문과반

9월 직전 총정리

수학은,

실전이다.

< 수업목표 >

✓ 9월 직전 총정리

배포용.

수능수학, 홍현빈

이 칼럼은 9월 모의고사 직전, 그간 배운 모든 것들과 최근 3개년 9월 평가원 시험 중 교과과정에 맞는 것들을 실어놓고 분석해놓은 칼럼입니다.

시험 직전이니, 여러분이 열심히 복습한 것들을 다시 정립한다생각하시고 보면 되겠습니다.

열심히 복습.. 해왔죠?

가볍게 쓱- 정리만 해두려 했는데, 그러면 분명 여러분들이 고개만 끄덕이고 말 것 같아서, 자세히 정리를 해봤습니다. 그냥 편안하게 쫙 읽다가 주춤하는 부분이 등장하면 별표치고 그 자리에서 3번씩만 읽어주시면 될 것 같습니다.

★★★★ 배포용 안내

- 문항같은것들이 많이 생략되있을 수 있고, 아무래도 수업내용을 요약한것이기 때문에 “이건왜없지?” “이건뭐지?” 하는 것이 있을 수 있습니다. 여러분들 9평전에 스스로 정리하기 위한 “큰 틀”이라 생각하시고 내용 추가 - 학습하시기 바랍니다.

수학 Ⅱ

집합

집합 명제는, 어렵게 출제 될 것 같진 않습니다.
그래도 하나씩 배운 것 짚어보겠습니다.

1. 집합의 연산

집합의 연산에서의 풀이법은, 두 가지였죠?

Ⅰ) 벤다이어그램 그리기　　ⅱ) 연산으로 해결하기.

지금즈음이면 본인한테 맞는 풀이가 정해졌을 겁니다.
두 풀이 모두 맞는 풀이이니, 아직 미흡하다면
본 교재가서 다시 한번 점검해보세요.

Ⅰ)벤다이어그램 그리기에선, **그릴 수 있는 벤다이어그램이 정해져있다.** 라고 했었습니다. 총 4가지의 모양을 소개 했었고, 이건 추후 집합의 추론에서 유용하게 쓰이는 개념이니 반드시 아셔야 합니다.

2. 추론

추론문항이 뭐였죠?

> 18. 전체집합 $U=\{x|1\le x\le 12,\ x\text{는 자연수}\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오.
>
> (가) $A\cup X=X$
> (나) $(B-A)\cap X=\{5,\ 7\}$

이런 문항은, 마찬가지로 연산으로 식을 간단히 한 뒤 풀어주거나, **"아무 집합 X나 마구 그려가며"** 주어진 조건을 만족하는 X를 추론하면 됩니다. 다만 그릴 수 있는 상황이 제한되어 있으므로 금방 찾을 수 있다는 것을
강조했던 것 같습니다.

3. 새로운 상황.

아마 이런 문항이 출제될 확률이 높습니다.
근데 새로운 상황을 출제한 문제가 뭐였죠?

> 23. 집합 $X=\{x\mid 1\leqq x\leqq 100,\ x\text{는 자연수}\}$에 대하여 두 집합
> $Y=\{y\mid y=x^2+x+1,\ x\in X\}$,
> $Z=\{z\mid z\in Y,\ z\text{는 } 3\text{의 배수}\}$가 있다.
> 집합 $X-Z$의 원소의 개수를 구하시오.

아 기억나시죠?

Z집합을 보면, Y에 포함되는 원소 중 3의 배수를 원소로 갖는 것이 Z집합이 되는데, **난 그게 뭔질 모릅니다. 첨듣어요.**

해서, "처음보는 것을 이해해야 뭘 풀든지 하므로"
이해를 해볼겁니다.

이해하는 과정은?

"직접 시도해본다/ 나열해본다/ 대입해본다 등등"
이었습니다.

멀뚱멀뚱 보고있는게 아니라 끄적끄적대야
"아 이 문제는 이런 식으로 구성되어 있구나"
를 알 수 있다 했었습니다.

명제

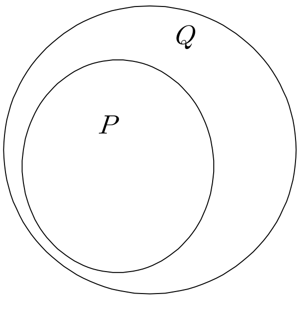
총 3가지를 언급했었습니다.

1. 필요 & 충분조건

명확히 아시죠? 아세요??

필요 충분 조건이란 표현을 보면 어떤 관계인지
빡 와닿아야 한다 강조했었습니다.

또한 **집합으로도 그릴 줄 알아야** 하구요.



저렇게 그려져 있으면, P는 Q이기 위한 충분조건이고
Q는 P이기 위한 필요조건이라 했습니다.

P는 P혼자로 이미 Q를 만족하기 때문에 더 이상 조건이 필요없는 **충분한 상황**이구요.

Q는 P가 되기 위해선 조건이 더 **필요한 상황**이었습니다.
(동물 - 사람 관계로 설명했었습니다.)

해서,용어를 보면 저 그림이 떠올라야 하고,
반대로 그림을 보면 용어가 떠올라야 합니다.
되죵?

(+ 집합 P는 집합 Q와 같아질 수 있습니다. 해서,
만약 두 집합이 같다면 P는 Q이기 위한 충분조건도되고
필요조건도 되므로 필요충분조건이라 했습니다.
이런 것으로 여러분을 낚으려 할 수 있으니 .. 네 낚이지 마세요.)

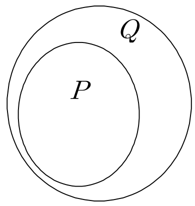
2. 부등식 풀이.

pass하겠습니다.

3. 논리

다음 5가지는 같은 걸로 보고 빠른 전환이 되야한다 했었습니다.

I) $p \rightarrow q$
ii) $P \subset Q$
iii) p는 q이기 위한 충분조건이다.
iv)



v) p이면 q이다.

(+ 대우관계를 배웠으므로 이런 “논리”문항이 등장하면,
분명 대우관계를 활용하는 것이 등장할겁니다.

(++ 여기서도 추론 문제가 등장합니다. <ex)다음 두 조건을 만족하는 P, Q에 대해서 항상 옳은 것을 고르면?>
이런 추론문제는 조건을 만족하는 집합을 그려놓고 접근하거나 대우관계를 활용해야합니다. 또한, 항상 만족하는 것을 찾아야 하므로, **내가 찾은 집합말고도 다른 만족하는 집합이 있는가**를 꼭 찾아봐야 합니다.

