제 2 교시

2017학년도 대학수학능력시험 모의평가 문제지

수학 영역(나 형)

성명	

수험번호										

○ 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

돌이켜보니 너는 바다였을까, 숨쉬기조차 힘이 들더라

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 유형('가'형 / '나'형), 답을 정확히 표기하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

Epsilon

2016년 8월 13일 시행
Epsilon 모의고사 1회 (나형)

출제, 검토 및 편집

성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

11학번 : 양종현
12학번 : 황성문
13학번 : 김찬호 오인수 이강산
14학번 : 고정민 김민지 이다운 임현우
15학번 : 오민지 유정훈 이상민 최문영 최봉규
16학번 : 김대현 김동균 김민지 송세령 안성준 이준희 이희원

수학 영역(나 형)

Epsilon

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. $2\times 8^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

2. ${}_5C_2$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=1,\quad a_5=16$$

일 때, $2a_3$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

5. 이차함수 $f(x)=x^2+ax+3$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 6이 되도록 하는 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p : x^2-3x-4 \leq 0$, $q : x > n$

p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되는 자연수 n의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

7. $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2의 계수가 24일 때, a^2의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

8. 전체집합 $U=\{x|x$는 50 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x|x$는 5로 나누었을 때 나머지가 3인 수$\}$
$B=\{x|x$는 홀수$\}$

에 대하여 $n(A-B)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 위치는 $f(t)=t^3-3t^2$이다. 점 P가 원점을 출발한 후에 다시 원점에 도달하는 순간의 속력은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

10. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C \cup B^C)=\frac{7}{12}, \quad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A|B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

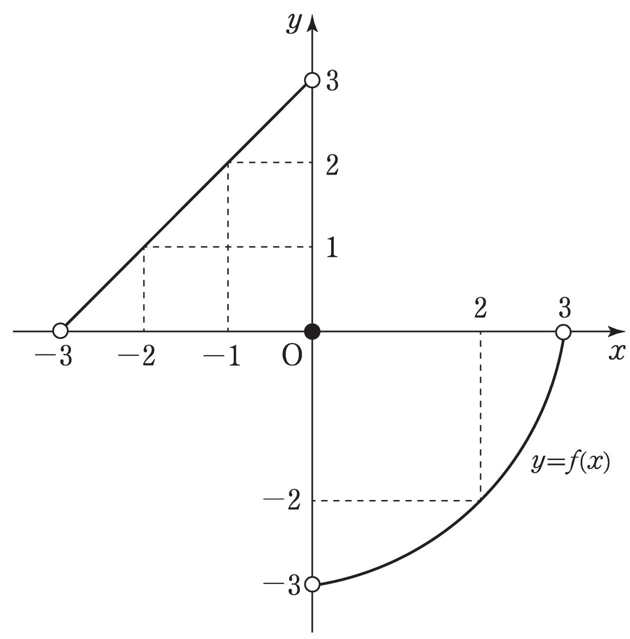
11. 이항분포 $\mathrm{B}(6, p)$를 따르는 확률변수 X가

$$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=2)$$

를 만족시킬 때, 상수 p $(0<p<1)$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

12. 집합 $X=\{x \mid -3<x<3\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f: X \to X$가 있고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) + \lim\limits_{x \to 2+} f^{-1}(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

13. 지진파로 인해 발생한 총에너지의 크기의 객관적 지수를 지진의 규모라고 하고 관측소에서 진앙까지의 거리를 진앙거리라고 한다. 진앙거리가 d(㎞)일 때, 지진의 규모 M과 진폭 A(㎛)사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$M = \log A - 2.5 + 2.8 \log d$$

진앙거리가 4㎞인 지점에서 규모가 M_1인 지진의 진폭이 A_1㎛이었고, 진앙거리가 40㎞인 지점에서 규모가 M_2인 지진의 진폭이 A_2㎛이었다. $M_1 - M_2 = 1.2$일 때, $\frac{A_1}{A_2}$의 값은? [3점]

① 10 ② 10^2 ③ 10^3 ④ 10^4 ⑤ 10^5

14. 크기와 모양이 각각 같은 빨간 볼펜 4자루와 파란 볼펜 3자루가 있다. 담임 선생님은 볼펜 2자루를, 5명의 학생들은 각각 볼펜 1자루를 나누어 갖는다고 할 때, 담임 선생님과 학생 총 6명이 볼펜을 남김없이 나누어 갖는 경우의 수는? [4점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

15. 함수 $f(x)=x^2-x+3$의 그래프 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-g\left(\frac{2k}{n}\right)\right\}$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

16. 어느 국가는 A 모임의 회원국이다. 이 국가가 A 모임 탈퇴에 찬성하는 사람의 비율을 알아보기 위하여 이 국가의 국민 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 320명이 찬성하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 국가의 전체 국민 중 A 모임 탈퇴에 찬성하는 사람의 비율에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $[a, b]$이다. $a+b=1.6$일 때, $b-a$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

