)

[해설 6]
이 문제를 무턱대고 아무 생각 없이 S_n을 이용해서 a_n을 구해버리게 되면 반드시 오답에 빠져버리게 된다. 이 문제는 S_n이 평소와 다르게 정의되어 있기 때문에 $a_n = S_n - S_{n-1}$이 성립하지 않는다.
$S_n = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$이기 때문에 이 식의 n대신에 $n-1$을 대입해주게 되면 $S_{n-1} = (n-1)a_1 + (n-2)a_2 + \cdots + 2a_{n-2} + a_{n-1}$이 나온다. 그래서 S_n에서 S_{n-1}을 빼주게 되면 다음과 같은 식이 나온다. (단, n은 2보다 큰 자연수)

$$S_n - S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

그러므로 첫 번째 항에서부터 k번째 항까지의 합은 $3k^2 + 9k + 3$이다.

$3k^2 + 9k + 3$

유형3. 극한과 결합

수열의 일반항 a_n이 주어진다면 이 일반항 식 안에 n이라는 문자가 포함되어있기 때문에 충분히 $\lim_{n \quad \infty}$을 이용한 문제가 나올 수 있다. 실제로 2017학년도 평가원 기출만 봐도 그런 문제 비슷한 문제가 출제되어 나오고 있다는 것을 알 수 있다. 대표적인 기출로 2017학년도 6평 3번을 가져왔다.

3. $\lim_{n \to \infty} \frac{7n^2 - n}{2n^2 + 3}$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

이 문제에서는 노골적으로 a_n에 대한 언급이 없었지만 문제를 충분히 변형해본다면 a_n을 이용하여 $\lim_{n \to \infty}$과 결합시킨 문제가 출제될 수 있다.

이런 쉬운 문제에 속하는 대표적인 유형 중에 하나가 r^n을 포함하고 있는 유형이다.(이 유형은 수열의 극한과는 조금 거리가 멀 수 있으나 위에 나온 유형과 비슷하기 때문에 다뤄보았습니다) r^n의 형태는 ${a_k}^n$, $f(x)^n$ 등 굉장히 다양하게 나올 수 있으나 본질은 같다. 다음과 같은 기본 문제를 보자.

[문제 7]

$f(x)=\dfrac{x^{n+1}-1}{x^n+1}$일 때, $f(-2)+f(0)+f(1)$의 값은 무엇인가?

이 문제를 풀 때는 자동반사적으로 나와야 하는 풀이가 r의 범위를 설정해주는 것이다. $r>1$, $r=1$, $-1<r<1$, $r=-1$, $r<-1$ 이렇게 다섯 가지로 나누는 경우가 대표적이다. 위의 대표 문제도 다음과 같이 범위를 설정하고 각 범위에 따른 식을 써주면 간단히 풀리는 문제이다.(이런 유형의 문제가 나오면 r에 따른 $f(x)$의 그래프를 그려보는 훈련을 해보세요! 필요가 없더라도 빠르게 푸는 훈련 중에 하나입니다)

[해설 7]

$f(x)=x$($x>1$이거나 $x<-1$일 때)

$\quad=0$($x=1$일 때)

$\quad=-1$($-1<x<1$일 때)

$f(-2)=-2$, $f(0)=-1$, $f(1)=0$이므로 답은 -3이다.

-3

충분한 변형을 통해서 실제 기출로 나온 문제는 다음과 같다.

28. 자연수 k에 대하여

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{6}{k}\right)^n+1}$$

이라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}ka_k$의 값을 구하시오. [4점]

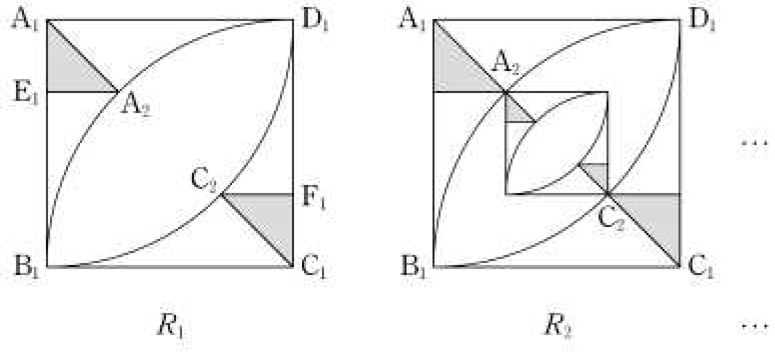
이렇게 노골적으로 r^n을 나타내지 않더라도 출제가 가능하다는 것을 명심해두자.