유리함수 무리함수

제일 강조했던 것은,
만약 “식”만 등장하고 그래프가 그려져 있지 않다면
“제발” 그려놓고 시작하라 했었습니다.(3월 30번)

또한, 유리함수에서 배운 식은 두 개, 무리함수에서도 배운 식이 두 개라 했었죠? 각각 뭐였죠?

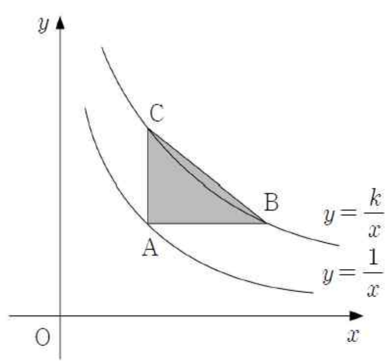
1. 기본형 $\dfrac{1}{x}$ / $\sqrt{x}$
2. “평행이동 된 꼴” $\dfrac{1}{x-a}+b$ / $\sqrt{x-a}+b$

그래서 제가 어떤 것을 또 강조했냐면,
“평행이동된 꼴” 로 출제가 되면 그 “평행이동”이
반드시 출제가 될 것이기 때문에, 그릴 때에도 기본형 그려놓고 x축으로 a만큼 y축으로 b만큼 이동한 것을
살려서 그리라 했습니다.

또한!!! 만약 $\dfrac{bx-ab}{x-a}$처럼 합쳐서 나온다면,
꼭 분해해서 풀어헤쳐놓고 시작하라 했습니다.
$\dfrac{1}{x-a}+b$ 이런 식을 배운거지, $\dfrac{bx-ab}{x-a}$이런 식을 배운건 아니니까요.

또한, 그래프가지고 장난치는 문항이 나올 수 있다
했는데, 다음 문항이었죠.

26. 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 제 1 사분면 위의 점 A에서 x축과 y축에 평행한 직선을 그어 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. $\triangle$ ABC 의 넓이가 50 일 때, k의 값을 구하시오.



해서, 3가지를 강조했습니다.

1. 좌표같음
2. 길이차이
3. “모르는 좌표 = 미지수로 바로 둘 것 !!”

풀어보고, 뭔소리인지 기억이 안나면 필히 복습하고
가시길 바랍니다.

수열

수열은 크게 2가지로만 나뉜다했었죠?

1. 등차수열.

2. 등비수열.

등차,등비 수열은 <u>**일반항 / 등차중항,등비중항**</u> 으로만 출제가 된다 했습니다.

그래서 문제를 봤을 때,

“ 다음 세 항이 등차수열을 이룰때~ ”와 같은 표현이 보이면,

“아 <u>일반항</u>을 쓰거나 내가 <u>등차중항 성질</u>을 활용해야겠다 (무조건)“ 하고 반응해야 한다고 했습니다.

그 외에 수열은 모두 하나입니다.

★★★<u>“ 처음보는 수열 ”</u>

식 자체가 내가 처음보는 수열일수도 있고,

수열을 주진않고 어떤 규칙을 줄 수 있습니다.
~~(그게 일반항으로 까지 가진 않습니다. 점화식은 출제 x)~~

어떻게 나오든 주된 행동은 뭐라고?

<u>**★★처음보는 상황! 수열 → 나열 ! 대입 !(직접하기!!)**</u>

++ $\sum$

$\sum$ 에 대해서 정리했던 것이 기억나나요?

다시 한번 정리해보겠습니다.

$\sum$를 보았을 때, 가능한 사고과정.

1. 등차,등비수열의 합
2. 자연수 거듭제곱의 합
3. 부분분수
4. 하나하나 더하기.

4. 같은 것을 잘 못하던데, 만약 $\sum_{n=1}^{5} a_n$라는 것을 보면 무엇이 생각나죠? 아 $n=1$부터 $n=5$까지 다 더한것이니 내가 더하면 되겠다. 가 됩니다. <u>**너 더할 수 있니?**</u> 라는 거예요.

해서, $\sum_{n=1}^{5} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 이라는 “이미지”가 머릿속에 꽉 박혀있어야 한다고 강조했던 것 같습니다.

어디에서? 빈칸에서.

빈칸!

✓ 접근법 – 요약.

무조건 앞, 뒤 비교

↓

안되면, 조건으로.

✓ 설명.

- 빈칸문항의 출제의도는, **너 이 식 들어봤냐?** 가 아닙니다. 처음보는 식은 절대로 우리한테 물어볼 수 없고, 그걸 묻고자 낸 시험문항도 아닙니다.
배우지 않은 걸 내는 시험따윈 없다고 누누히 말했습니다.

빈칸의 출제의도는 딱 두가지 입니다.
<u>★★★" 추론할 수 있느냐 " + "수열의 개념"</u>

빈칸인 (가), 와 (나) 를 채우는 과정에서 수능평가항목인 "추론" 이 들어가게 되며, 그 추론과정에서 간간히 수열의 개념이 쓰이게 됩니다.

여기서 말하는 수열의 개념은 당연히 배운것들 이겠죠?

그래서 일단 무얼배웠나 정리 해야하고, 그걸 기반으로 "추론연습" 만 주구장창 하시면 됩니다.

여기서 말하는 추론은, 단순합니다. <u>왜 이식이, 이식으로 되었는가.</u> 그 "비교"를 <u>식의 앞뒤만 먼저</u> 따져보고, 안되면 위로 올라가서 비교에 필요한 것들을 찾아 따오면 됩니다.

<u>✓ 앞 뒤 비교.</u>

80% 의 빈칸문항은 "앞뒤비교"로 해결이 됩니다.
이 앞뒤비교과정에서 <u>"수열의 개념"</u>을 묻는 경우도 많다. 고
했었습니다.

그래서 수열의 개념도 반드시. 반~드시 꾀고 있어야하고 문제를 봤을 때

" 아 이건 수열개념이 필요하구나 "

하는 순간 적용해보려고 노력해야 합니다.

관련 문항을 (수업 때 했지만) 뒤페이지에서 다시 보면서 마저 얘기하겠습니다.

그리고 특별히 수열개념을 묻지 않고 단순히 "앞뒤비교"할 수 있는지 묻는 문항도 많습니다.

다만 그 과정에서 비교가 힘든 문항이 있었는데,
대부분이 $\sum$ 가 들어가있는 식입니다.

이것역시 뒤에서 다뤄보죠.

<u>✓ 막히면 위에서 찾기.</u>

결국 "빈칸" 의 출제의도는 추론이기 때문에,
풀이에 있어서 "추론"의 성격은 절대 변할 수 없습니다.

해서, 앞뒤비교로 추론이 안된다면 위로 올라가서라도 필요한 것을 끄집어오셔야 한다고 했습니다.

