박성현 (퓨에르) 29번 해설

남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.

예상보다 많은 분들이 풀어주셨고, 문제 퀄리티가 괜찮다는 칭찬에 힘입어 예정에 없던 문제 해설을 올립니다. 처음 문제를 제작하고, 해설을 만들 생각을 하지 않았었기 때문에, 일러스트레이터를 활용하여 새로 그림을 그렸습니다.

사실, 처음 문제 자체는 ‘공간에선 어차피 왜곡이 일어나기 때문에, 정확한 비율까지 맞추어서 그릴 필요는 없다‘ 라고 생각하였고, ’공간도형 문제를 대할 때는 눈이 아닌 논리에 따라 작도를 하고 문제를 풀어라‘ 라고 평소에 가르치기 때문에 일러를 수정 하지 않았습니다. 또한, 문제의 길이들을 정확하게 제시해주면, 눈치껏

‘어 이거 정삼각형처럼 보이는데?’, ‘이등변삼각형같이 보이는데?’ 하고 문제를 풀 수 있기에, 가르치는 학생들을 훈련시키려고 그대로 뒀었습니다.

(사실 힘들어서...)

그래도 오르비 학생분들을 위해 최대한 정확한 비율을 사용해서

해설을 간단하게 진행하겠습니다.

(해설에 앞서, 일일이 모든 선분들의 길이를 $\overline{BH'}=3$ 이렇게 쓰지 않고

그림에다 바로 표시해 놔서, 중간에 $\alpha$평면을 지우고 해설을 진행하였습니다.)

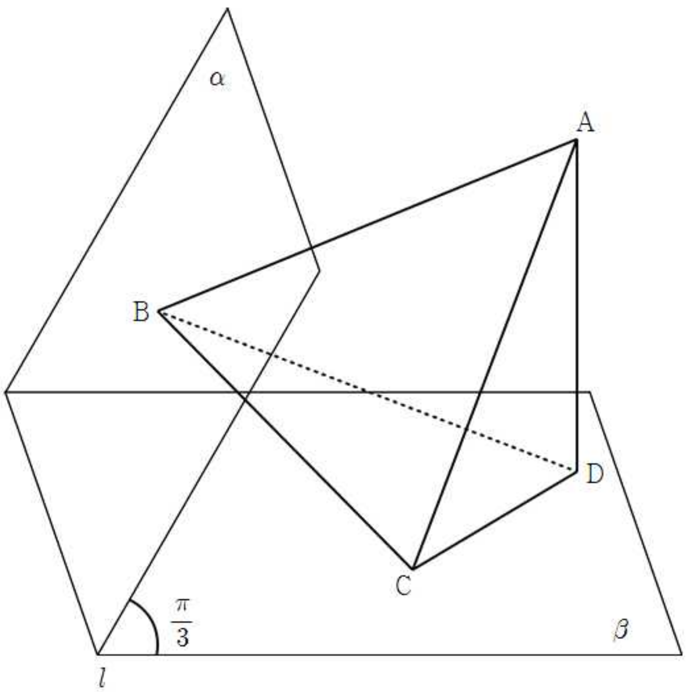
박성현 (퓨에르) 29번 해설
남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.

[문제]

29. 그림과 같이 직선 $l$을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 두 평면 $\alpha$와 $\beta$가 있고, 평면 $\alpha$ 위의 점 B와 평면 $\beta$ 위의 점 C, D가 있다. 점 A에 대해, 사면체 ABCD가 다음을 만족한다.

> (가) $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$
> (나) 직선 $l$과 점 B사이의 거리는 2이고, $l$과 점 C사이의 거리는 2이다.
> (다) 평면 ABD $\perp l$, $\overline{AD}\perp\beta$

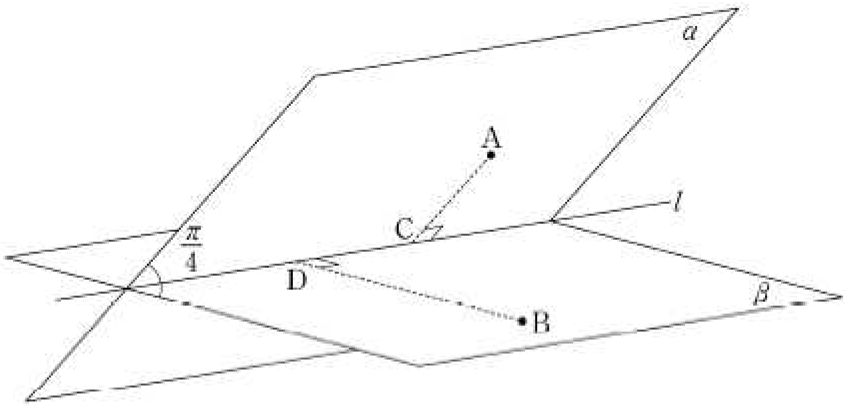
평면 ABD와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 $\theta$라 할 때, $\sin^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)