유형4. 도형과 결합한 무한등비급수

무한등비급수라는 개념부터 알아보자. 우선 등비급수란 등비수열 a_n을 첫 번째 항에서부터 n번째 항까지 더한 S_n을 의미한다. 그런데 이 n을 무한대로 발산시키면 무한등비급수가 되는

데 문과수학에서는 이 무한등비급수가 출제되는 유형이 주로 도형과 결합되어 출제된다. 이 유형은 나중에 다른 특강에서 다룰 계획이며 이 유형만 틀리는 학생이라면 지금까지 출제된 도형과 무한등비급수가 결합된 문제를 주구장창 풀면 절대로 틀리지 않을 수 있다고 장담할 수 있다. 이 특강에서는 이번에 출제된 2017학년도 9평 16번만 보고 넘어가자.

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$　② $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$　③ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$
④ $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$　⑤ $\frac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

유형 5. 점화식 문제

이 유형은 어렵게 나온다면 정말 어렵게 나올 수 있다.(고난이도 수능 문제나 논술 문제에서 자주 출제되는 유형입니다) 그런데 문제 조건에 맞는 풀이 방법이 외워지지 않았다면 접근하고 풀어내기 굉장히 어렵기 때문에 각 유형별로 외우는 것을 권장하고 한 번만 보고 끝내지 말고 자연스럽게 외워질 정도로 몸에 숙달이 되도록 하길 바란다.

우선 점화식이라고 하는 것은 주로 항과 항 사이에 관계를 얘기한다. 두 개의 항 사이의 관계를 나타낼 수도 있고 세 개의 항 사이의 관계를 나타낼 수도 있다. 그리고 그 점화식을 통해서 a_n을 구해내는 과정을 점화식을 푼다고 표현한다. 주로 문제가 출제된다면 고난이도 3점이나 4점 부근에서 출제되며 두 단계 사고방식을 가지고 있어야 한다. 첫 번째는 문제에서 점화식을 이끌어 낼 줄 알아야하며 두 번째는 그 점화식으로부터 a_n을 이끌어 낼 줄 알아야 한다.

점화식을 이끌어내는 사고방식은 a_n을 잘 설정하는 과정에서부터 나온다. 점화식 문제 중에 가장 대표적인 ‘하노이 탑’을 보자.

[문제 8]

다음 그림과 같이 세 개의 막대 기둥에 n개의 원반(disk)가 있다. 이 원반들을 다음 규칙에 따라 한 막대 기둥에 꽂혀 있는 원반들을 다른 기둥으로 그 모양 그대로 이동시키고자 한다.

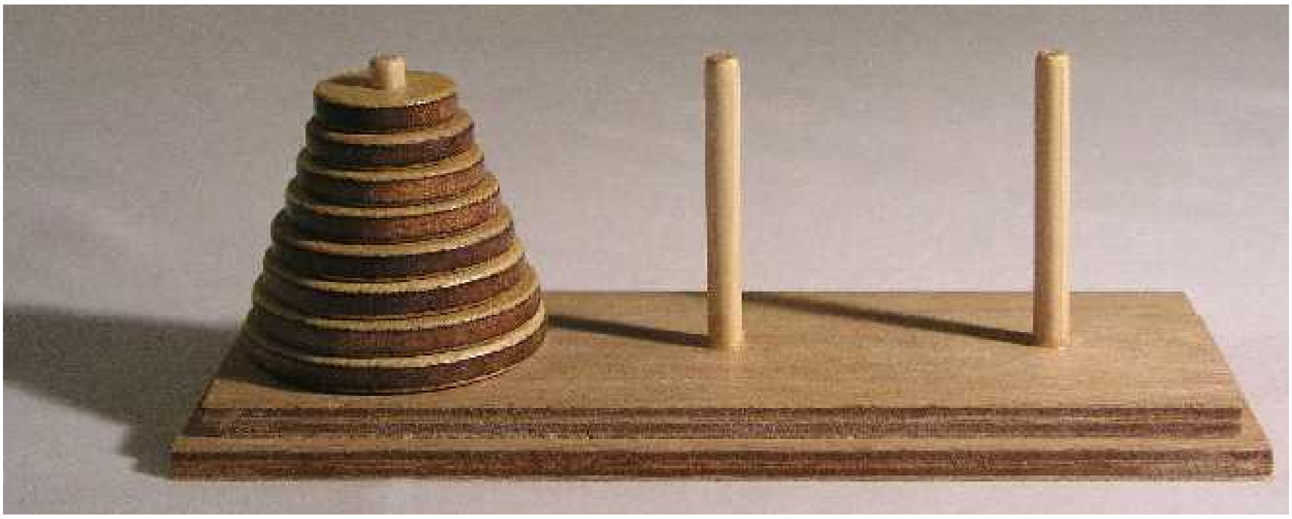
규칙 1

처음에는 모든 원반이 왼쪽 막대 기둥에 작은 것이 위로 향하도록 순차적으로 쌓여 있다.