사실 위에서 찾는건 크게 어렵지 않아요.
지금껏 대다수의 난이도 높은 빈칸은
"앞뒤비교" 에서 그 비교자체가 어려웠던 문항들이었습니다.

수열개념적용 (1)

30. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$이고,

$$a_{n+3}-a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+1 \ (n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $b_n=a_{n+1}-a_n$이라 하면
>
> $b_1=b_2=1$, $b_{n+2}=b_n+1 \ (n\ge 1)$
>
> 이므로 두 수열 $\{b_{2n-1}\}$, $\{b_{2n}\}$은 모두 첫째항이 1이고, 공차가 1인 등차수열이다. 즉,
>
> $b_{2n-1}=b_{2n}=\boxed{(가)} \ (n\ge 1)$
>
> 이다.
>
> 그러므로 $n\ge 2$일 때, a_n은 다음과 같다.
>
> (i) n이 홀수일 때, $n=2m-1$이라 하면
>
> $a_{2m-1}=a_1+\sum_{k=1}^{2(m-1)} b_k$
>
> $=a_1+\sum_{k=1}^{m-1}(b_{2k-1}+b_{2k})$
>
> $=m^2-m$
>
> (ii) n이 짝수일 때, $n=2m$이라 하면
>
> $a_{2m}=a_1+\sum_{k=1}^{2m-1} b_k$
>
> $=\boxed{(나)}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(m)$이라 할 때, $f(10)+g(10)$의 값은?

[4점][2013년 3월]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

✓ 해설.

수열 개념이 들어간 부분은 (가) 입니다.
바로 위 문장에서 “등차수열” 이라 했으므로
“등차수열”에 대해 여러분들이 배운 것을 그대로 하시면 됩니다.

등차수열에 대해서 배운 것은 오직 두가지
밖에 없었습니다.

1. 일반항 $\rightarrow a_n=a_1+(n-1)d$

2. 등비중항 $\rightarrow 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

그러므로, 오직 저 둘만 생각해야 하고, 이 문항에선
1. 일반항으로 접근하는게 옳습니다.

일반항으로 접근하려면 첫째항과 공차를 찾아야하는데

잉? 둘다 이미 주어졌죠?

그래서 보자마자 아 $1+(n-1)\times 1=n$이구나. 하셔야 합니다.

수열개념적용 (2)

17. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고

$$(a_{n+1})^{n+1}=\frac{a_1+(a_2)^2+(a_3)^3+\cdots+(a_n)^n}{n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> $b_n=(a_n)^n$이라 하면 $b_1=10$이고 주어진 식으로부터
>
> $$b_{n+1}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이다. $S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$라 하면
>
> $$S_{n+1}=\boxed{\text{(가)}}\times S_n$$
>
> 이다.
>
> $S_1=10$,
>
> $$S_n=S_1\times\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$
>
> 를 이용하여 S_n을 구하면
>
> $$S_n=\boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이다.
>
> ⋮

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(5)\times g(6)$의 값은? [4점]

① 72　② 76　③ 80　④ 84　⑤ 88

✓ 해설.

수열 개념이 들어간 부분은 (가) 입니다.

가 조건 바로 위를 보면, $S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ 라 했는데

이런 S_n에 대해 배운 것은,

$S_n-S_{n-1}=b_n$ 이 있죠.

즉, $b_{n+1}=\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$ 에서

$b_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 이고,

$b_1+b_2+\cdots+b_n=\sum_{k=1}^{n} b_k=S_n$ 입니다.

그러므로

$$S_{n+1}-S_n=\frac{S_n}{n}$$

$$S_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)S_n$$

식이 이렇게 됩니다.

쉽죠?

배운 것으로 자꾸 연결시키고자 하는 행동을

연습하셔야 하는 부분입니다.

- 앞뒤비교가 까다로운 경우 (1)

* 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_na_{n+1}}{n+1} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로
>
> $$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_na_{n+1}}{n+1}$$
>
> 을 변형하면
>
> $$\frac{n+1}{a_{n+1}}-\frac{n}{a_n}=\boxed{\quad(가)\quad}$$
>
> 이다. $b_n=\frac{n}{a_n}$이라 하면 $b_1=\frac{1}{2}$이고
>
> $$b_{n+1}-b_n=\boxed{\quad(가)\quad} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이므로
>
> $$a_n=\boxed{\quad(나)\quad}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(13)g(4)$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

✓ 해설.

(가) 조건을 구하기가 참 힘듭니다.

자, 위 식과 아래식을 비교해 볼게요.

위 식의 좌변은,

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}$$

아래 식의 좌변은,

$\frac{n+1}{a_{n+1}}-\frac{n}{a_n}$ 입니다.

그러면 $\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}$ 이 식이 $\frac{n+1}{a_{n+1}}-\frac{n}{a_n}$ 이걸로 바뀐것.

그럼 두 식의 처음 식은 각각 $\frac{a_n}{n}$, $\frac{n+1}{a_{n+1}}$ 인데, 비교를 해보면, $\frac{a_n}{n}$ 에서 분모의 n이 사라지고 a_{n+1}이 들어갔으며
분자의 a_n이 사라지고 $n+1$이 들어갔음 을 알수있습니다.

즉, $\frac{a_n}{n}\times\frac{n(n+1)}{a_na_{n+1}}=\frac{n+1}{a_{n+1}}$.

그러므로 , 앞뒤비교를 통해 생략된 식을 알아낸 것이고
그 생략된 식은 $\times\frac{n(n+1)}{a_na_{n+1}}$이였던 것이구요.

이 문제는 학생들이 처음에 접근을 잘 못하던데,
글쎄, 겁을 먹어서 그런가.

제가 결국 하고 싶은 얘기는,

어차피 수능장에서 보는 빈칸문항은.
여러분이 1년동안 본 문항이 아닌 처음본 문항입니다.
처음 본 식이 적혀있다구요.
근데 그게 뭔상관?
어차피 앞뒤비교, 혹은 위에서 조건찾기. 그걸로 풀릴 수 밖에 없습니다.

ii) 빈칸
- 앞뒤비교가 까다로운 경우 (2)

27. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = -\frac{4}{9}$이고,

$$2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n \quad (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식 $2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n$의 양변을 2^{2n+1}으로 나누면
>
> $$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2^{2n+1}} \quad (n \ge 1)$$
>
> 이므로 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여
>
> $$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} \quad \cdots\cdots (*)$$
>
> 이다. 한편
>
> $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}}\right)$$
>
> $$= \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{n-1}{4^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \cdots + \frac{n-1}{4^n}\right)\right\}$$
>
> $$= \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{(가)}}{4^n}\right)$$
>
> 이므로 (*)에 의하여
>
> $$a_n = \boxed{(나)} + \frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{(가)}}{4^n}\right)$$
>
> $$= -\frac{3n+1}{9 \cdot 2^{n-1}} \quad (n \ge 2)$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10) \times g(5)$의 값은?

