1. 2016년 3월 서울교육청 가형 30번

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\,(a<0)$에 대하여 부등식 $f(x)\geq t\,(t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t=\dfrac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$) [1)]

2. 2015년 9월 평가원 가형 30번

양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.

(나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. 2)

3. 2015년 6월 평가원 가형 21번

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [3)]

① 43　② 46　③ 49　④ 52　⑤ 55

4. 2015년 4월 경기교육청 가형 21번

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2e^x+k & (x \geq 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|-f(x)$가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k의 개수는? 4)

(가) 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

5. 2013년 11월 수학능력시험 가형 30번

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\, g(1))$과 점 $(4,\, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0,\, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. 5)

6. 2013년 09월 평가원 가형 21번

자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=\left(2t^2+nt+n\right)e^t \end{cases}$$

이고, $x \ge e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 b_n을 갖는다. $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$의 값은? 6)

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$

④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

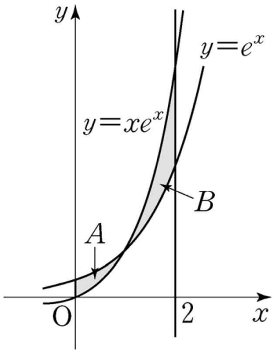
7. 2012년 11월 수능 가형 21번

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? 7)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

8. 2011년 11월 수능 가형 16번

그림에서 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 y축으로 둘러싸인 부분 A의 넓이를 a, 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분 B의 넓이를 b라 할 때, $b-a$의 값은? 8)



① $\frac{3}{2}$ ② $e-1$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ e

9. 2014년 4월 경기교육청 가형 30번

함수 $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$의 극댓값을 α라 하자. 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)-\frac{\alpha}{n}x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. 9)

1) 정답 25

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$에서

$$f'(x)=(x^2)'e^{ax}+x^2(e^{ax})'$$
$$=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}$$
$$=(ax^2+2x)e^{ax}=ax\left(x+\frac{2}{a}\right)e^{ax}$$

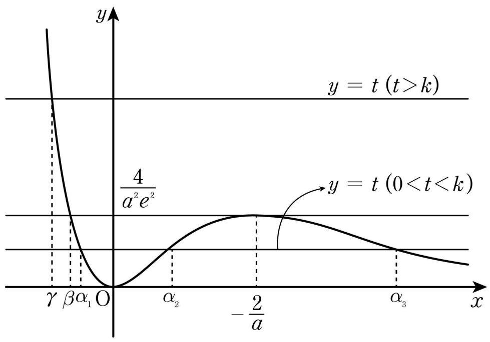
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{a^2e^2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0를 갖고 $x=-\frac{2}{a}$에서 극댓값 $\frac{4}{a^2e^2}$를 갖는다.

또 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이고, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$의 그래프는 그림과 같다.



부등식 $f(x)\ge t\ (t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값 $g(t)$에 대하여 $k=\frac{4}{a^2e^2}$라 하면, $g(t)$는 $0<t<k$ 또는 $t=k$ 또는 $t>k$로 나누어 생각할 수 있다.

ⅰ) $0<t<k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 세 실근을 α_1, α_2, α_3라 하면 부등식 $f(x)\ge t$의 해는 그림에서 $x\le\alpha_1$ 또는 $\alpha_2\le x\le\alpha_3$이므로 부등식을 만족시키는 x의 최댓값은 α_3이다.

따라서 $g(t)=\alpha_3$이다.

ⅱ) $t=k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 음의 실근을 β라 하면 부등식 $f(x)\ge t$의 해는 $x\le\beta$ 또는 $x=-\frac{2}{a}$이므로 $g(t)=-\frac{2}{a}$이다.

iii) $t>k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 실근을 γ라 하면 부등식 $f(x)\geq t$의 해는 $x\leq\gamma$이므로 $g(t)=\gamma$이다.

정의역이 $\left\{x \middle| x<\beta,\ x\geq -\frac{2}{a}\right\}$인 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} h_1(x)=f(x) & (x<\beta) \\ h_2(x)=f(x) & \left(x\geq -\frac{2}{a}\right) \end{cases}$$

라 정의하면, 두 함수 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$는 각각의 정의역에서 일대일 대응이므로 역함수를 갖는다. 또한, $y=h_1(x)$의 치역은 $\{y|y>k\}$이고, $y=h_2(x)$의 치역은 $\{y|0<y\leq k\}$이므로 함수 $h(x)$의 역함수의 정의역은 $\{x|x>0\}$이다. 이때, $h(x)=t$를 만족하는 x의 값은 방정식 $f(x)=t$의 해 중에서 최댓값이므로 $h(x)$의 역함수가 $g(t)$이다. $g(t)$는 $0<t<k$, $t>k$인 모든 점에서 연속함수이므로 $t=k$에서의 연속성을 조사하면 된다.