① 0.0432 ② 0.0588 ③ 0.0646 ④ 0.0784 ⑤ 0.0816

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_2=4$이고,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{n^2-n-1}{n^2-n} \quad (n\geq 2)$$

를 만족시킨다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=n\times n! \quad (n\geq 1) \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=1=1\times 1!$이고
> $n=2$일 때, $a_2=4=2\times 2!$이므로
> $(*)$이 성립한다.
> (ⅱ) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
> $a_k=k\times k!$이다.
> $n=k+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.
> $$a_{k+1}=\frac{(a_k)^2}{a_{k-1}}+\left(\frac{k^2-k-1}{k^2-k}\right)\times a_k$$
> $$=\frac{(k\times k!)^2}{(k-1)\times(k-1)!}+\left(\frac{k^2-k-1}{k^2-k}\right)\times k\times k!$$
> $$=\boxed{(가)}\times k!+\left(\frac{k^2-k-1}{k-1}\right)\times k!$$
> $$=\boxed{(나)}\times k!$$
> $$=(k+1)\times(k+1)!$$
> 따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
> 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{f(10)}{g(9)}$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{8}{9}$ ④ 1 ⑤ $\frac{10}{9}$

18. 정규분포 $\mathrm{N}(100, \sigma_1^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(100, \sigma_2^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 25인 표본의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. 확률변수 $\overline{X}$와 $\overline{Y}$의 확률밀도 함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 식 $\int_{100}^{150} f(t)dt=\int_{50}^{100} g(t)dt$가 성립한다. $\mathrm{P}(\overline{X}\leq 102)=0.8413$일 때, $\sigma_1+\sigma_2$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, σ_1와 σ_2는 양수이다.) [4점]

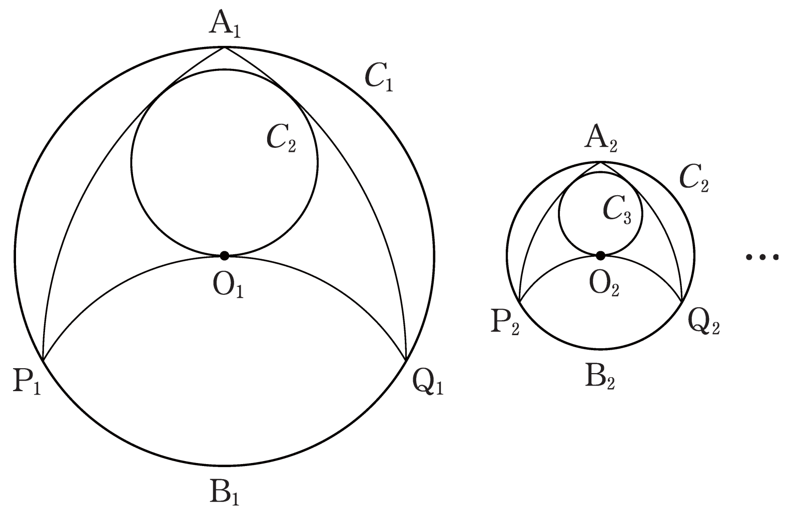
z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

19. 남학생 500명과 여학생 300명을 대상으로 리우 올림픽의 양궁 경기와 배구 경기의 시청 여부를 조사하였다. <u>그 결과 모든 학생이 두 경기 중 적어도 하나는 시청하였다.</u> 양궁 경기를 시청한 학생 600명 중 여학생은 200명이었으며, 배구 경기를 시청한 학생 중 여학생은 200명이었다. 양궁 경기와 배구 경기 모두를 시청한 학생들 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 이 학생이 여학생일 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다. 배구 경기를 시청한 남학생의 수는? [4점]

① 150 ② 200 ③ 250 ④ 300 ⑤ 350

20. 그림과 같이 점 O_1을 중심으로 하고 길이가 4인 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$을 지름으로 하는 원 C_1이 있다. 점 B_1을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1$을 반지름으로 하는 원이 원 C_1과 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라 하자. 원 C_1의 내부에 각각 두 점 P_1, Q_1을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$을 반지름으로 하는 원의 일부가 되도록 호 $\mathrm{A}_1\mathrm{Q}_1$과 호 $\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1$를 그리고, 세 개의 호 $\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$에 접하는 원을 C_2라 하자.
원 C_2의 중심을 O_2, 지름을 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$라 하자. 점 B_2을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_2\mathrm{B}_2$을 반지름으로 하는 원이 원 C_2와 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하자. 원 C_2의 내부에 각각 두 점 P_2, Q_2를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$를 반지름으로 하는 원의 일부가 되도록 호 $\mathrm{A}_2\mathrm{Q}_2$와 호 $\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2$를 그리고, 세 개의 호 $\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2$, $\mathrm{A}_2\mathrm{Q}_2$, $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$에 접하는 원을 C_3라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 원 C_n의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $\frac{(52+16\sqrt{3})\pi}{11}$ ② $\frac{(54+16\sqrt{3})\pi}{11}$ ③ $\frac{(52+18\sqrt{3})\pi}{11}$
④ $\frac{(54+18\sqrt{3})\pi}{11}$ ⑤ $\frac{(56+18\sqrt{3})\pi}{11}$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 갖는다. 함수