[4점][2012년 9월]

① -64 ② -56 ③ -48 ④ -40 ⑤ -32

✓ 해설.

(가)조건 구하기가 참 까다롭습니다.

하지만 이런 문항들의 공통점은, $\sum$ 가 존재한단 점입니다. $\sum$는 뭐죠? “ 수열의 합 ” 입니다.

“ 나열되어 있는 ” 수열을 쫙 더해주는 역할을 하는게 $\sum$입니다.

무슨얘기냐, 반대로 생각하면, $\sum$는 나열할수도 있는겁니다.

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$$

이 둘은 왔다갔다가 되셔야 합니다.

문제다시볼게요.

(가) 조건식과 그 위의 식은 둘다 같은 식이라고 문제에 써있어요. (" = " 표시)

근데 위에것은 나열되어있고, 그 아래식은 $\sum$로 묶여 있습니다. 무슨말이냐,

여러분이 (가) 식을 구하려면 <u>그 시그마를 다시 풀어봐서, 이미 풀어져있는 위의 식과 비교</u>해서 답을 내면 된다, 이겁니다.

<u>★★★ 시그마를 풀어볼때는 $k=1, k=2, k=3$정도만 대입해주면 됩니다.</u>

미적분 Ⅰ

수열의 극한

크게 세가지 테마로 출제합니다.

1. 그냥 기본적인 문항

2. 도형과 엮어서 나오는 수열의 극한

3. 등비급수 & 도형

1. 기본적인문항

뭐가 있었냐면,

> n이 무한으로 갈 때 그 외 상수항은 무시가능하다.

> 수렴하는 수열은 α로 두고 푸는게 좋다.

> 등비급수합의 공식을 알고 있어야 한다.

> 무한합이 수렴하면 일반항은 0이다.

(ex . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 234$, $\lim_{n \to 0} a_n = 0$.)

>샌드위치 정리 (a < b < c 꼴)

이 정도 였습니다.

기본적으로 알고 있어야 하며,
숨쉬는것만큼이나 당연하게끔 풀어야합니다 제발
이건 내가어떻게 해줄 수 있는게 아녜요.

쉬운문제집 풀라했었는데 계속 풀어왔죠?
여러분이 안하는걸 저보고 어떻게 하라구요.
기억안나면 다시보고. 푸세요 짱수학

★★★2. 도형과 엮어서 나오는 수열의 극한.

- 아직 안한 부분입니다만, 그래도 일단 적어볼게요.

등비급수에서 비슷한 것들을 언급했었는데, 뭐였냐면

원이 나오면, 원의 성질이 "무조건" 쓰인다.

ⅰ) 원과 어떤 직선이 접하면, 원의 중심에서 접점에 수선을 내릴 수 있다.

ⅱ) 원 위에 점에서 중심까지의 거리는 일정하며
그 길이는 반지름.

또한, **"직각삼각형" 은 매우많이 출제되는 요소**이므로,

직각삼각형이 보이면 반드시 그 삼각형을 활용할 생각을 해야하고, 직각삼각형이 만들어질것같은 느낌이 오는
보조선은 무조건 그어준다.

직각삼각형을 만든뒤, 쓰이는 요소들은,

ⅰ) 닮음.
ⅱ)피타고라스 (알지?)
ⅲ) 내접원이 있으면 내접원의 반지름.

하여간 저 3개만 해도 무한한 활용이 되므로 직각삼각형은 거의 출제된다 볼 수 있습니다.

안쓰이는걸 찾는게 더 빠를정도.

3. 무한등비급수 & 도형

다음장에.

등비급수 & 도형 !

✓ <u>"등비급수& 도형"</u> 접근법 - 요약.

길이비 따지기

길이비 등장 → **풀면 끝.**

미지수(x) 등장 → **직각삼각형** + **원 등장.**

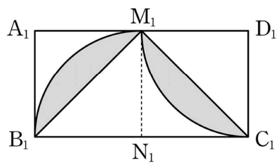
길이비가 바로 나오는 문항은 뭐 알아서 하시면 되고.
바로 안나오는게 대다수의 어려운 문항이라 했었죠?

바로 가보죠. 풀어보세요.

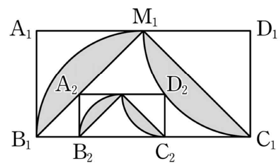
✓<u>2014학년도 수능 B형 15번 문항.</u>

답3번

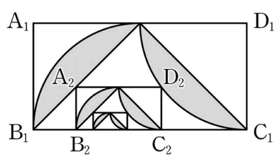
15. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$ 이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1 과 선분 B_1C_1 의 중점을 각각 M_1, N_1 이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 $N_1M_1B_1$ 을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 $D_1M_1C_1$ 을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$ 의 호 M_1B_1 과 선분 M_1B_1 로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$ 의 호 M_1C_1 과 선분 M_1C_1 로 둘러싸인 부분인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2 와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2 를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$ 인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에서 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



R_1



R_2



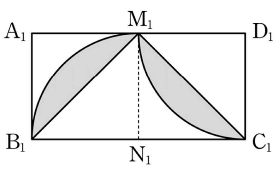
R_3

⋯

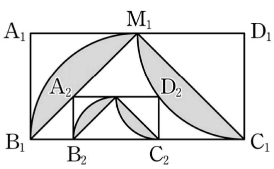
⋯

① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$　② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$　③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$
④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$　⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

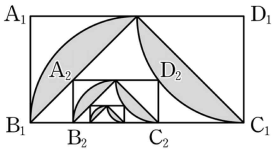
15. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$ 이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1 과 선분 B_1C_1 의 중점을 각각 M_1, N_1 이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 $N_1M_1B_1$ 을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 $D_1M_1C_1$ 을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$ 의 호 M_1B_1 과 선분 M_1B_1 로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$ 의 호 M_1C_1 과 선분 M_1C_1 로 둘러싸인 부분인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

⋯

⋯

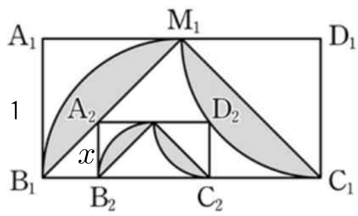
① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$
④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

정말 제일 멍청한 행동이 뭐냐면,
아무 이유없는 보조선들을 막 그려대는 겁니다.

아니라니깐요. 아무이유없는 보조선을 그려야만 풀리는 문제를 낼까요 과연? 공부 몇 십년씩 하신분들이.