$\lim\limits_{t\to k-}g(t)=-\frac{2}{a}$에서 $a<0$이므로 $-\frac{2}{a}>0$

$\lim\limits_{t\to k+}g(t)=\beta$에서 $\beta<0$이므로 $\lim\limits_{t\to k-}g(t)\neq\lim\limits_{t\to k+}g(t)$이다.

따라서 함수 $g(t)$는 $t=k$에서만 불연속이다.

$$k=\frac{4}{a^2e^2}=\frac{16}{e^2},\ \frac{4}{a^2}=16,\ a^2=\frac{1}{4}$$

따라서 $100a^2=100\times\frac{1}{4}=25$

2) 정답 15

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$$

$f(x)$ 가 $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$ 에서 극값을 가지므로

$ax^2+(2a+b)x+b+c=0$의 근이 $x=\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에서 $-\dfrac{2a+b}{a}=0$, $\dfrac{b+c}{a}=-3$ 이므로

$b=-2a$, $c=-a$

$\therefore\ f'(x)=a(x^2-3)e^x$, $f(x)=a(x^2-2x-1)e^x$

$0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$ 이므로 양변을 $x_2-x_1(>0)$ 로 나누어 식을 정리하면 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge-1$

$f(x)$ 가 $x\ge 0$ 에서 연속이고 미분 가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$ $(0\le x_1<c<x_2)$이다.

$\therefore\ f'(c)\ge -1$

즉, $x\ge 0$ 에서 $f'(x)$ 의 최솟값이 -1 이고 $f(x)$ 의 변곡점에서 $f'(x)$ 의 최솟값을 가지므로

$f''(x)=a(x^2+2x-3)e^x=0$ 에서 $x=-3, 1$

$x\ge 0$ 을 만족하는 $x=1$ 에서 $f'(x)$ 의 최솟값을 갖는다.

$f'(1)=-2ae=-1$ 에서 $a=\dfrac{1}{2e}$ $\quad\therefore a\le\dfrac{1}{2e}$

따라서, $abc=a(-2a)(-a)=2a^3\le 2\left(\dfrac{1}{2e}\right)^3=\dfrac{\frac{1}{4}}{e^3}$ 이므로 $k=\dfrac{1}{4}$

$\therefore 60k=15$

3) 정답 ④

$f(x)$가 역함수를 갖기 위해선 $f'(x) \ge 0$ 또는 $f'(x) \le 0$이어야 한다. $f(x)$를 미분하면

$f'(x) = e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\} + e^{x+1}\{2x+(n-2)\}+a$

$f'(x) = e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$

이다. 이때

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$이고 $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = a$이므로