$$g(x)=\begin{cases} x & (f(x)\geq 0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 0이 아닌 어떤 실수 k에 대하여 $f(k)=f(0)$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 0 ② 4 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

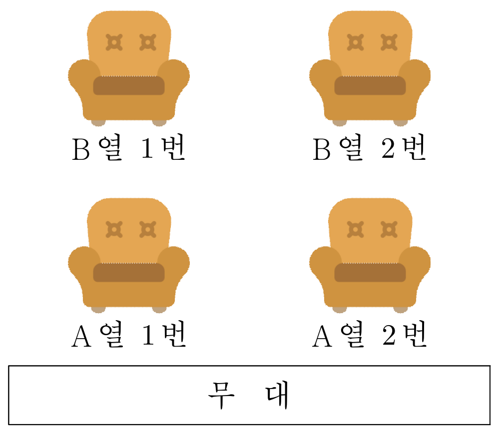
단답형

22. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+7$에 대하여, $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(20, \frac{2}{5}\right)$를 따를 때, $\mathrm{V}(5X+3)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $f(x)=\dfrac{4x-8}{x-a}$ 의 그래프가 점 $(5,\ b)$에 대해 대칭일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, $a \neq 2$) [3점]

25. 키가 서로 다른 4명의 학생들이 공연을 보려고 한다. 이 4명의 학생들이 각각 아래의 그림과 같은 4개의 좌석 중 한 좌석에 앉을 때, A열 i $(i=1,\ 2)$번에 앉은 사람의 키가 B열 i번에 앉은 사람의 키보다 작도록 좌석을 정하는 경우의 수를 구하시오. [3점]



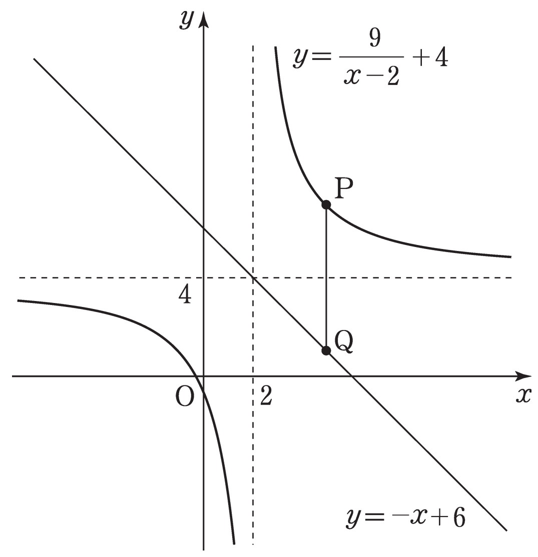
26. 좌표평면에서 함수 $f(x)=x^3-9x^2+15x+3$의 그래프 위에 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$가 있다. 두 점 A, B에서의 접선 l_1, l_2가 각각 직선 $y=\dfrac{1}{9}x$에 수직일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

27. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x \geq 2) \\ ax-3 & (x < 2) \end{cases}, \quad g(x)=(x-a)(x-2a)$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{9}{x-2}+4$의 그래프 위를 움직이는 점 P가 있다. y축에 평행하고 점 P를 지나는 직선이 함수 $y=-x+6$의 그래프와 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 구하시오. (단, 점 P는 제 1 사분면 위의 점이다.) [4점]



29. 삼차함수 $f(x)=x^3-3bx^2+(3b^2-3)x+3$가 어떤 열린구간 $(a-h,\ a+h)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(a)$를 만족시킨다. $\int_a^{b+1} f(x-b)dx=-2$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, h는 양수이다.) [4점]

30. 집합 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 일대일대응인 두 함수

$$f: X \to X,\quad g: X \to X$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(n)\ne n$이면 $g(n)=n$이다. $(n=1,2,\cdots,6)$
(나) $\{n \mid f(n)\ne n,\ n\in X\}\cup\{m \mid g(m)\ne m,\ m\in X\}=X$
(다) $(f\circ f)(n)=(g\circ g)(n)=n$이다. $(n=1,2,\cdots,6)$

모든 순서쌍 (f,g)의 개수를 구하시오. [4점]