2017학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(나 형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ② (출제자 : 15 오민지)

[출제의도] 지수계산을 할 수 있는가?

[해설]

$2 \times 8^{\frac{1}{3}} = 2 \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2 \times 2 = 4$

2) [정답] ⑤ (출제자 : 15 오민지)

[출제의도] 조합의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

${}_5C_2 = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$

3) [정답] ③ (출제자 : 15 오민지)

[출제의도] 수열의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3\left(\frac{3}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{3}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{3-0}{1+0} = 3$$

4) [정답] ① (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 등비수열의 뜻을 알고, 항을 구할 수 있는가?

[해설]

공비를 r이라 하면 $a_5 = a_1 \times r^4$ 이므로 $r = 2$ 이다.

($\because$ 모든 항이 양수)

그러므로 $2a_3 = 2 \times 1 \times 2^2 = 8$ 이다.

[별해]

등비중항의 성질을 이용하면

$a_1 \times a_5 = (a_3)^2$ 이므로

$2a_3 = 2\sqrt{16} = 8$ 이다.

5) [정답] ② (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 평균변화율을 구할 수 있는가?

[해설]

1 에서 3 까지의 평균변화율을 구하면

$\dfrac{f(3) - f(1)}{3-1} = \dfrac{(12+3a) - (4+a)}{3-1} = 6$ 이므로

정리하여 계산하면 $a = 2$ 이다.

6) [정답] ③ (출제자 : 15 최문영)

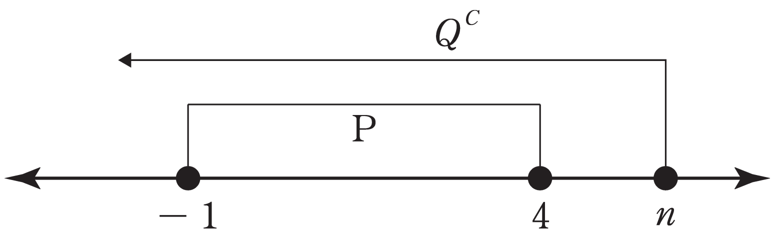
[출제의도] 명제의 충분조건을 만족시키는 값을 구할 수 있는가?

[해설]

명제 p 의 진리집합은 $P = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$ 이고,

명제 $\sim q$ 의 진리집합은 $Q^C = \{x \mid x \le n\}$ 이다.

이 때, p 가 $\sim q$ 의 충분조건이 되기 위해서는 $P \subset Q^C$ 가 되어야한다.



$4 \le n$ 이 되어야하므로 n 의 최솟값은 4 이다.

7) [정답] ② (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 거듭제곱으로 표현된 다항식을 정리할 수 있는가?

[해설]

$\left(x^2 + \dfrac{a}{x}\right)^4 = \displaystyle\sum_{r=0}^{4} {}_4C_r (x^2)^r \left(\frac{a}{x}\right)^{4-r} = \sum_{r=0}^{4} {}_4C_r a^{4-r} x^{3r-4}$ 이다.

$r = 2$ 일 때 x^2 이 됨을 알 수 있고 이 때 x^2 의 계수는 $6a^2$ 이다.

$6a^2 = 24$ 이므로 $a^2 = 4$ 이다.

8) [정답] ① (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 집합의 연산을 할 수 있는가?

[해설]

집합 $A = \{x \mid x = 5k+3,$ 단 $0 \le k \le 9$ 인 정수$\}$

$= \{3, 8, 13, 18, 23, 28, \cdots, 38, 43, 48\}$ 이다.

$n(A-B) = n(A \cap B^C)$ 이므로

$n(A-B)$ 는 집합 A 의 원소 중에서 짝수의 개수를 의미한다.

그러므로 $n(A-B) = 5$ 가 된다.

9) [정답] ⑤ (출제자 : 16 안성준)

[출제의도] 위치와 속도간의 관계를 이해했는가?

[해설]

수직선 위를 움직이는 점 P가 다시 원점에 도달하는 순간은

$f(t)=t^3-3t^2=t^2(t-3)=0$ 일 때, 즉 $t=3$ 이다.

또한, 점 P의 시각 t 에서의 속도는 $f'(t)=3t^2-6t$ 이다.

그러므로 다시 원점에 도달하는 순간의 속력은

$|f'(3)|=|27-18|=9$ 이다.

[별해]

$f(t)=t^2(t-3)$ 이므로 곱의 미분법에 의해

속도는 $f'(t)=2t(t-3)+t^2$ 이므로 속력은 $|f'(3)|=9$ 이다.

10) [정답] ④ (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 드모르간의 법칙을 알고, 조건부 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{7}{12}$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{5}{12}$ 이다.

따라서 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{5}{8}$ 이다.

11) [정답] ① (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 이항분포의 뜻을 알고, 이항분포를 이용해 문제를 해결할 수 있다.

[해설]

$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=2)$ 이므로

${}_6\mathrm{C}_1(p)^1(1-p)^5={}_6\mathrm{C}_2(p)^2(1-p)^4$ 이다.

$6p(1-p)^5=15p^2(1-p)^4$ 이므로 이를 정리하면 $7p=2$ 이다.

$\therefore p=\dfrac{2}{7}$

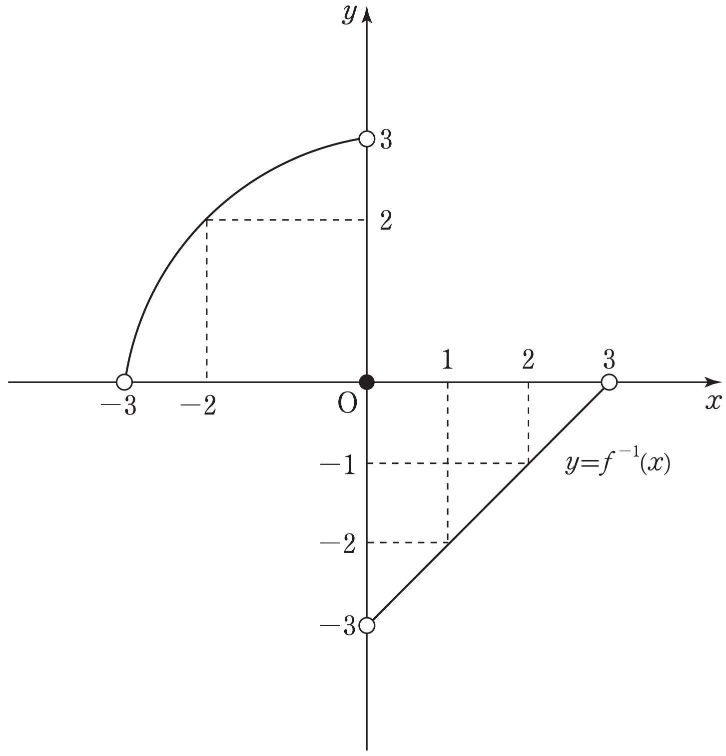
12) [정답] ② (출제자 : 13 이강산)

[출제의도] 함수의 극한을 이해하고 역함수의 성질을 알고 있는가?