박성현 (퓨에르) 29번 해설
남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.

자, 일단 이 유형은, 2017학년도 9월 모의고사 29번의 발문을 토대로 문항을 제작했습니다. 발문을 보시면 9월 모의고사 29번과 매우 흡사함을 알 수 있습니다.

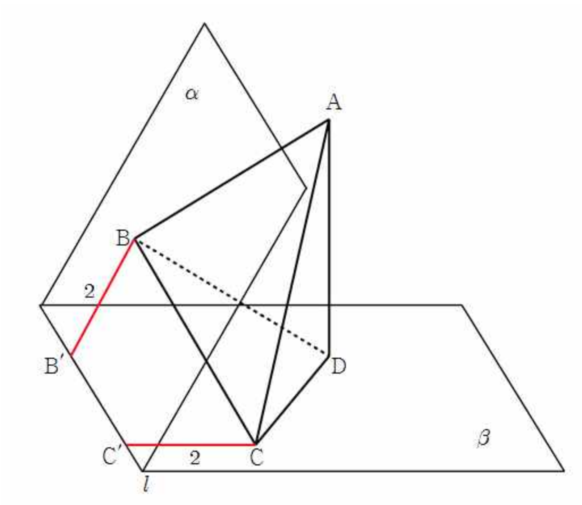
**29.** 그림과 같이 직선 $l$을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 $\alpha$와 $\beta$가 있고, 평면 $\alpha$ 위의 점 A와 평면 $\beta$ 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 $\beta$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 유리수이다.) [4점]



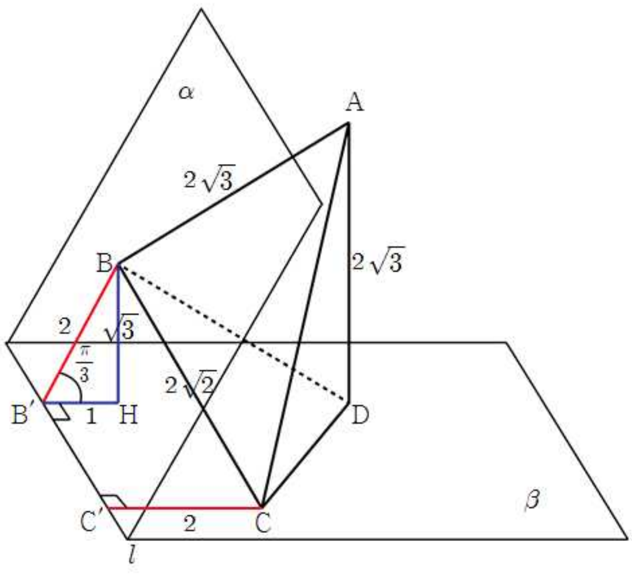
박성현 (퓨에르) 29번 해설

남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.

문제의 시작입니다.




평면 $\alpha$ 위의 점 B와 평면 $\beta$위의 점 C에 대해, 교선 $l$ 까지의 거리가 각각 2라고 제시되어 있기 때문에 이렇게 작도를 시작하셨을 겁니다. 점 B, C에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 각각 B′, C′ 이라고 합시다.