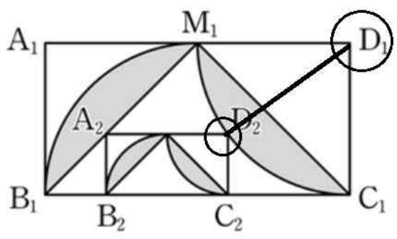
뭔말인지 알죠? 풀이 보겠습니다.

1. 길이비 찾고, 없으면 미지수



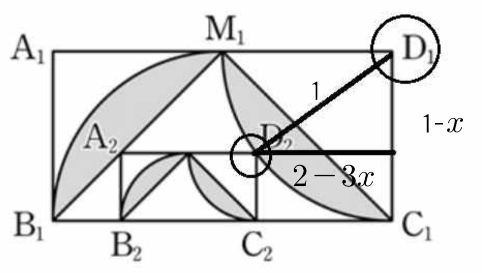
R_2

2. 원 등장 → ★★원의 **"중심"** 과 **"접점"** 활용할 생각



R_2

3. 만들자 직각삼각형 (99.9%)



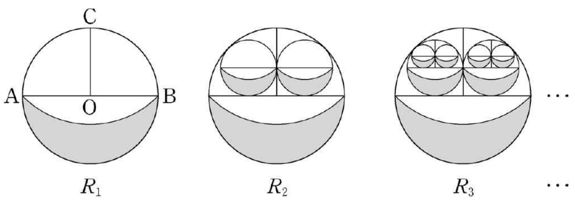
R_2

4. 피타고라스로 풀기.

저 두 보조선이 왜 그어졌는가를 확실히 파악하셔야 합니다.

푸세요.

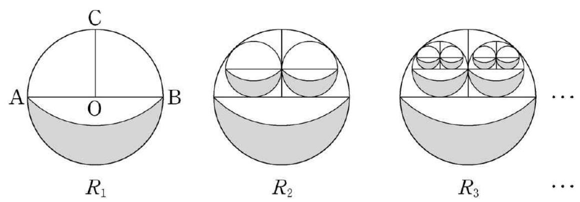
14. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자.
점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 ◡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 원의 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$
④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{5+6\sqrt{2}}{7}$

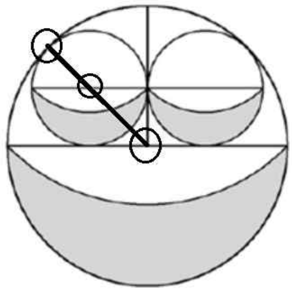
답3번

14. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자. 점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 $\smile$ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 $\smile$ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 원의 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 $\smile$ 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



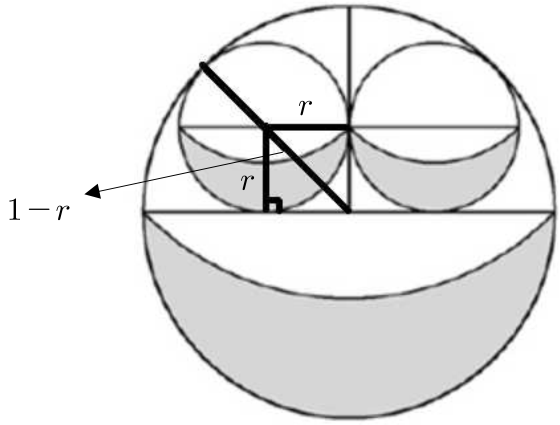
① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$
④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{5+6\sqrt{2}}{7}$

1. 원나왔네? 중심, 접점 활용.



(참고로 저 동그라미 세 점은 한 직선위에 있을 수 밖에 없습니다. 당연하죠?)

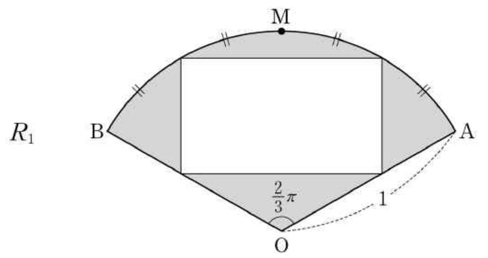
2. 만들자 직각삼각형.

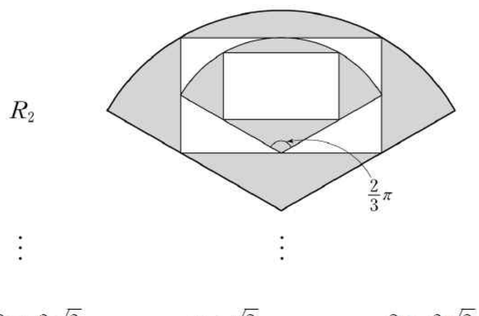


3. 피타고라스 or 특수각으로 풀면 끝.

푸세요.

18. 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





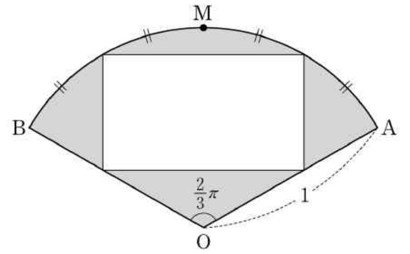
⋮ ⋮

① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}$　③ $\frac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

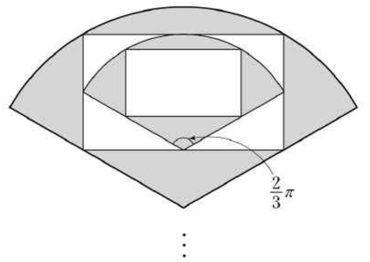
답4번

18. 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



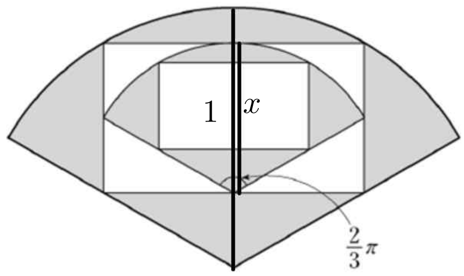
R_2



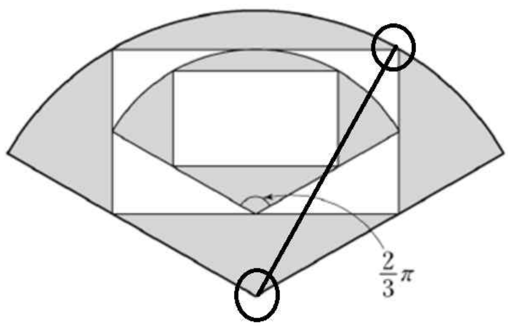
⋮ ⋮

① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

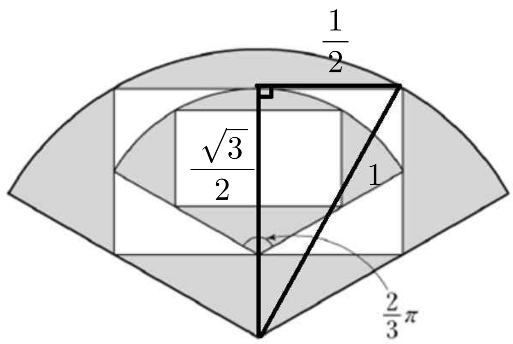
1. 뭐랑 뭘로 길이비를 삼을지. → 미지수.