[해설]

$\lim\limits_{x\to3-}f(x)$ 는 $x=3$ 에서의 $f(x)$ 의 좌극한값이고 그래프를 통해 0 임을 알 수 있다. (단, $x=3$ 에서의 함숫값은 정의되지 않는다.)

또한, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대해 대칭이기 때문에 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$ 가 점 $(-1,2)$ 을 지나므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 는 점 $(2,-1)$ 을 지난다. 한편, $x=2$ 에서 $y=f^{-1}(x)$ 는 연속이므로 함숫값과 극한값은 같다. 따라서 $\lim\limits_{x\to2+}f^{-1}(x)=f^{-1}(2)=-1$ 이다.

$\lim\limits_{x\to3-}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}f^{-1}(x)=0+(-1)=-1$ 이다.

13) [정답] ④ (출제자 : 15 오민지)

[출제의도] 로그를 이용하여 실생활 활용문제를 풀 수 있는가?

[해설]

$M_1=\log A_1-2.5+2.8\log4$

$M_2=\log A_2-2.5+2.8\log40=\log A_2-2.5+2.8(1+\log4)$

두 식을 빼면

$M_1-M_2=\log\dfrac{A_1}{A_2}-2.8$ 이다.

문제의 조건을 대입하면 $\log\dfrac{A_1}{A_2}=1.2+2.8=4$ 이다.

$\dfrac{A_1}{A_2}=10^4$ 이다.

14) [정답] ③ (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

선생님이 2 개의 볼펜을 가지는 경우는 다음과 같이 세 가지가 있다.

i) 선생님이 빨간 볼펜 2 자루를 갖는 경우

5 명의 학생들은 빨간 볼펜 2 자루, 파란 볼펜 3 자루를 나누어 갖는 경우이므로, 같은 것을 포함한 순열을 이용하여 구하면

$\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$ 이므로 10 가지이다.

ii) 선생님이 빨간 볼펜 1 자루, 파란 볼펜 1 자루를 갖는 경우

5 명의 학생들은 빨간 볼펜 3 자루, 파란 볼펜 2 자루를 나누어 갖는 경우

이므로, 같은 것을 포함한 순열을 이용하여 구하면

$\dfrac{5!}{3!\times 2!}=10$ 이므로 10 가지이다.

iii) 선생님이 파란 볼펜 2 자루를 갖는 경우

5 명의 학생들은 빨간 볼펜 4 자루, 파란 볼펜 1 자루를 나누어 갖는 경우 이므로, 같은 것을 포함한 순열을 이용하여 구하면

$\dfrac{5!}{4!\times 1!}=5$ 이므로 5 가지이다.

따라서 모든 경우의 수는 합의 법칙에 의해 25 가지이다.

15) [정답] ⑤ (출제자 : 16 김대현)

[출제의도] 정적분의 정의를 이용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(1,3)$ 에서의 접선의 방정식 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ 을 정리하면 $y=x+2$ 이다. 그러므로 $g(x)=x+2$ 이다.

한편 정적분의 정의로부터

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-g\left(\frac{2k}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-g\left(\frac{2k}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(x^2-2x+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{3}$$

따라서 답은 ⑤ $\dfrac{1}{3}$ 이다.

16) [정답] ④ (출제자 : 11 양종현)

[출제의도] 신뢰구간의 대칭성을 이용하여 표본비율, 표본의 크기 및 신뢰구간의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

먼저 $n\geq 320$ 임은 분명하다. 따라서 표본의 크기가 충분히 크므로 표본비율로 모비율의 범위를 추정할 수 있다.

n 명의 표본에 대한 표본비율을 $\hat{p}$ 이라고 하자. 그러면 모비율 p 에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간은

$\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\leq p\leq\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 이므로 $a+b=2\hat{p}$ 이다.

문제에서 $a+b=1.6$ 이라 하였으므로 $\hat{p}=0.8$ 이다. 표본비율의 정의에 의해 $\hat{p}=\dfrac{320}{n}=0.8$ 이므로 $n=400$ 이다. 따라서

$b-a=2\times1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=2\times1.96\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{400}}=0.0784$ 이다.

17) [정답] ⑤ (출제자 : 13 오인수)

[출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 등식을 증명할 수 있는가?

[해설]

(i) $n=1$ 일 때, $a_1=1=1\times1!$ 이고

$n=2$ 일 때, $a_2=4=2\times2!$ 이므로

$(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 2)$ 일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_k=k\times k!$

이다.

$$a_{k+1}=\frac{(a_k)^2}{a_{k-1}}+\left(\frac{k^2-k-1}{k^2-k}\right)\times a_k$$

$$=\frac{(k\times k!)^2}{(k-1)\times(k-1)!}+\left(\frac{k^2-k-1}{k^2-k}\right)\times k\times k!$$

$$=\boxed{\frac{k^3}{k-1}}\times k!+\left(\frac{k^2-k-1}{k-1}\right)\times k!$$

$$=\frac{k^3+k^2-k-1}{k-1}\times k!$$

$$=\boxed{k^2+2k+1}\times k!$$

$$=(k+1)\times(k+1)!$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여

모든 자연수 n 에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $f(k)=\dfrac{k^3}{k-1}$ 이고, $g(k)=k^2+2k+1$ 이다.

$f(10)=\dfrac{1000}{9}$, $g(9)=100$ 이므로

$\therefore\ \dfrac{f(10)}{g(9)}=\dfrac{10}{9}$

18) [정답] ③ (출제자 : 15 최봉규)

[출제의도] 정규분포에서 표본평균, 표본분산, 정규분포 곡선의 그래프를 이해하고, 표본정규분포를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

확률변수 $\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \sigma_1^{\,2}\right)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이므로

정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \left(\dfrac{\sigma_1}{3}\right)^2\right)$ 을 따르고

확률변수 $\overline{Y}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \sigma_2^{\,2}\right)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 25 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이므로

정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \left(\dfrac{\sigma_2}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \left(\dfrac{\sigma_2}{5}\right)^2\right)$ 을 따르는 확률분포 $\overline{Y}$ 의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=100$ 에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이므로

$\displaystyle\int_{50}^{100}g(x)\,dx=\int_{100}^{150}g(x)\,dx$ 이다.

위 식을 준식에 대입하면 $\displaystyle\int_{100}^{150}f(x)\,dx=\int_{100}^{150}g(x)\,dx$ 이다.

$\int_{100}^{150} f(x)dx$ 의 값은 $\overline{X}$ 가 $100 \le \overline{X} \le 150$ 인 확률

$\mathrm{P}(100 \le \overline{X} \le 150)$ 이므로 표준화하면 $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{50}{\frac{\sigma_1}{3}}\right)$ 이다.