$f(x)$가 역함수를 갖기 위해선 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

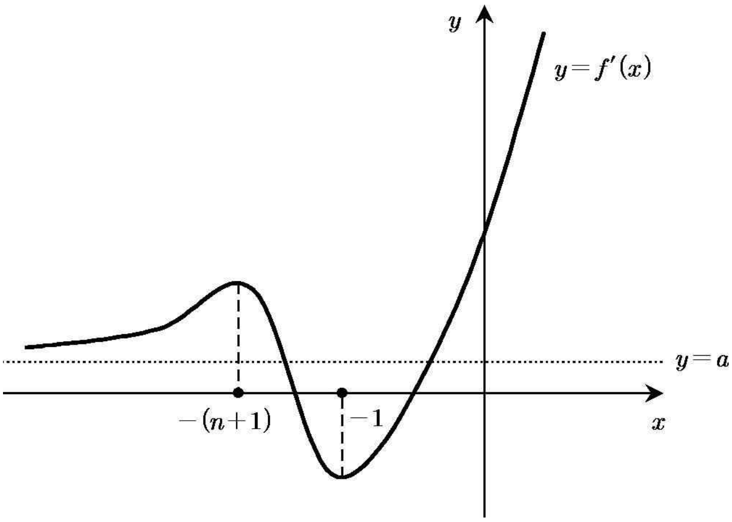
$f''(x)$를 구하면

$$f''(x) = e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$$

$$f''(x) = e^{x+1}(x^2+(n+2)x+n+1)$$

$$= e^{x+1}(x+1)\{x+(n+1)\}$$이므로

$f'(x)$는 $x=-1$에서 극소이며 최솟값이므로 $f'(x)$의 그래프를 그려보면



따라서

$$f'(-1) = e^0\{(-1)^2+n(-1)+1\}+a = 2-n+a \ge 0$$

$$\therefore a \ge n-2$$

따라서

$$\therefore g(n) = n-2$$

$$1 \le g(n) \le 8 \Leftrightarrow 1 \le n-2 \le 8$$

$$\Leftrightarrow 3 \le n \le 10$$

따라서 $n=3,\ 4,\ \ldots,\ 10$이고

$$\therefore \sum_{k=3}^{10} k = \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{2} k = 55-3 = 52$$

4) 정답 ①

$x \geq 0$일 때

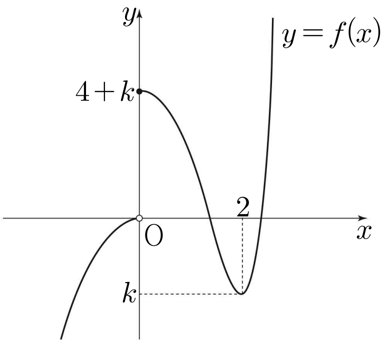
$f'(x) = x(x-2)e^x \ (x>0)$

$f'(x) = 0$에서 $x = 2$

$f(0) = 4+k$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4+k$	$\searrow$	k	$\nearrow$

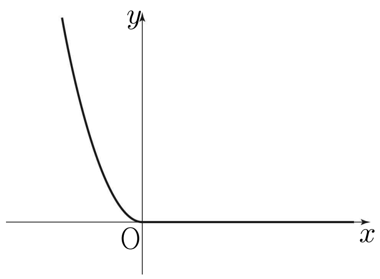
$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) \geq 0) \\ -2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$이므로

k의 값의 범위에 따라 $y=g(x)$의 그래프를 그리면
다음과 같다.

ⅰ) $k \geq 0$일 때



$x=0$에서 연속이고,

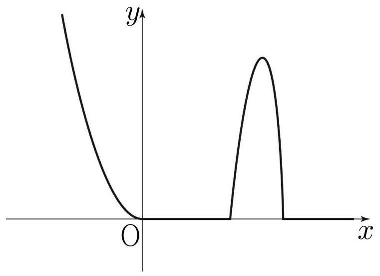
$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to -0}\frac{2x^2}{x} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to +0}\frac{0}{x} = 0$이므로

$x=0$에서 미분가능하다.

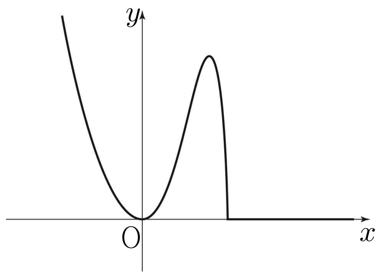
$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 0

ii) $-4<k<0$일 때



$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 2

iii) $k=-4$일 때



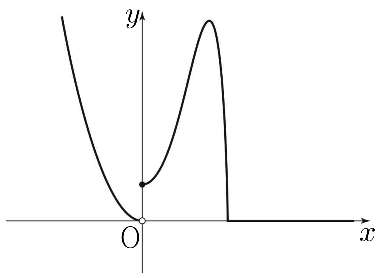
$x=0$에서 연속이고

$$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$$

이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

iv) $k< -4$일 때



$\therefore x=0$에서는 불연속이고,

연속이면서 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

i)~iv)에 의하여 $-4<k<0$이고

정수 k의 개수는 3

5) 정답 72

$$g(x)=f(x)e^{-x}$$

$$g'(x)=f'(x)-f(x)e^{-x}$$

$$g''(x)=f''(x)-2f'(x)+f(x)e^{-x}$$

$f(x)=ax^2+bx+c \ (a\neq 0)$로 놓으면

$$g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}$$

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이 $x=1,\ x=4$이므로

이차방정식

$$ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c=0$$

은 $x=1,\ x=4$를 두 근으로 갖는다.