규칙 2

원반을 한 번에 한 장씩 다른 기둥으로 이동시킬 수 있지만 작은 원반 위에 큰 원반을 올릴 수는 없다.

이 2개의 규칙에 따라서 n개의 원반을 다른 기둥에 옮기는 최소한의 시행은 몇 번인가? 단, 한 개의 원반을 다른 기둥에 꽂는 행위를 ‘시행’이라고 정의내린다.



[풀이 8]

우선 한 쪽 기둥에 꽂혀 있는 n개의 원반을 다른 기둥에 꽂는 최소한의 시행 횟수를 a_n이라

고 하자. 그리고 설명의 편의를 위해 현재 그림에서 원반들이 꽂혀 있는 기둥을 기둥1이라고 하고 오른쪽으로 갈수록 기둥2, 기둥3이라고 명명한다. n개의 원반을 다른 기둥에 옮기는 시행 횟수를 점화식으로 표현하기 위해서 상황을 이해해보자. 기둥 1에 꽂혀있는 n개의 원반을 다른 기둥에 꽂기 위해서는 우선 위에서부터 $n-1$개의 원반들을 다른 기둥 2에 옮겨야한다. (a_{n-1}번의 시행) 그 후에 가장 아래에 있었던 커다란 원반을 기둥 3에 옮기고(1번의 시행) 기둥 2에 있었던 $n-1$개의 원반들을 다시 기둥 3에 옮기면(a_{n-1}번의 시행) 기둥 1에 있는 n개의 원반을 기둥 3에 최소한의 시행으로 옮길 수 있다. 이 상황을 수열 a_n과 a_{n-1}이 포함되어 있는 식으로 표현하면 $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$이다.

이렇게 $a_n = 2a_{n-1} + 1$이라는 점화식을 구해냈다면 이제 점화식을 풀어야 한다. 이 풀이법은 유형별로 외워져 있지 않았다면 시간이 오래 걸릴 뿐만 아니라 굉장히 막막함을 느낄 수 있다. 그래서 각각 유형에 따른 점화식 풀이법은 완벽하게 외우길 바란다.

① $a_{n+1} = a_n + d$, $a_{n+1} = ra_n$

(풀이법) 각각 등차수열과 등비수열을 나타내는 점화식이다. 딱히 별도의 풀이법을 외울 필요없이 a_n의 수열 종류만 파악해주고 바로 일반항 a_n의 식을 작성해주면 된다.

② $a_{n+1} = a_n + f(n)$

(풀이법) n에 차근차근 $n-1$을 대입해나가면서 나열해준다. 그리고 죽 나열된 식을 다 더해주면서 좌변과 우변에 있는 공통항들을 지워나가면 a_n만 남는 것을 볼 수 있다.

(예제) $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$의 일반항 a_n을 구하시오. 단, a_1은 1이다.

(풀이)

n에 n대신에 $n-1$을 대입해주면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 1$$

이 식에 차근차근 계속 n대신에 $n-1$을 대입해나가면 이러한 식들을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) + 1 \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2(n-2) + 1 \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + 2(n-3) + 1 \\ &\vdots \\ a_3 &= a_2 + 2(2) + 1 \\ a_2 &= a_1 + 2(1) + 1 \end{aligned}$$

이 식들을 위에서부터 아래까지 다 더하는데 좌변과 우변의 공통부분을 지워나가면 최종적으로 좌변에는 a_n만 남고 우변은 $a_1 + 2(1 + 2 + \cdots + (n-1)) + (n-1)$이 남는다.

$$a_n = a_1 + n(n-1) + n - 1 = n^2$$

③ $a_{n+1} = ka_n + N$

(풀이법) $a_{n+1} - \alpha = k(a_n - \alpha)$의 식을 만들 수 있게 α를 설정해준다. 그리고 그 식에 n 대신에 $n-1$을 계속 대입해서 모든 식을 곱해주면 된다.

(예제) $a_{n+1} = 2a_n + 3$일 때, a_n의 일반항을 구하시오. 단, a_1은 1이다.