마찬가지로 $\int_{100}^{150} g(x)dx$ 의 값은 $\overline{Y}$ 가 $100 \le \overline{Y} \le 150$ 인 확률

$\mathrm{P}(100 \le \overline{Y} \le 150)$ 이므로 표준화하면 $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{50}{\frac{\sigma_2}{5}}\right)$ 이다.

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{50}{\frac{\sigma_1}{3}}\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{50}{\frac{\sigma_2}{5}}\right)$ 이므로 $\dfrac{\sigma_1}{3} = \dfrac{\sigma_2}{5}$ 이다. ⋯ ①

문제에서 $\mathrm{P}(\overline{X} \le 102) = 0.8413$ 이라 했으므로

$\mathrm{P}(\overline{X} \le 102) = \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{102-100}{\frac{\sigma_1}{3}}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \le 0) + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{2}{\frac{\sigma_1}{3}}\right)$

$= 0.5 + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{6}{\sigma_1}\right) = 0.8413$ 이므로

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{6}{\sigma_1}\right) = 0.3413$, $\dfrac{6}{\sigma_1} = 1$ 이므로 $\sigma_1 = 6$ 이다.

또한 식 ①으로부터 $\sigma_2 = 10$ 이다.

$\sigma_1 + \sigma_2 = 16$ 이므로 답은 ③ 16 이다.

19) [정답] ④ (출제자 : 12 황성문)

[출제의도] 조건부 확률을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

양궁 경기를 시청한 학생 600 명 중 여학생은 200 명이므로 양궁 경기를 시청한 남학생은 400 명이다.

따라서 아래와 같이 양궁 경기와 배구 경기의 시청 여부에 대한 표를 만들 수 있다.

	양궁 경기	배구 경기
남자	400	r
여자	200	200

양궁 경기와 배구 경기 모두를 시청한 남학생 수를 p, 여학생 수를 q라 하자. 양궁 경기와 배구 경기 모두를 시청한 학생들 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 이 학생이 여학생일 확률이 $\dfrac{1}{3}$ 이므로

$\dfrac{q}{p+q} = \dfrac{1}{3}$ 이다. ⋯ ①

한편 여학생이 300 명이므로 양궁 경기와 배구 경기 모두를 관람한 여학생의 수는 $200+200-300=100$ (명)이다.

따라서 $q=100$ 이고, 이를 식 ①에 대입하면 $p=200$ 이다.

즉, 양궁 경기와 배구 경기 모두를 시청한 남학생은 200 명이다.

배구 경기를 시청한 남학생 수를 r 이라고 하면

$400 + r - 200 = 500$ 이므로

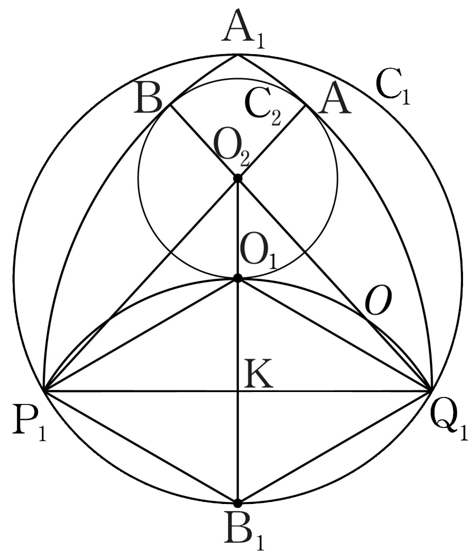
$r = 300$ 이다.

따라서 답은 ④ 300 이다.

20) [정답] ① (출제자 : 15 이상민)

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 주어진 등비급수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]



원 C_1 의 중심을 O_1 이라 하면

$\overline{O_1P_1} = \overline{O_1B_1} = \overline{P_1B_1} = \overline{B_1Q_1} = \overline{O_1Q_1} = 2$ 이므로 삼각형 $O_1P_1B_1$, $O_1B_1Q_1$은 정삼각형이다. 그러므로 $\overline{P_1Q_1}$의 길이는 정삼각형의 높이의 두 배인 $2\sqrt{3}$ 이다.

원 C_2 의 중심을 O_2라 하고 반지름의 길이를 r 이라 하자 P_1, Q_1을 중심으로 하는 원과 원 C_2 와의 접점을 각각 A, B라 하면

$\overline{P_1A} = \overline{Q_1B} = \overline{P_1Q_1} = 2\sqrt{3}$ 이고 다음 그림과 같이

$\overline{P_1O_2} = \overline{Q_1O_2} = 2\sqrt{3} - r$ 이다. 삼각형 $O_2P_1Q_1$은 이등변 삼각형이고 $\overline{P_1Q_1}$은 원 C_1 의 현이므로 점 O_1에서 $\overline{P_1Q_1}$에 내린 수선은 원 C_1 의 중심을 지난다. 점 O_1에서 $\overline{P_1Q_1}$에 내린 수선의 발을 K라 하면 그림과 같이 피타고라스 정리를 사용하여

$\overline{KQ_1}^2 + \overline{KO_2}^2 = \overline{O_2Q_1}^2$

$\sqrt{3}^2 + (1+r)^2 = (2\sqrt{3}-r)^2$

$r = \dfrac{4}{1+2\sqrt{3}}$

즉 원 C_1 의 반지름이 2 이므로 원 C_n 의 둘레의 길이 l_n 는 초항이 4π 이고 공비가 $\dfrac{2}{1+2\sqrt{3}}$ 인 등비수열이다. 무한급수의 합 공식에 의하여

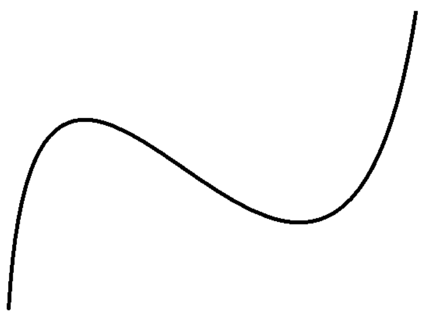
$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{4\pi}{1-\frac{2}{1+2\sqrt{3}}} = \frac{52+16\sqrt{3}}{11}\pi$$

21) [정답] ② (출제자 : 11 양종현)

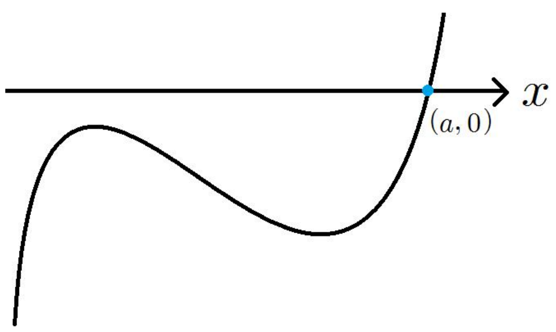
[출제의도] 삼차함수의 개형과 새로 주어진 함수 및 함수의 연속을 이용하여 그래프의 개형을 추론할 수 있는가?