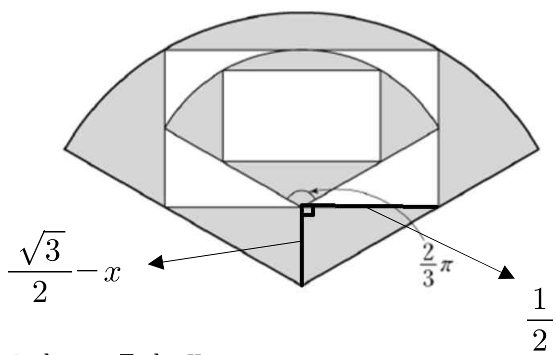
2. 뭔나왔네? → 중심과 접점에 초점.



3. 만들자 직각삼각형



4. 또만들자 직각삼각형



5. 특수각으로 풀기. 끝.

함수의 극한

기본적인 분수식의 극한, 무리식의 극한은
“당연히 ” 해결해야 할줄 알아야 하며,
재작년 6월 21번문제로 출제되었던 것만 다시한번 언급해 준다면, (수업 때 고생했던 문제)

11. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$

(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은?

[4점][2014년 6월]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\lim \frac{0}{0}$꼴 = α. 의 출제는 다음과 같은 두가지만 기억.

1. 분모가 0이면 그 어떤 상황이 오더라도 분자는 무조건 0이다.

2. 분자가 0이면 두가지 상황이다. 분모가 0 이거나, 분모가 0 이 아니거나($\frac{0}{4}$ = 0이니깐, 당연한 소릴...)

구분하는 법은 단하나다.

$\lim \frac{0}{g(x)(0\text{인지 아닌지 모르는 함수})} = \alpha$
로 식이 주어졌는데,
i) α가 0 이 아니다. → g(x) 무조건 0!!!!

ii) α가 0이다. → g(x) 가 0 일 수도, 아닐 수도.
즉 넌 여기서 0이라고 가정하고 풀고, 가정했는데 아니면 0이 아니라고 풀어야 한다.

+++
분수식,무리식의 극한에서의 핵심
> 인수분해, 유리화를 하는 이유는?
> 무조건 **★약분★**

+++또한, 함수의 식 추론 문항이 있었는데, 다음과 같았다.

12. 다항함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^2}{ax+1} = 2$

(나) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{f(x)} = \frac{1}{4}$

이 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

[3점][2006년 5월]

보통 두 식이 등장하는데, 두 식은 다음과 같다.

1. 최고차항의 계수와 차수 알려주는 식. $(x \to \infty)$
2. 나머지 것들을 정해주는 식. $(x \to a)$

++++ 연속

★★★오로지 “좌극한 = 우극한 = 함수값” 으로 따지기.

<u>**만약 “구간”의 연속을 묻는다면 “불연속점 모두”를 조사해 보면 된다.</u>

→ 이부분은 나중에 문제 많이 풀어보면서 다시 합니다.

미분기초

미분기초에서 배웠던 것들을 나열해보자면,

1. 미분계수의 정의
2. “미분가능” 표현의 접근법
3. 접선의 방정식
4. 증가,감소,극대,극소를 이용한 도함수의 이해
5. 빼기함수 (기초라기보단 알아둬야할 풀이법)

이렇게 될텐데, 가볍게 정리하고 넘어가봅시다.

★<u>1. 미분계수의 정의</u>

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 모양처럼 되있거나 하면
미분계수를 반드시 떠올려야하며,

다음을 만족하는 것들만 $f'(a)$로 정의됨을 이해한다.

$$\frac{f(\boxed{a+h})-f(\boxed{a})}{h}$$

(분자식의 차가 분모에 있을때)

★★★<u>2. “미분가능” 이란 표현에서의 접근법.</u>

“미분가능” 이란 표현 보이면 무조건 두가지를 확인

> 1. 연속인지
> 2. 좌우기울기 같은지(= 미분계수가 존재하는지 = 좌미분계수와 우미분계수가 같은지)

강력한 Tip 으로 제시했던것은,

미분가능은 **<u>구간이 나뉠경우만 출제됨.</u>**

예를들자면 $\rightarrow f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & (x<t) \\ 3kx^2 & (x \geq t) \end{cases}$

이런식으로 $f(x)$식이 구성될때만.

그러면 제가 “미분가능하냐?” 란 문항을 봤을 때,
만약 구간이 나뉘어져 있으면, 그냥 풀면되고

구간이 나뉘어져 있지 않으면

<u>**“열심히” 구간을 나눠주면 된다**</u>했습니다.

이에 대한 얘기는 본책에서 했으니 참고바람.

★<u>3. 접선의 방정식</u>

> 접선의 방정식은 두가지로만 출제됩니다.

i) 접점을 알 때.	ii) 접점을 모를 때.

i) 접점을 알면, 그냥 바로 접선의 방정식 쓰고 풀면 됩니다.
그 후에 여러가지로 나오지만 이건 문제마다 다르며 많이 풀어보면 되는부분.

ii) 접점을 모르면, **무조건 접점을 “t” 로 두고** 풀면됩니다.

근데 여러분, t로 두세요 하면 쉽게쉽게 풀리나요?

제가 말하고자 하는건,

“ 접점을 모르면 ” - > “ t 로 둬라 ”

이게 아니라,

“접선의 방정식 문제네? ” > “ 접점이 있나없나 보자 ”

> “ 어 접점이 없네? 그럼 무조건 접점을 숨겨뒀을거야 ”

> “역시 어디선가 접점이 있군.
근데 내가 모르니깐 t로 둬야지 ”

의 사고방식이 되어야 합니다.

기억 또 기억.

★★4. 도함수의 이해.

모든 도함수를 통해서, 우리는 원래함수를 알 수 있다 했었습니다. (개형만)

개형 그리는게 정확히 이해가 가질않거나 와닿지 않으면, 그냥 극대,극소,증가,감소의 정의로만 대략의 개형을 그린뒤에, 풀어주시면 됩니다.