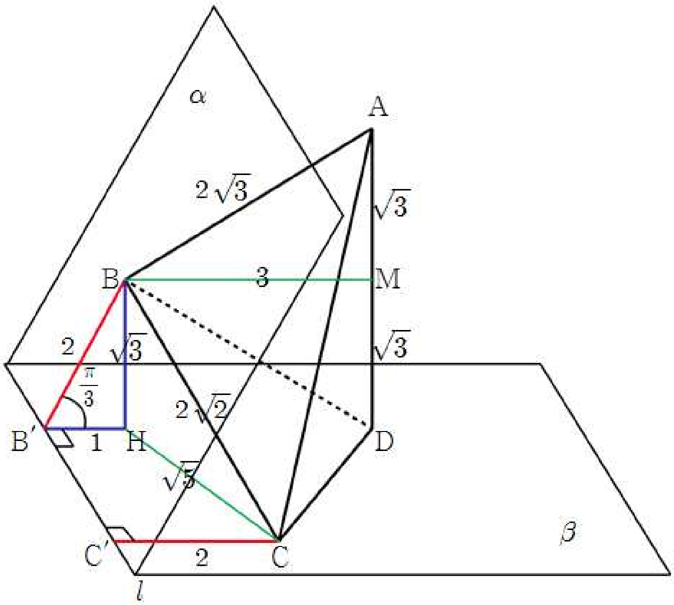



그 이후 점 B에서 평면 $\beta$에 내린 수선의 발을 H라고 하면, 삼수선의 정리와 주어진 이면각을 활용해, 파란색 길이들을 찾을 수 있을 겁니다.

대부분 학생들께서 여기까지는 무난히 하셨으리라 예상합니다.

박성현 (퓨에르) 29번 해설

남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.




그 이후, 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 M이라 했을 때, $\overline{\mathrm{BH}} \perp \beta$ 이고,

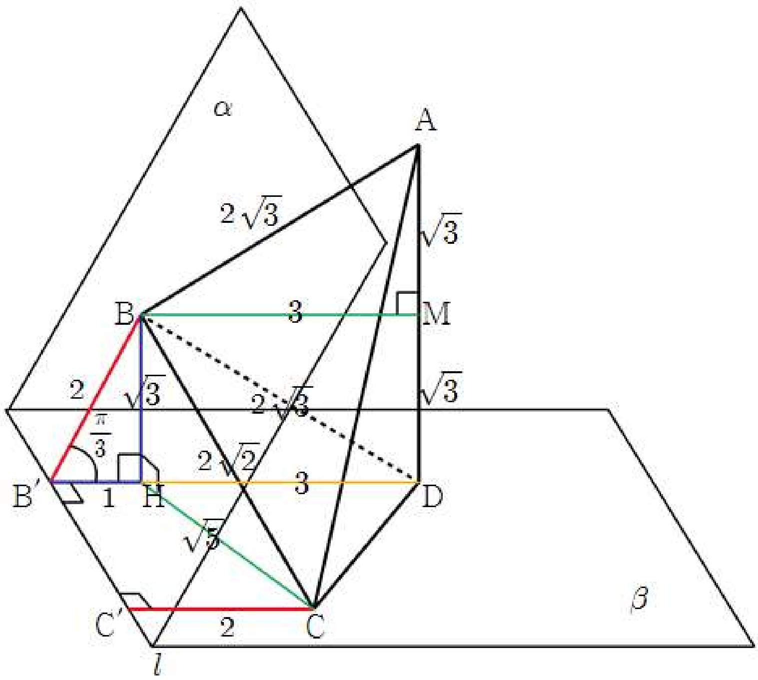
$\overline{\mathrm{AD}} \perp \beta$ 이기에, 선분 $\overline{\mathrm{BH}}$와 $\overline{\mathrm{AD}}$는 평행하고, 그러므로 M은 선분 AD의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{MD}} = \sqrt{3}$ 이고 따라서 $\overline{\mathrm{BM}} = 3$입니다.

또한 $\overline{\mathrm{BH}}$는 평면 $\beta$에 수직하므로, $\beta$위의 모든 선분 혹은 직선과 수직합니다.

그러므로 삼각형 BHC는 직각삼각형. $\overline{\mathrm{HC}} = \sqrt{5}$

박성현 (퓨에르) 29번 해설
남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.




제가 이 문제에서 핵심이라고 생각했던 부분 중 하나인 부분이 이 부분입니다.