(풀이)

우선 $a_{n+1} - \alpha = k(a_n - \alpha)$의 꼴로 만들기 위해 대입해보면 α는 -3이 나온다. 즉, 위의 식은 $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$의 관계가 성립한다. 이 식에 n대신에 $n-1$을 반복적으로 대입해주어 축차대입법을 해주면 다음과 같은 식 더미가 나온다.

$$\begin{aligned} &a_n + 3 = 2(a_{n-1} + 3) \\ &a_{n-1} + 3 = 2(a_{n-2} + 3) \\ &\qquad\quad \vdots \\ &a_3 + 3 = 2(a_2 + 3) \\ &a_2 + 3 = 2(a_1 + 3) \end{aligned}$$

위에서부터 차례대로 곱해나가면 좌변과 우변의 공통부분은 지워지게 되고 최종적으로 좌변은 $a_n + 3$만 남고 우변은 $2^{n-1}(a_1 + 3)$만 남는다. 즉, $a_n + 3 = 2^{n-1}(a_1 + 3)$이 된다. a_1대신에 1을 대입해줘서 a_n에 대한 식을 정리해주면 $a_n = 2^{n+1} - 3$이 나온다.

④ $a_{n+1} = ka_n + f(n)$

(풀이법) 양번에 k^{n+1}로 나누어 준 후 $\dfrac{a_{n+1}}{k^{n+1}} = b_n$이라고 치환해준 후 ②과 같은 축차대입법을 해준다.

(예제) $a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$일 때, 수열 a_n의 일반항을 구하시오. 단, a_1은 3이다.

(풀이)

양변에 2^{n+1}로 나누어주면 해당 식은 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2^n} + (\dfrac{3}{2})^{n+1}$이 된다. $\dfrac{a_n}{2^n}$을 b_n이라고 치환해주면 다음과 같은 점화식으로 변형된다.

$$b_{n+1} = b_n + (\frac{3}{2})^{n+1}$$

이는 ②번 점화식 유형과 똑같은 풀이방법으로 n대신에 $n-1$을 대입해나가서 축차대입법을 이용해 b_n의 일반항을 구해내면 $b_n = 3(\dfrac{3}{2})^n - 3$이 나온다. b_n은 $\dfrac{a_n}{2^n}$이기 때문에 b_n을 이용해서 a_n을 구해주면 $a_n = 3^{n+1} - 3 \times 2^n$이다.

⑤ $a_{n+2}+ka_{n+1}+la_n=0$

이 유형의 점화식은 2개의 풀이법을 가지고 있으며 2개의 풀이법 모두 알고 있고 능숙하게 할 줄 알아야 한다. 따로 풀이법을 적지는 않겠으나 예제를 통한 풀이1과 풀이2를 통해 차이점을 느껴보도록 하자.

(예제) 수열 a_n이 $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$을 만족할 때 a_n의 일반항을 구하여라. 단, a_1은 1이고, a_2는 2이다.

(풀이1)

$a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_{n+1}+6a_n=0$로 쪼개준다. 그리고 좌변에 두 개의 항만 남기고 모두 우변으로 넘겨버리면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$$

위 식에 n대신에 $n-1$을 차근차근 대입해주면 다음과 같은 식 무더기가 나온다.

$$\begin{aligned}
a_n-2a_{n-1}&=3(a_{n-1}-2a_{n-2})\\
a_{n-1}-2a_{n-2}&=3(a_{n-2}-2a_{n-3})\\
a_{n-2}-2a_{n-3}&=3(a_{n-3}-2a_{n-4})\\
&\vdots\\
a_4-2a_3&=3(a_3-2a_2)\\
a_3-2a_2&=3(a_2-2a_1)
\end{aligned}$$

위에서부터 아래까지 차근차근 곱해주어 공통부분을 지워주게 되면 다음과 같은 식이 나온다.

$$a_n=2a_{n-1}+3^{n-2}(a_2-2a_1)=2a_{n-1}+3^{n-1}$$

이것은 ④번 점화식 풀이법과 동일한 방법으로 양변에 2^n을 나누어준 후 풀어주면 된다.

(풀이2)

위 점화식을 두 가지 다른 방법으로 나누어준다. $a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$과 $a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$으로 나누어줄 수 있다. 그런 다음 각각 n 대신에 $n-1$을 대입하여 축차대입을 하면 이러한 식까지 이끌어 낼 수 있다.

$$a_{n+1}-2a_n=3^{n-1}(a_2-2a_1)=3^n$$

$$a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}(a_2-3a_1)=2^n$$

위에서 아래를 빼주게 되면 좌변은 a_n만 남고 우변은 3^n-2^n만 남기 때문에 쉽게 a_n을 구할 수 있다.