중요개념 정리만 하고 패쓰.

★★★무조건 f’(x) 로만 판단한다.
함수 f(x) 가 증가한다 / 감소한다

> f’(x) 가 양수 (증가) / f’(x) 가 음수 (감소)

함수 f(x)가 x= a 에서 극대값을 / 극소값을 ~~ 갖는다.

> x= a에서 f’(x)’ 가 + > - (극대)
> x= a에서 f’(x)’ 가 - > + (극소)
> 극값인지 확인만 할때는 그냥 f’(a) = 0 인지 확인.

★5. 빼기함수

빼기함수라는건, 어떤함수의 해집합을 알 때 그 함수의 식을 구할 수 있는 것을 기초로, 두 식이 등장하였을 때, **f(x)- g(x) 꼴의 식을 구할 수 있는 방법**이였습니다.

주로 미분심화문항에서, f(x)의 대충의 개형을 알고 그 식을 구하고자 할 때 쓰입니다.

~~기초적인 빼기함수를 언제활용하는지는,~~

~~i) f(x)-g(x) 처럼 빼기함수가 직접언급되었을때.~~
~~ii) 두 함수가 나오고, 그 두함수의 교점이 등장하였을 때~~

~~라고 배웠었습니다.~~

** 직접 출제는 안하니깐, 생략하셔도 됩니다.

미분심화

아직까진, 오로지 두가지로만 출제 오로지.

1. 그래프를 그릴 수 있는 식이 주어지거나
2. 말거나.

21번 문항을 딱 보았는데,

1. 식이 주어졌다 ?

식이 주어지면, 무조건 그 식을 미분해봐야하며, 여기서 미분하는 행동은 그 함수의 도함수를 구하는 행위이며 도함수를 구한다는 것은 원래함수에 대한 정보를 얻겠다는것.

도함수 구한다음에 그 정보를 (정보는 증가,감소,극대,극소) 이용해서 원래함수를 그린 뒤에, 이제 차차 본인한테 주어진 문제를 풀어나가기 시작.

2. 식이 주어지지 않음?

하지만 결국 식을 ★★줄수밖에 ★★ 없다.
무슨소리? 식은 주지 않았지만 내가 문제를 푸는과정에서 일부든 전체든 결국 식을 구할 수 밖에 없다는것.
(ex. 식을 안줬는데 나한테 f(5)를 구하라했음.
그건 f(x)식이 결국엔 나올거란 얘기.)

+또한, 미분 문항이기에 미분하는 과정은 반드시 포함될 수 밖에 없다.

하여간, 식이 주어지지 않으면 “조건”이 주어질텐데, 그 조건을 해석해서 식을 세우는 것이 관건이다.

조건이 주어지면,

★i) 95% > 대충의 개형을 그려가며 조건을 적용해본다.
> 조건을 모두 만족하는 개형을 찾아낸다.
> 그 개형에 대한 식을 작성한다.
> 푼다.

★★★ 포인트 > 그래프부터 휘갈겨보면서 시작.
걍 멀뚱멀뚱 바라보고만 있으면 절대 풀 수가 없다.★★

★ii) 5% > 대충의 개형을 그리는 것이 아닌, 그냥 식을 세워버린다.
ex)"최고차항 계수가 1인 삼차함수 "
= x^3+ax^2+bx+c
> 조건에 맞게끔 풀어낸다.

이해가 안갈까봐 작년 수능 21번 문항을 첨부.

21. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

보다시피 식은 없고, 조건 (가),(나),(다) 만 주어진 상황.

ii) 방식으로 접근하려면 , (가)조건을 보고,
x^3+ax^2+bx+c 와 같이 두면 된다.

그 후 (나) 조건과 (다) 조건을 차례차례 이용하면 된다.

물론 그 이후엔 그래프를 그려야한다.

앞 페이지에서도 말했지만,

미분을 배우는 이유는 도함수를 통해서 원래함수정보를 얻기 위함이며, 또한 그래프가 어떻게 그려지는지에 대한 이해를 돕기 위함이다.

결국, 미분문제 = 미분이 무조건 쓰임 = 그래프 무조건 그림

이라 이해하면 됩니다.

뭔소린지 모를까봐..해설첨부..다음장에

정답풀이 :

조건(가)에 의하여

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f(0)=f'(0)$에서

$c=b$

$\therefore\ f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

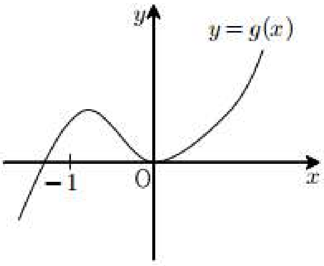
$g(x)=(x^3+ax^2+bx+b)-(3x^2+2ax+b)$

$\quad\quad =x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

$g(0)=0$이고,

조건(다)에 의해 $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이므로

그림과 같이 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



따라서 $g'(0)=0$이므로

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$에서

$g'(0)=b-2a=0$

$\therefore\ b=2a$

$g(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2(x+a-3)$

이므로

$g(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3-a$이고,

$x\geq -1$에서 $g(x)\geq 0$이므로

$3-a\leq -1$이어야 한다.

$\therefore\ a\geq 4 \quad\quad \cdots ㉠$

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로

$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8$

$\quad\quad \geq 10\times 4+8=48\ (\because ㉠)$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

<답> ⑤

출처 : ebsi

그래프 그린거 보이죠?

그래프 그린 뒤에 행동은 뒤에서 서술하고,
i) 방식에 대해 계속 서술하면,

i) 방식으로 접근하려면,

애시당초 그래프부터 그리고 시작.

이 문제에선 “미분기초” 에서 언급했던 빼기함수가 쓰임.

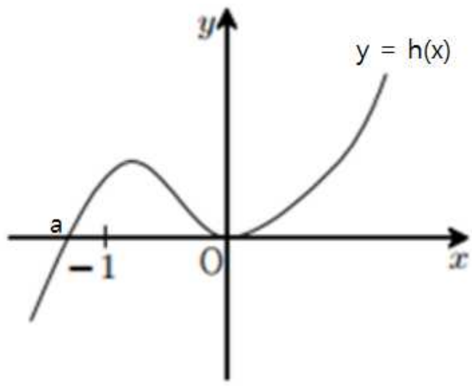
그래프 그리기 전 잠깐 조건을 변형해주면,

(나)조건 > $f(0)-f'(0)=0$
(다)조건 > $f(x)-f'(x)\geq 0$

그럼, $f(x)-f'(x)=h(x)$ 라 할 수 있다.

그럼 h(0) = 0 이고, x≥-1 에서, h(x)≥0 인 조건으로 바꿀 수 있다.