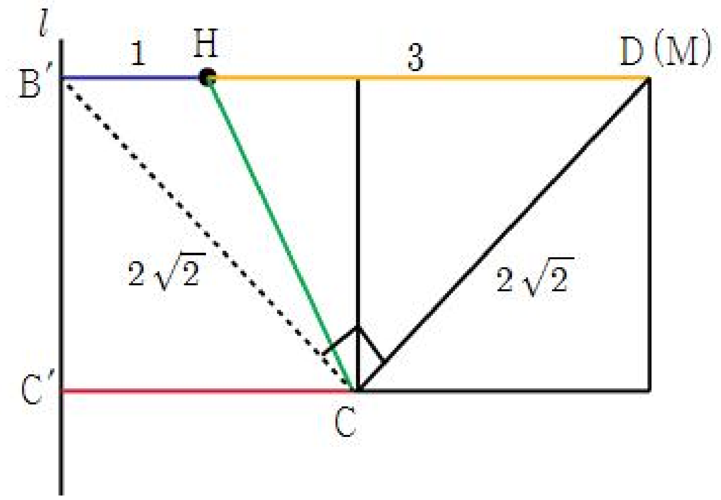
조건 (다) 에 의해, 직선 $l$은 평면 ABD에 수직이고, 직선 AD 또한 평면 $\beta$에 수직이므로, 직선 $l$은 평면 위의 모든 직선과 수직입니다. 그러므로 선분 $\overline{\mathrm{BM}}$은 직선 $l$과 수직이므로 선분 $\overline{\mathrm{BM}}$은 $\overline{\mathrm{HD}}$와 동일하고 그 길이는 3이고, 따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 삼각형 ABD는 정삼각형.

박성현 (퓨에르) 29번 해설
남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.

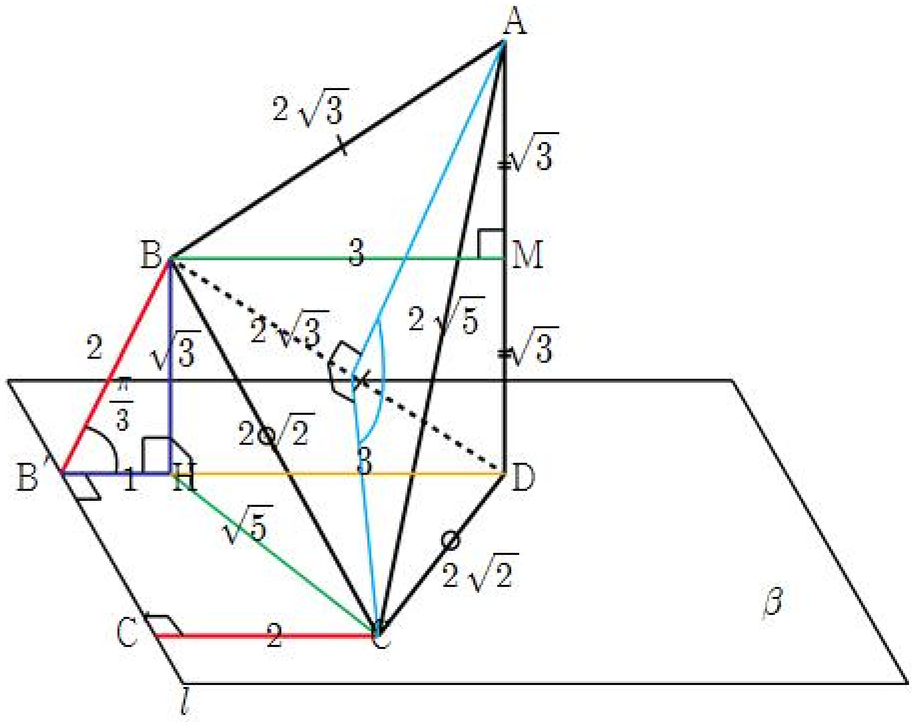
그 다음, 평면 ABD 와 평면 BCD 의 이면각을 구하기 위해선 여러 가지 방법이 있겠지만, 기본적으로는 평면의 교선에 각각 수선의 발을 내려 그 선분(or 직선) 끼리 이루는 각도를 찾아야 합니다. 하지만 삼각형 ABD 의 길이는 전부 구했습니다만, 삼각형 BCD 의 길이를 우리는 전부 구하지 못했습니다. 선분 $\overline{CD}$ 가 남았거든요.

이제 $\beta$ 평면 위의 점들만을 관찰한다면 아래와 같습니다.




그러므로 우리는 $\overline{CD}=2\sqrt{2}$ 를 구했고, 삼각형 BCD 는 이등변삼각형임을 찾았습니다.

박성현 (퓨에르) 29번 해설
남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.