[해설] 컬러로 보세요!!

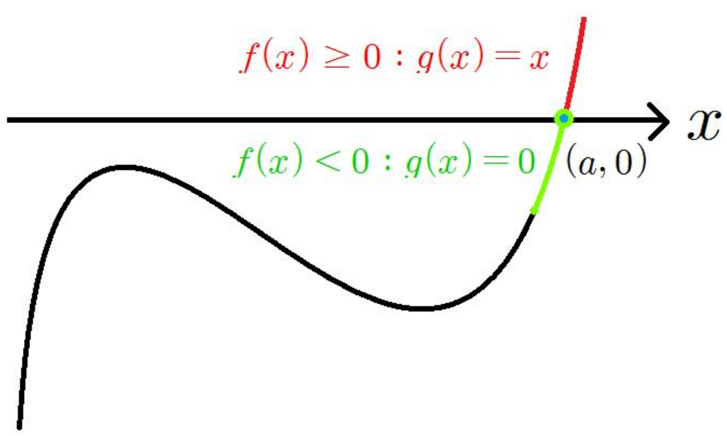
최고차항의 계수가 1 인 삼차함수가 극솟값을 가지므로 극댓값도 가져야한다. 따라서 삼차함수의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 는 $f(x)$ 가 0 보다 크거나 같은지, 아니면 0 보다 작은지에 따라 결정되므로 곡선 $y=f(x)$ 가 $y=0$ 과 만나는 지점을 먼저 찾아야 한다. 즉, $y=f(x)$ 의 그래프에 대한 x 축의 위치를 먼저 결정시켜야 한다. 그런데 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 $f(x)$ 에 강한 조건이 하나 걸려야한다. $f(x)$ 는 삼차함수이기 때문에 치역이 실수 전체의 집합이다. 따라서 $f(x)\geq 0$ 인 x 와 $f(x)<0$ 인 x 가 항상 존재한다. 여기서 $f(x)\geq 0$ 과 $f(x)<0$ 으로 나뉘는 x 는 단 하나만 존재해야하며, 또한 그 값은 $x=0$ 이어야만 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 이해를 돕기 위해 다음 그림을 살펴보자.

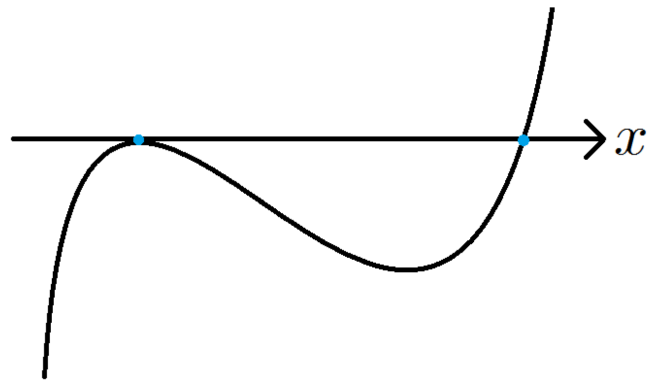


x 축을 기준으로 윗부분($f(x)\geq 0$) 과 아랫부분($f(x)<0$) 으로 나뉘는 x 값을 파란 점으로 나타내었다. 아래 그림처럼 파란 점 $(a,\,0)$ 에서 $a\neq 0$ 이라면 $g(a)=a$ 이므로 $g(a)\neq 0$ 이다. 하지만 $\lim\limits_{x\to a-} g(x)=0$ 이기 때문에 $x=a$ 에서 불연속이다.

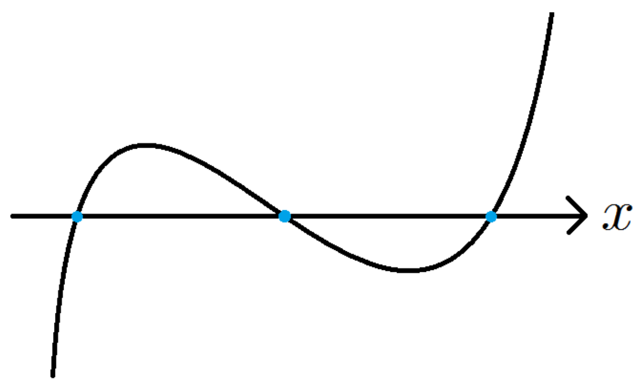


(파란 점$(a,\,0)$ 은 $f(x)\geq 0$ 이기 때문에 빨간 곡선에 포함된다.)

따라서 x 축을 기준으로 위, 아래로 나뉘는 부분이 있다면 그 값은 반드시 0 이어야만 $g(x)$ 가 연속이다. 만약 아래 그림처럼 파란 점이 2 개 있다면 두 점의 x 좌표가 모두 0 일수는 없으므로 반드시 불연속인 점이 존재한다.

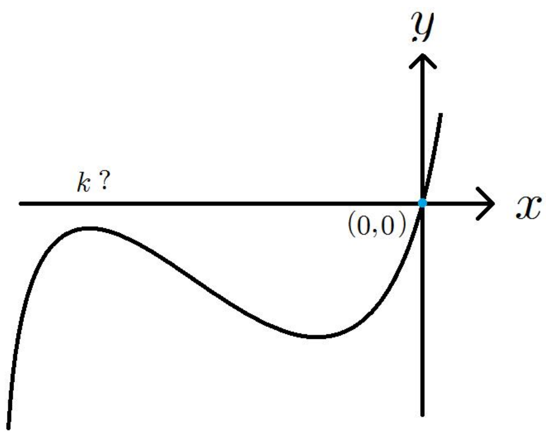


이는 3 개에서도 마찬가지이다.



따라서 파란 점은 유일해야한다.

i) ($f(x)$ 의 극댓값)<0 인 경우



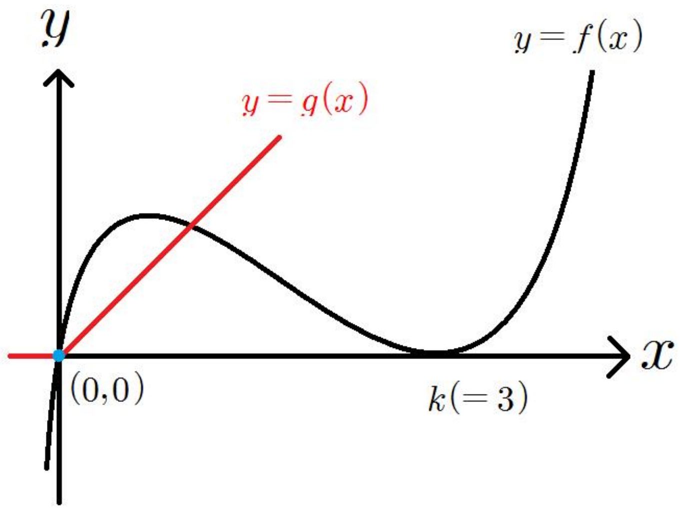
실수 전체의 집합에서 연속이지만 $f(k)=f(0)=0$ 이면서 0 이 아닌 실수 k 는 존재하지 않으므로 불가능하다.

cf) $x=3$에서 극솟값을 가져야하기 때문에 불가능하기도 하다.

ii) ($f(x)$ 의 극댓값)$=0$ 인 경우
파란 점이 2 개이기 때문에 불가능하다.