근과 계수의 관계에서

$\dfrac{4a-b}{a}=5,\ \dfrac{2a-2b+c}{a}=4$이므로

$$b=-a,\ c=0$$

즉, $f(x)=ax^2-ax$이고

$$g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$$

한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $T(t,g(t))$에서 그은 접선의 방정식은

$$y-g(t)=g'(t)(x-t)$$

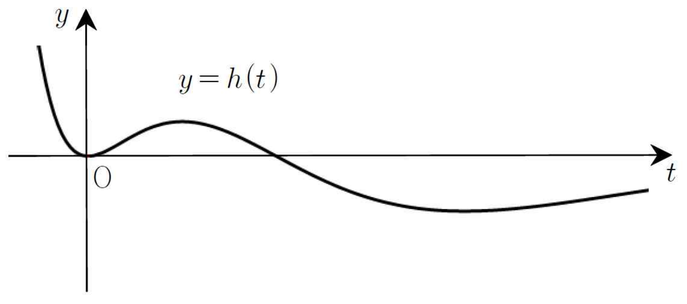
이 접선이 점 $(0,k)$를 지나므로

$k-g(t)=g'(t)(0-t)$에서

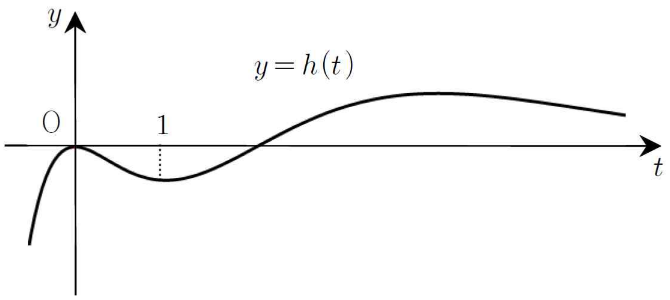
$$k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$$

$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$로 놓으면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$이어야 한다.

$a<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.



$a>0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$이어야 한다.



$h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$

$$\begin{aligned}\therefore g(-2)\times g(4) &= f(-2)e^{2}\times f(4)e^{-4}\\ &= 72a^{2}e^{-2}\\ &= 72e^{2}e^{-2}\\ &= 72\end{aligned}$$

6) 정답 ②

$x=e^t$, $y=(2t^2+nt+n)e^t$ **에서**

$$\frac{dx}{dt}=e^t$$

$$\frac{dy}{dt}=(4t+n)e^t+(2t^2+nt+n)e^t$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=(4t+n)+(2t^2+nt+n)$$

$$=2t^2+(4+n)t+2n$$

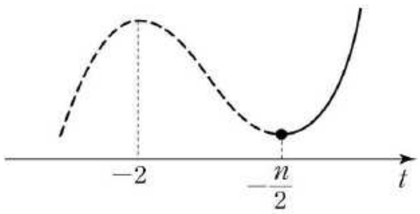
$$=(2t+n)(t+2)$$

$\frac{dy}{dx}=0$ **에서** $t=-2$ **또는** $t=-\frac{n}{2}$

이때, $x\geq e^{-\frac{n}{2}}$ **에서** $x=e^t$ **이므로** $t\geq-\frac{n}{2}$

따라서 $t\geq-\frac{n}{2}$**에서 함수** $y=f(x)$ **의 최솟값을 구하면**

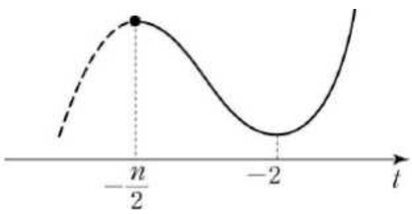
(i) $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ **일 때, 그래프의 개형이 그림과 같으므로** $t=-\frac{n}{2}$**일 때, 즉** $x=e^{-\frac{n}{2}}$ **일 때, 최솟값을 가진다.**



따라서, 함수 $y=f(x)$ **의 최솟값은**

$$\left(2\cdot\frac{n^2}{4}-\frac{n^2}{2}+n\right)e^{-\frac{n}{2}}=ne^{-\frac{n}{2}}$$

(ii) $n\geq5$ **일 때, 그래프의 개형이 그림과 같으므로** $t=-2$ **일 때, 즉** $x=e^{-2}$ **일 때, 최솟값을 가진다.**



따라서, 함수 $y=f(x)$ **의 최솟값은**

$$(2\cdot4-2n+n)e^{-2}=(8-n)e^{-2}$$

$$\therefore \frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$$

$$=\frac{3e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}+\frac{4e^{-\frac{4}{2}}}{e^{-\frac{4}{2}}}+\frac{3e^{-2}}{e^{-2}}+\frac{2e^{-2}}{e^{-2}}$$