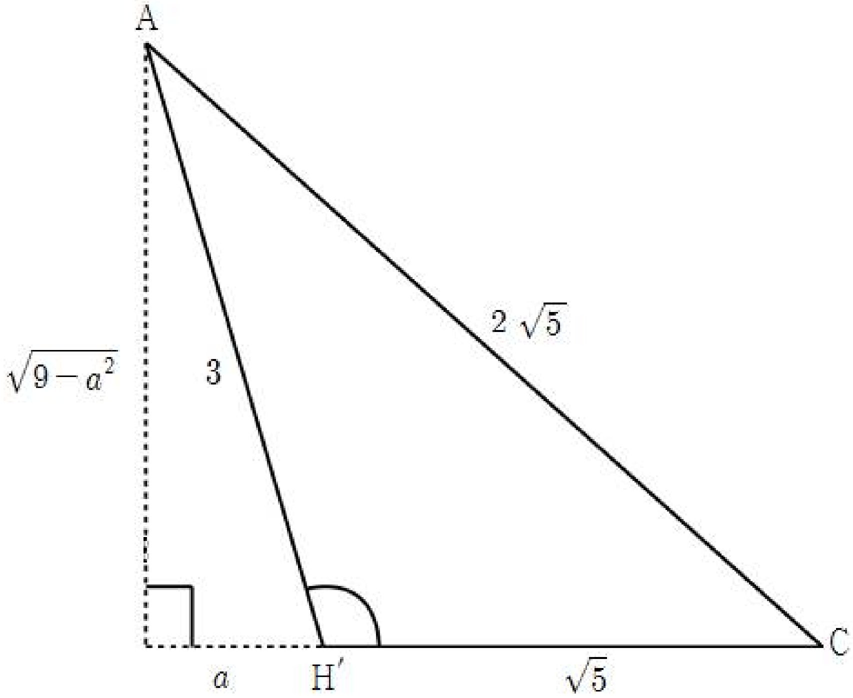



최종적으로, 삼각형 ABD 는 정삼각형, 삼각형 BCD 는 이등변삼각형이고, 두 평면의 교선은 직선 BD 입니다. 여기에서, 또 중요한 것은 각각의 삼각형이 정삼각형, 이등변삼각형이기 때문에 점 A 에서 직선 BD에 내린 수선의 발과, 점 C 에서 직선 BD 에 내린 수선의 발이 일치함을 알 수 있습니다. 이제 하늘색 선분 2개와 $\overline{AC}$로 이루어진 삼각형의 각도 $\theta$를 구하면 끝입니다.

직선 BD 에 내린 수선의 발을 H′이라 했을 때, $\overline{AH'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$, $\overline{H'C}=\sqrt{5}$

그리고 선분 $\overline{AD}$ 또한 평면 $\beta$에 수직이기 때문에 삼각형 ACD 는 직각삼각형이므로 $\overline{AC}=2\sqrt{5}$.

박성현 (퓨에르) 29번 해설
남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.




$$9-a^2+(a+\sqrt{5})^2=(2\sqrt{5})^2,\ 2\sqrt{5}a+14=20,\ a=\frac{6}{2\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{9-a^2}}{3}\quad \sin^2\theta=\frac{9-\mathrm{a}^2}{9}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin^2\theta=9$$

박성현 (퓨에르) 29번 해설
남은 기간 후회 없는 시간 보내시길 바랍니다.

일러스트레이터가 많이 들어가서 시간을 꽤 잡아먹었네요.

이 문제의 원래 의도는 이러한 작도를 통한 이면각 구하기였습니다.

하지만 정사영을 이용해서 풀 수도 있고, 아예 좌표를 잡아서 평면의 방정식을 세워서 푸신 분들도 있을 것 같습니다.

(외적을 사용하신 분들도 계실거구요.)

어떠한 방식이 옳다 그르다는 없는 것 같습니다. 더 효율적인 풀이는 존재할 수도 있겠지만요.

최근 6월 모의고사와 9월 모의고사를 보면, 기하와 벡터 부분은 크게 비중있게 다뤄지지 않았습니다만, 저는 공도벡을 좋아할뿐더러, 얼마든지 어렵게 내기 좋은 단원이라 생각하기 때문에 어렵게 공부하셨으면 좋겠습니다. 100점이 목표면 120점을 맞기 위한 공부를 하라고 하잖아요.

좋은 성적을 얻기 위한 공부도 중요하지만, 무엇보다 후회가 남지 않는 공부를 하셨으면 좋겠습니다.