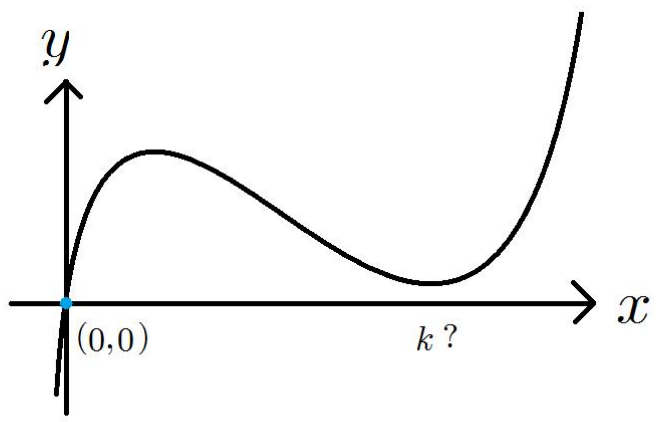
iii) ($f(x)$ 의 극솟값)$<0<$ ($f(x)$ 의 극댓값)인 경우
파란 점이 3 개이기 때문에 불가능하다.

iv) ($f(x)$ 의 극솟값)$=0$ 인 경우



위와 같은 경우만이 가능하며, $f(k)=f(0)=0$ 인 실수 $k=3$ 이 존재하여 가능하다. 이것이 이 문제에서 요구하는 함수의 그래프이다.
(참고 : $x=3$ 의 좌우에서는 $f(x)<0$ 인 구간이 없기 때문에 $(3,0)$ 은 파란 점이 될 수 없다.)

v) ($f(x)$ 의 극솟값)>0 인 경우



위와 같은 경우만이 가능하지만, $f(k)=f(0)=0$ 이면서 0 이 아닌 실수 k 는 존재하지 않기 때문에 불가능하다.

∴ iv) 에서의 함수는 $f(x)=x(x-3)^2$ 이므로 $f(4)=4$ 이다.

22) [정답] 4 (출제자 : 16 송세령)
[출제의도] 다항함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]
$f'(x)=3x^2-4x$ 이므로 $f'(2)=12-8=4$ 이다.

23) [정답] 120 (출제자 : 16 송세령)
[출제의도] 이항분포의 분산을 계산할 수 있는가?

[해설]
$\mathrm{V}(5X+3)=25\,\mathrm{V}(X)=25\times20\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=120$ 이다.

24) [정답] 20 (출제자 : 15 최봉규)
[출제의도] 점대칭을 이용하여 유리함수 문제를 해결할 수 있는가?

[해설1]
먼저 함수 $f(x)=\dfrac{4x-8}{x-a}$ 을 정리하면,

$f(x)=4+\dfrac{4a-8}{x-a}$ 이다.

이 함수의 그래프는 함수 $y=\dfrac{4a-8}{x}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행 이동한 것이다.
$y=\dfrac{4a-8}{x}$ 은 점$(0, 0)$ 에 대해 대칭인 함수이므로
$f(x)=4+\dfrac{4a-8}{x-a}$ 은
점$(0, 0)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행 이동한 점$(a, 4)$ 에 대해 대칭이다.
따라서 $a=5$, $b=4$ 이다.
$\therefore 5\times4=20$

[해설2]
먼저 함수 $f(x)=\dfrac{4x-8}{x-a}$ 을 정리하면,

$f(x)=4+\dfrac{4a-8}{x-a}$ 이다.

이 함수의 그래프의 점근선은 $x=a$ 와 $y=4$ 이다.
한편, 유리함수는 두 점근선의 교점에 대해 대칭이므로
함수 $f(x)=4+\dfrac{4a-8}{x-a}$ 의 그래프는 $(a, 4)$ 에 대해 대칭이다.
$(a, 4)=(5, b)$ 이므로 $a=5$, $b=4$ 이다.
$\therefore 5\times4=20$

25) [정답] 6 (출제자 : 16 이희원)
[출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
문제의 조건에 의하면 B 열 1 번에 앉은 사람은 A 열 1 번에 앉은 사람보다 커야하고, B 열 2 번에 앉은 사람은 A 열 2 번에 앉은 사람보다 커야한다. 즉, 같은 i $(i=1, 2)$ 번 앉는 사람끼리는 이미 키에 의해 순서가 정해져 있으므로 4 명을 2 명씩 2 그룹으로 나누어 각 그룹을 1, 2 번에 배정만 하면 된다.

4 명을 2 명씩 2 그룹으로 나누는 경우의 수는
$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2}{2!}=3$ 이고,

2 그룹을 i $(i=1, 2)$ 번에 배정하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{P}_2=2!=2$ 이다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는
$3\times2=6$ (가지)이다.

26) [정답] 20 (출제자 : 12 황성문)

[출제의도] 기울기가 주어진 접선의 방정식에 대한 접점의 좌표를 구할 수 있는가?

[해설]

두 접선 l_1, l_2가 직선 $y=\frac{1}{9}x$와 수직이므로 두 접선의 기울기는 -9이다.

$f'(x)=3x^2-18x+15=-9$ 로부터

$3x^2-18x+24=0$

$3(x-2)(x-4)=0$ 이므로 $x=2$ 또는 $x=4$이다.

A와 B는 서로 다른 두 점이라 하였으므로 $a=2$, $b=4$라 하여도 일반성을 잃지 않는다.

따라서 $a^2+b^2=2^2+4^2=4+16=20$ 이므로 답은 20이다.

27) [정답] 7 (출제자 : 15 유정훈)

[출제의도] 두 함수를 곱하였을 때, 그 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

[해설]

$x=k$에서 함수 $h(x)$가 연속이라는 것은

1. 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 정의되고
2. 함수 $h(x)$의 $x=k$에서 좌극한값과 우극한값이 같으며
3. 함수 $h(x)$의 $x=k$에서의 함숫값과, 극한값이 같아야한다,

함수 $f(x)$는 $x\neq 2$인 모든 실수에서 연속이고, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 곱한 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로 다음과 같은 두 가지 경우 중 하나를 만족시켜야 한다.

i) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속인 경우

$f(2)=\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)$ 이므로

$5=2a-3=5$ 로부터 $a=4$이다.

ii) $g(2)=0$ 인 경우 (※ 보조정리 참고)

$g(2)=(2-a)(2-2a)=0$ 이므로 $a=1$ 또는 $a=2$이다.

i)과 ii)로부터 모든 정수 a의 값의 합은 7이다. 따라서 답은 7이다.