그래프 그려보면,



가 되고, 식을 다음과 같이 세울 수 있다.

$h(x) = x^2(x-a)$

그런데 h(x)는 f(x)- f’(x) 이므로,

f(x) = x^3+ax^2+bx+c 로 두고 계수비교하면 됩니다.

무얼 의미하는지 알겠죠?

이 문항은, i) 로 접근하나, ii)로 접근하나
결국엔 똑같은 문항입니다. 방향의 차이만 있을 뿐.

두가지 풀이는 모두 알아두셔야합니다만,

그 두가지 풀이의 공통점을 반드시 인지하고 있어야 합니다.

★★바로 그래프가 들어간다는 것.

수업 때도 자세히 얘기했지만,

지금 까지 고난도 미분문항에서 풀이에서 “그래프”가 빠진적은 단 한번도 없습니다.

그러니깐, 하여간, 9월에 미분문제나와주면,

감사합니다 하고 그래프 그리고 열심히 생각하면 됩니다.

확률과 통계

경우의 수

조합, 순열, 분할 이전에, 올해부터 “경우의 수 ”기초를 함께 배웁니다.

즉, “합의 법칙” 과 “곱의 법칙”입니다.

이건 뒤에 확률에서 자세히 소개했으니, 그쪽을 자세히 읽어보시고, 여튼 그렇기 때문에 올해에는 더더욱 합의 법칙과 곱의 법칙을 출제하려고 기를 쓸겁니다.

나누세요. 무조건.

본론으로 들어가보겠습니다.

조합과 순열부터 얘기하자면, 조합은 순서가 없었고,
순열은 순서가 있었습니다.

그래서 조합을 쓰냐 순열을 쓰냐는 순서 유무에서
많이 나뉩니다. 첨언하자면, **“순서”는**
“연속적인”혹은 “동시에 가능”으로 이해하면 좋습니다.

고난도 경우의 수에선, 문제를 다 “해석”하고
난 뒤에 어떤 식을 적용할까가 정말 중요한 과정으로 작용하는데, 이때에 조합/순열/분할 에 대한 이해가 핵심이 됩니다.

조합부터 얘기해보죠.

조합.

조합에서 중복조합은 오로지 두가지로만 해석합니다.

★★★ i) $x+y+z=n$

여기서 n은 “총 합”으로 해석합니다.
그래서 항상 중복조합 문항인지가 파악되면,
그리고 i)의 풀이로 푸는 것이 확인되면,
저 n이 무엇인지에 항상 초점을 맞춰야합니다.

만약 10개의 공을 4개의 바구니에 넣는다면,

4개의 바구니에 들어가는 공의 “총합”이 10개 니깐,
$x+y+z+w=10$, ${}_4H_{10}$이 됩니다.

또한, ${}_4H_{10}$여기서, “4” 는 “종류, 즉 서로다른 것”이 되겠고, “10” 은 총합이 됩니다.
그래서 “서로 다른 4명에게 모두 같은 총 합 10개를 준다.” 라는 의미가 생기게 되는 것이죠. 중요합니다.
같은 것을, 다른것에게.

★★★ ii) 함수의 개수

함수의 개수는, 다음과 같은 3가지의 단서가
있을 때 사용합니다.

1. 필요개수 (정의역)
2. 후보.
3. 조건.

많이 해서 기억나죠?

이쪽이 어려운 이유는, 저 3가지의 단서를 보고 반응을 못해서 입니다..

경우의 수에서 필요한 사고과정을 정리하면,

1. 어 경우의수? 해석해보자.
2. 중복조합이네. i) 일까 ii) 일까?
3. i) 이네. 총합은?
3‘. 총합은 아닌것같고... 조건있고..후보도.. 아ii)이다!

참 쉽죠?

순열.

순열은 순서, 동시성이 강조 되는 것이기 때문에, 다음과 같은 그림을 그려놓고 가는 것이 편하다 했습니다.

그러면 첫 번째/ 두 번째 / … / 여섯 번째 이렇게 되겠고 혹은 동시에 일어나는 6가지 사건 의 경우의 수를 구할 수 있겠죠.

중복순열도 마찬가지가 됩니다.

라고 수업 때 했었습니다.

이건 그냥 풀 때 그렇게 풀 수 있다는 것이고,
중요한건 해석이겠죠.

순열 중에서도 중복순열은,
“서로 다른 것”이 “서로 다른 것”으로 들어갑니다.

즉, 중복조합은 “같은 것” 이 “서로 다른 것” 이고
중복순열은 “서로 다른 것”이 “서로 같은 것” 이 됩니다.

가장 많이드는 예시가 편지와 우체통이죠.
서로 다른 5개의 편지를 서로 다른 3개의 우체통에 넣는 방법은 3^5입니다. 편지가 어디로 들어갈지 고민해야 하고 고민할 수 있는 경우는 3가지 인데 편지는 총 5개니 고민을 5번 하는거죠.

그런데 만약 편지가 모두 같은 편지가 된다면, 답은 ${}_3H_5$ 가 될겁니다.

그럼 여기서 조금 응용하자면, 분할과 직접연계가 가능합니다. 편지 5개를 3개의 우체통에 넣는 경우는,

편지 5개가 1개의 우체통에 가거나, 2개의 우체통에 가거나 3개의 우체통이 가는 경운데,

이것은 각각 **분할 + 조이름 붙이기**로 이해할 수 있습니다. 즉 “서로 다른 구슬 5개를 서로 다른 3개의 묶음으로 나누는 경우를 구하시오.” 한다 해서 무조건 우왕 분할! 이 아니라는 얘기가 됩니다.

정리하면,

같은 것을 서로 다른 것에게 → 중복조합.
같은 것을 나누고 같은 것으로 인식 → 자연수 분할
다른 것을 서로 다른 것에게 →중복순열 & 분할(조짜기)
다른 것을 나누고 같은 것으로 인식 →집합의 분할

이 됩니다.

해석은 이정도지만, 결국은 그 어느 파트보다 많은 문제풀이로 체화시켜야 하는 부분입니다.

수학은, 실전이다

개념을 배웠더라도, 그 개념을 문제에 접목시켜 실질적으로 문제를 풀 수 없으면
아무런 의미가 없습니다. 이미 배웠던 개념을 문제에 적용시키는 사고훈련을 다양한
문제를 풀면서 익혀야 합니다. 수능에 나오는 유형에 대한 실질적인 해결방법을 토대로 수업이 진행됩니다.

홍현빈 서울대학교 공과대학/ 조선일보 맛있는공부 인터뷰 / Bin모의고사 저자 / 수만휘 기출문제집 공동저자