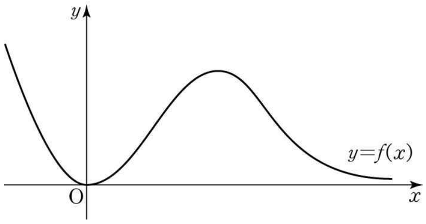
$$=3+4+3+2=12$$

7) ⑤

$f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$ 에서

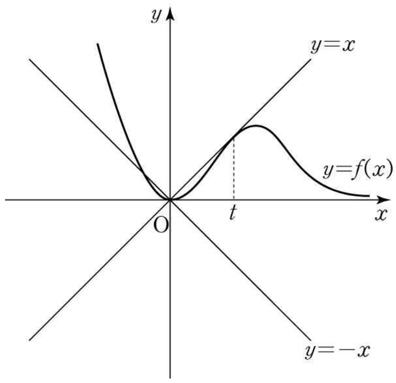
$f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}=kx(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$



x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4k}{e^2}$	↘

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x, y=-x$와 만나는 교점을 찾는다.



이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나지 않거나 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 $kt^2e^{-t}=t$ $\cdots$ ㉠이고

$x=t$에서 접선의 기울기가 1이므로

$kt(2-t)e^{-t}=1$ $\cdots$ ㉡

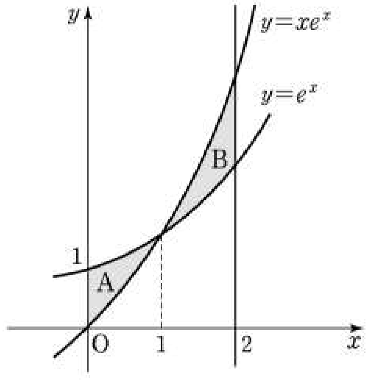
㉠, ㉡에서 $2-t=1$ $\quad \therefore t=1$

$\therefore k=e$

따라서 k의 최댓값은 e이다.

8) ③

두 부분의 넓이의 차 $b-a$는 $y=xe^x-x$의 정적분 결과와 같다.



$$b-a=\int_0^2 (xe^x-e^x)\,dx=\int_0^2 (x-1)e^x\,dx$$
$$=\left[\,(x-1)e^x\,\right]_0^2-\int_0^2 e^x\,dx$$
$$=1-(-e^2)-(e^2-1)=2$$

9) 정답 34

$f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$에 대하여

(ⅰ) $x>0$일 때

$f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}$

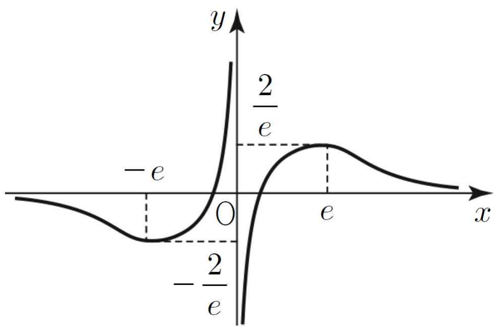
$x=e$ 에서 $f'(x)=0$ 이고

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$

$\therefore$ 극댓값 $\alpha=\dfrac{2}{e}$

(ⅱ) $x\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립하므로 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$y=\dfrac{2}{en}x$는 원점을 지나는 직선이고 원점에서 곡선 $y=\dfrac{2\ln x}{x}$에 그은 접선의 접점을 $(t,\ f(t))$라 하면 접선의 방정식은

$y=\dfrac{2-2\ln t}{t^2}(x-t)+\dfrac{2\ln t}{t}$ 이고 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{2-2\ln t}{t^2}(0-t)+\dfrac{2\ln t}{t}$

$\therefore\ t=\sqrt{e}$

$\therefore$ 접점은 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$이고 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{e}x$

$n=1$일 때, 직선 $y=\dfrac{2}{e}x$와 함수 $f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 0

$\therefore\ a_1=0$

$n=2$일 때, 직선 $y=\frac{1}{e}x$와 함수 $f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2

$\therefore\ a_2=2$

$3 \le n \le 10$일 때, 직선 $y=\frac{2}{en}x$와 함수 $f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 4

$\therefore\ a_n=4$

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 0+2+4\times 8 = 34$