[보조정리]

$g(2)=0$ 이면 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 는 $x=2$에서 연속이다.

증명)

$\lim_{x\to 2-}h(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2-}(ax-3)g(x)$

$=\lim_{x\to 2-}(ax-3)\lim_{x\to 2-}g(x)$ ($\because$ 각각의 극한값이 존재하므로)

$=(2a-3)g(2)$ ($\because$ $g(x)$는 $x=2$에서 연속)

$=0$ ($\because$ $g(2)=0$)

$\lim_{x\to 2+}h(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+}(3x-1)g(x)$

$=\lim_{x\to 2+}(3x-1)\lim_{x\to 2+}g(x)$ ($\because$ 각각의 극한값이 존재하므로)

$=5g(2)$ ($\because$ $g(x)$는 $x=2$에서 연속)

$=0$ ($\because$ $g(2)=0$)

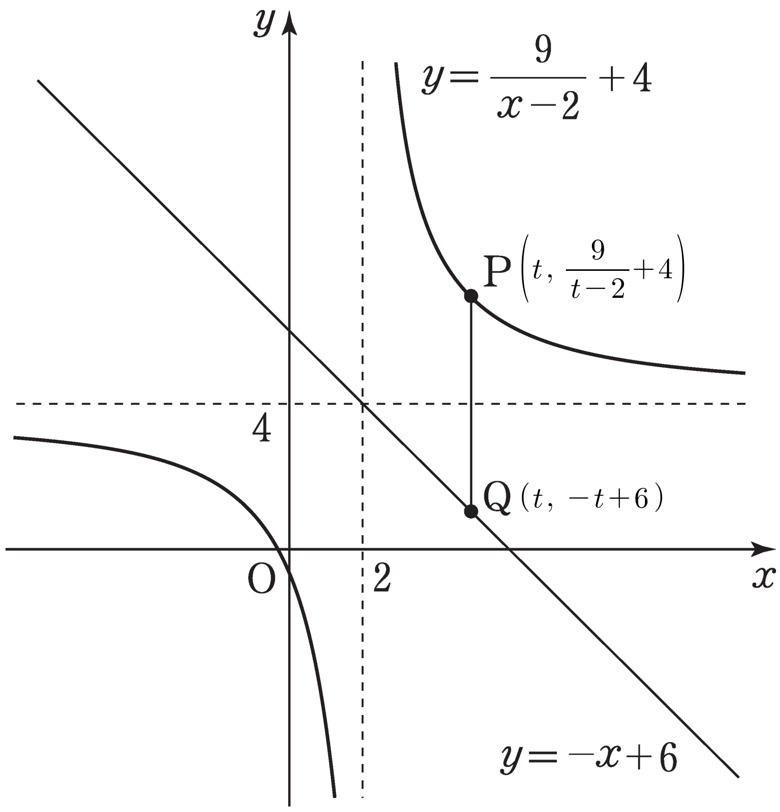
$h(2)=f(2)g(2)=0$ ($\because$ $g(2)=0$)

$\lim_{x\to 2-}h(x)=\lim_{x\to 2+}h(x)=h(2)=0$ 이므로 $h(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

28) [정답] 6 (출제자 : 16 이희원)

[출제의도] 산술-기하 평균을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는가?

[해설]



점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{9}{t-2}+4\right)$라 하면, 점 Q는 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선과 함수 $y=-x+6$의 그래프와의 교점이므로 점 P와 점 Q의 x좌표가 같다.

따라서 점 Q의 좌표는 $(t,\ -t+6)$이다.

선분 PQ의 길이는 점 P의 y좌표와 점 Q의 y좌표의 차와 같다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left|\left(\frac{9}{t-2}+4\right)-(-t+6)\right|=\left|t-2+\frac{9}{t-2}\right|$

점 P가 제 1사분면 위의 점이고, 주어진 유리함수의 점근선이 $x=2$이므로 $t>2$이다.

(점근선을 기준으로 왼쪽 아래의 그래프는 제 1사분면을 지나지 않으므로 오른쪽 위의 그래프만 고려하도록 한다.)

$t-2>0$ 이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\left|t-2+\frac{9}{t-2}\right|=t-2+\frac{9}{t-2}$ 이다.

산술-기하 평균에 의해

$(t-2)+\frac{9}{t-2}\geq 2\sqrt{(t-2)\times\frac{9}{t-2}}=6$ 이고 등호는

$t-2=\frac{9}{t-2}$ 일 때, 즉 $t=5$일 때 성립한다. ($\because t>2$)

선분 PQ의 길이의 최솟값은 6이므로 답은 6이다.

29) [정답] 12　(출제자 : 15 최봉규)

[출제의도] 새로운 극대의 정의와 정적분을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

h가 양수일 때 삼차함수 $f(x)$가 어떤 열린구간 $(a-h,\ a+h)$ 에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$ 을 만족시킨다는 것은 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는다는 의미이다.

극값의 좌표를 알아보기 위해 $f(x)$를 미분하면

$f'(x)=3x^2-6bx+(3b^2-3)=3(x^2-2bx+b^2-1)$

$=3\{x-(b-1)\}\{x-(b+1)\}$

이를 이용하여 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$b-1$	$\cdots$	$b+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x=b-1$에서 극대이고 $x=b+1$에서 극소이므로 $a=b-1$ 이다.

따라서 $\int_a^{b+1} f(x-b)\,dx = \int_{b-1}^{b+1} f(x-b)\,dx$ 이고

x축의 양의 방향으로 $-b$만큼 평행이동하면

$\int_{b-1}^{b+1} f(x-b)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -2$ 이다.

따라서 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} \{x^3-3bx^2+(3b^2-3)x+3\}\,dx = \int_{-1}^{1} (-3bx^2+3)\,dx$

$=2\int_0^1 (-3bx^2+3)\,dx = 2\left[-bx^3+3x\right]_0^1 = 2(-b+3) = -2$

그러므로 $b=4$, $a=b-1=3$ 이다. 답은 $ab=12$ 이다.

30) [정답] 120　(출제자 : 11 양종현)

[출제의도]

1. 주어진 명제와 조건제시법으로 정의된 집합을 정확히 이해할 수 있는가?
2. 주어진 합성함수의 조건을 해석하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

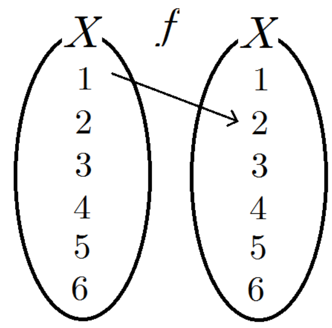
조건의 해석이 쉽지 않고, 복합적으로 연계되어있으므로 하나씩 예시를 찾아가며 문제에서 원하는 함수들을 만들어나가는 전략을 세워야한다.