이 (풀이1)과 (풀이2)는 상황에 따라서 모두 쓸 줄 알아야 한다. 어떤 유형에서는 (풀이1)이 쉬울수 있고 어떤 유형에서는 (풀이2)가 쉬울 수 있기 때문에 둘 다 능숙하게 쓸 줄 알아야 한다.

⑥ 그 외 독특한 유형의 점화식

위의 유형에 포함할 수 없는 특이한 점화식이 있을 수 있다. 이런 경우는 본인이 문제를 많이 풀어보면서 각각의 독특한 점화식 풀이법을 외워놓아야 한다. 여기에는 대표적인 2가지 유형만 소개하겠다.

(예제1) 수열 a_n이 $a_{n+1}=(n+1)a_n+n$을 만족할 때 a_n의 일반항을 구하시오. 단, a_1은 1이다.
(풀이)

양변에 $(n+1)!$을 나눠주게 되면 $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a_n}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}$이 나온다. $\frac{a_n}{n!}$을 b_n으로 치환해주고 점화식을 다시 작성해주면 다음과 같이 작성된다.

$$b_{n+1}=b_n+\frac{n}{(n+1)!}$$

$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$으로 바꿔주고, n대신에 $n-1$을 차근차근 대입해줘서 축차대입법을 써주면 다음과 같이 나온다.

$$b_n=b_1+(\frac{1}{1!}-\frac{1}{n!})=2-\frac{1}{n!}$$

b_n을 통해서 a_n을 구해주면 $a_n=2n!-1$임을 알 수 있다.

(예제2) 수열 a_n이 $a_{n+1}+a_n=2n$을 만족시킨다. a_n은 어떤 수열인지 느껴보아라.
(풀이)

이 수열 a_n의 일반항은 구해주기 어렵다.(교육과정 안에서 해결하기 힘들고 굳이 그렇게까지 할 필요가 없다.) 그냥 n대신에 $n-1$을 대입해보면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$a_{n+1}+a_n=2n$$
$$a_n+a_{n-1}=2(n-1)$$

위에서 아래를 빼주면 $a_{n+1}=a_{n-1}+2$라는 점화식이 나오고 등차수열 비슷하게 나온다는 것을 알 수 있다. 즉, 평범한 등차수열과는 달리 인접해있는 두 항 사이에 관계가 아닌 한 칸 떨어진 수열 사이의 관계임을 알 수 있다.

유형6. 독특한 수열 : n에 따라 식이 바뀌는 수열

주로 이런 수열은 고난이도 문제(21번, 30번)과 결부되어 출제될 수 있다. 수열 a_n을 식으로만 바라보는 것이 아니고 유연한 사고방식을 가지고 있다면 조금이나마 쉽게 접근할 수 있지만 기본적으로 어렵다.(지금까지 출제된 실태를 보면 상당히 낮은 정답률을 자랑하고 있네요...) 풀이 방법을 한 가지로 유형화하기 굉장히 어렵고 그냥 결과론적으로 n에 따라서 a_n이 다르게 나온다는 것만 보인다. 대표적인 문제 두 개를 보고 마무리를 지어보자. 2013학년도 6평 18번을 보자.

18. 2보다 큰 자연수 n에 대하여 $(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

그 다음은 2017학년도 9평 30번을 보자.

30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x,\ y)\,\middle|\ 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{x+3}}{2}\right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이다.
(나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14)=15$이다. $f(n) \le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [4점]

위의 두 문제를 풀 때 각각 a_n과 $f(n)$이 평범한 수열처럼 생각되지 않는다. 이러한 문제를 풀 때는 틀에 박힌 사고가 아닌 유연한 사고가 필요하며 n에 따른 식을 자유자재로 쓸 줄 알아야 한다.

이렇게 유형 6개로 수열 단원을 정리해보았다. 다시 한 번 공식의 중요성을 강조하며 무작정 암기를 통한 수치의 대입이 아닌 유연한 사고를 통해서 빠른 계산을 할 수 있었으면 좋겠다. 계속적인 연습과 훈련을 통해 속도와 정확성을 모두 겸비할 수 있도록 하자. 또, 심도있는 수열의 이해와 어려운 난이도의 문제를 계속적으로 풀어나간다면 고난이도로 출제되는 수열 문제 또한 어려움없이 해결할 수 있을 것이다.