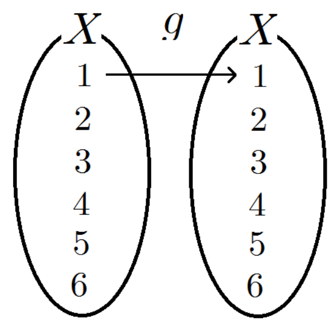
(가) 조건과 (다) 조건에 $n=1$ 을 대입하면 다음과 같다.

(가) $f(1) \ne 1$ 이면 $g(1)=1$ 이다.

(다) $(f \circ f)(1)=(g \circ g)(1)=1$

예시로 $f(1)=2$ 라고 가정하자.





지금의 상태로는 뚜렷한 결론이 보이지 않지만 두 함수 f와 g의 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, $g(1)$, $g(2)$가 서로 종속되어있음을 예상해볼 수 있다. 한편 (나)의 조건을 살펴보면

(나) $\{n | f(n) \ne n,\ n \in X\} \cup \{m | g(m) \ne m,\ m \in X\} = X$

에서 $f(n) \ne n$ 뿐만 아니라 $g(m) \ne m$ 도 고려해야함을 알 수 있다.

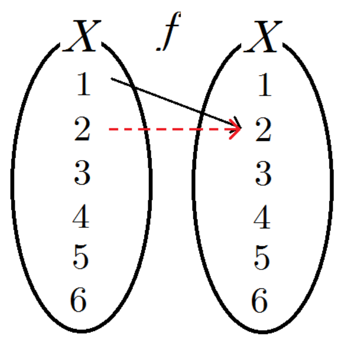
따라서 (가) 조건에 대우명제를 사용해야겠다는 생각을 할 수 있다.

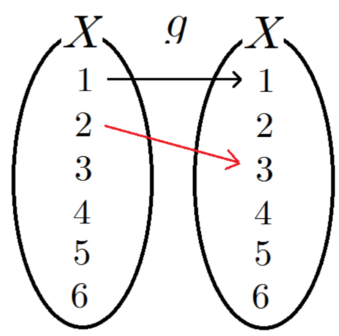
(가-2) $g(n) \ne n$ 이면 $f(n)=n$ 이다.

위 조건에 $n=2$ 를 대입하면 다음과 같다.

(가-2) $g(2) \ne 2$ 이면 $f(2)=2$ 이다.

함수 g는 일대일대응이므로 $g(2)=1$ 은 불가능하다. $g(2) \ne 2$ 일 경우 어떤 일이 일어나는지 살펴보기 위해 $g(2)=3$ 이라고 가정해보자.





$g(2)=3$ 이라 가정할 경우 (가-2)의 조건

(가-2) $g(2) \ne 2$ 이면 $f(2)=2$ 이다.

에 의해서 $f(2)=2$ 이어야 하지만, 이미 $f(1)=2$ 이고

f가 일대일대응이므로 모순이 일어난다.

즉, $g(2)$는 선택의 여지가 없이 $g(2)=2$ 이어야한다.

이제 $g(2)$는 고정되어 있으므로 $f(2)$ 값을 살펴볼 차례이다.

이번에는 $f(2)=3$ 이라고 가정해보면 조건 (다)

(다) $(f \circ f)(1)=(g \circ g)(1)=1$

에 의해 $f(f(1))=1$ 이어야 하지만, $f(f(1))=f(2)=3$ 이 되어서 모순이다.

따라서 $f(2)$ 역시 선택의 여지가 없이 $f(2)=1$ 이어야한다.

결론 ① : $f(1)=2$ 이면 $f(2)=1$, $g(1)=1$, $g(2)=2$ 이다.

<u>**확장된 결론 ① : 함수 f 에서 자기 자신으로 가지 않는 원소는 두 개씩 묶여야 한다.**</u>

또한 두 조건

(가) $f(n)\neq n$ 이면 $g(n)=n$ 이다.

(가−2) $g(n)\neq n$ 이면 $f(n)=n$ 이다.

에 의해, 1 이 자기 자신으로 가지 않는 경우는 f 와 g 둘 중 많아야 하나의 함수(혹은 둘 다 가지 않아도 된다.)에서만 성립한다.

예를 들어, $f(1)\neq 1$ 이면 $g(1)=1$ 이어야하고, $g(1)\neq 1$ 이면 $f(1)=1$ 이어야 하므로, $f(1)\neq 1$ 이면서 $g(1)\neq 1$ 인 경우는 없다는 의미이다. 다만, $f(1)=g(1)=1$ 의 경우는 아직까진 가능하다.

<u>**확장된 결론 ② : 집합 X의 각각의 원소는 자기 자신으로 가지 않을 때, f 또는 g 둘 중 많아야 한 곳에서만 가능하다.**</u>

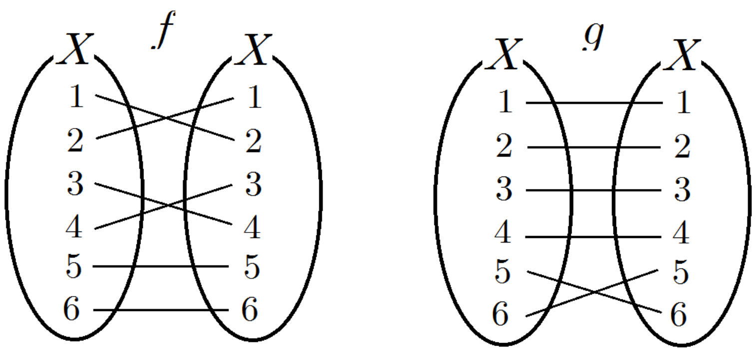
한편 다시 조건 (나)로 돌아가보면,

$\{n|f(n)\neq n, n\in X\}\cup\{m|g(m)\neq m, m\in X\}=X$

는 f 에서 자기 자신으로 가지 않는 원소들의 집합과 g 에서 자기 자신으로 가지 않는 원소들의 집합의 합집합이 X임을 의미한다. 만약 $f(1)=g(1)=1$ 이라면 좌변의 집합에서 $x=1$ 이 비어서 모순이게 된다. 즉, 모든 원소들은 f 또는 g 둘 중 적어도 한 곳에서 자기 자신으로 가지 말아야 한다.

확장된 결론 ③ : 집합 X의 모든 원소는 f 또는 g 둘 중 적어도 한 곳에서는 자기 자신으로 가지 말아야 한다.

이를 종합해보면 다음과 같은 가능한 예시를 생각해볼 수 있다.

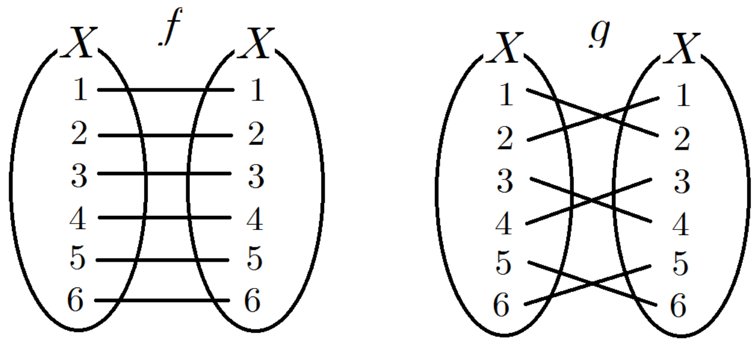


<u>**총결론 : 집합 X를 각각 2 개의 원소를 갖는 세 집합으로 분할한 후에 f 또는 g에 분배해야 한다.**</u>

둘 중 한쪽이 항등함수여도 상관없다는 것을 쉽게 알 수 있고, 총 4 가지의 경우로 나눌 수 있다.

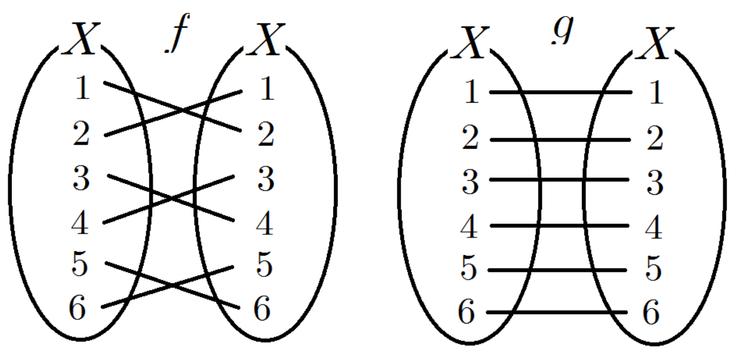
(여기서부터 별해 존재)

i) f 가 항등함수, g 는 서로 다 섞이는 함수



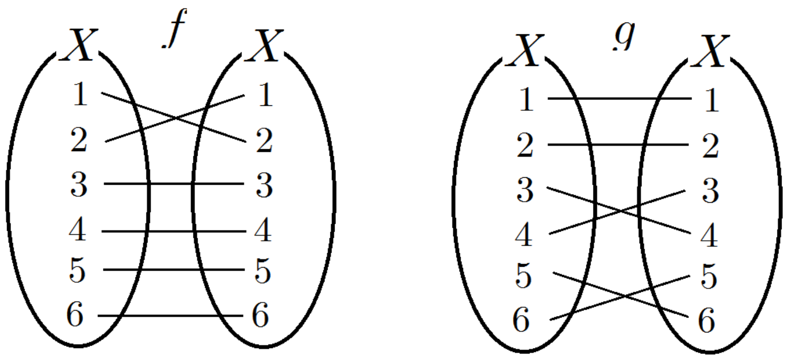
위 그림과 같이 집합 X의 원소가 함수 g 에서 2 개, 2 개, 2 개씩 섞인다. 따라서 6 개의 원소를 각각 2 개의 원소를 가지는 집합 3 개로 분할하는 경우이므로 ${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}$ 가지의 경우가 있다. 즉, 15 가지의 경우가 있다.

ii) f 는 서로 다 섞이는 함수, g 는 항등함수



i 의 경우로 환원되며 같은 경우의 수 15 가지를 가진다.

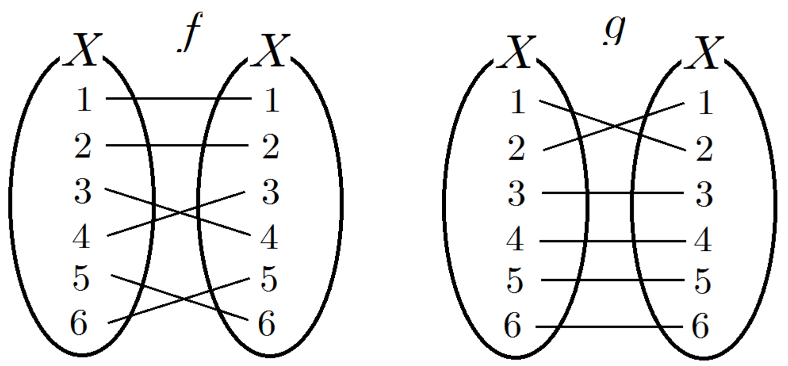
iii) f 는 2 개 섞이고 g 는 4 개 섞이는 함수



f 에서 섞일 것들을 먼저 2 개 선택해주는 ${}_6C_2$ 가지의 경우가 있다. g 는 $2+2$ 의 분할 밖에는 성립하지 않으므로 ${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}$ 가지의 경우가 있다.

즉, ${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=45$ 가지의 경우가 있다.

iv) f는 4개 섞이고 g는 2개 섞이는 함수



iii의 경우로 환원되며 같은 경우의 수 45가지를 가진다.

i에서 iv는 각각 15, 15, 45, 45,가지의 경우이므로 총 120가지의 경우의 순서쌍 (f, g)가 존재한다.

[별해]
문제의 조건을 모두 이해했다면 4가지 경우로 나눌 필요는 없다. 집합 X는 각각 2개의 원소를 갖는 세 집합으로 분할해야하고, 각각은 f쪽으로 갈지, g쪽으로 갈지만 결정해주면 되므로

${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \times 2^3 = 120$ 이 답이다.

[출제자의 말]
본 문항은 '현대대수학'에서 대칭군(symmetric group) S_6을 고교과정으로 낮추어 물어보고 있는 문항입니다. (가) 조건은 서로소(disjoint)인 두 치환을, (다) 조건은 두 치환이 각각 호환(transposition)의 곱(또는 항등치환)으로 이루어져있음을 의미합니다. 대학교 과정을 알아야한다는 의미가 아니라, 지수로그의 개수 세기 대신 집합·함수에서 수학적 의미를 갖는 개수 세기 문항을 출제했다는 사실을 알려드리고 싶었습니다.
또한 개수 세기 유형의 조건이 복합적으로 연계되어있는 경우, 어떤 방법으로 문제를 해결해나가야 하는지, 이 문제의 발문과 풀이의 필연성은 어떠한지를 해설에 자세히 적어봤습니다.
(ps. 대칭군의 서로소와 호환을 안다고 하더라도, 문제 풀이의 과정과 속도에는 한 치의 영향도 주지 않습니다.)

[같이 풀면 좋은 문제]

10. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f는 일대일대응이다.
(나) 집합 X의 모든 원소 a에 대하여 $f(a) \neq a$이다.

$f(1) + f(4) = 7$일 때, $f(1) + f^{-1}(1)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2016학년도 7월 전국연합학력평가 수학 나형 10번