

수학 자가진단 문제

(배점: 1번-10번 문제 각 3점, 11번-20번 문제 각 4점, 21번-25번 문제 각 6점)

1. 세 실수 a, b, c 에 대하여 다음 세 벡터가 서로 수직일 때, 실수 $a + b + c$ 의 값을 구하시오.

$$\vec{x} = (a, 1, 2), \vec{y} = (7, b, 4), \vec{z} = (1, 3, c)$$

- ① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

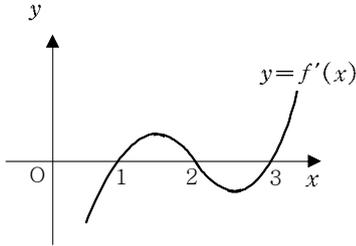
2. 구 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z + 10 = 0$ 위의 점에서 평면 $2x + y - 2z = 5$ 에 이르는 거리의 최소값을 구하시오.

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \ln \frac{x}{a}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < a < x$)

- ① 1 ② 0 ③ a ④ $\frac{1}{a}$ ⑤ ∞

4. 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. $f(1) = f(3)$ 을 만족하고 방정식 $f(x) = k$ 가 서로 다른 두 실근과 두 허근을 가질 때, 다음 중 옳은 것을 고르시오.



- ① $k < f(1)$ ② $k = f(2)$ ③ $k > f(2)$
 ④ $f(1) < k < f(2)$ ⑤ $k = f(3)$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}}$ 의 값을 구하시오.

- ① 1 ② $e^{\frac{1}{6}}$ ③ $e^{\frac{2}{3}}$ ④ $e^{\frac{3}{2}}$ ⑤ e^6

6. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \ln(\sec x)$ 의 도함수를 $f'(x)$ 라 할 때, $f'(\frac{\pi}{4})$ 의 값을 구하시오.

- ① -1 ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

7. $\int_0^1 x^2(x^3 + 1)^5 dx$ 의 값을 구하시오.

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

8. $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx$ 의 값을 구하시오.

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

9. 곡선 $y^2 = x + 1$ 과 y 축으로 둘러싸인 부분의 면적을 구하시오.

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

10. 연속인 함수 $f(x)$ 가 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ 그리고 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ 을 만족할 때, $\int_0^1 f^{-1}(y) dy$ 의 값을 구하시오.

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

11. 두 직선 g_1, g_2 가 다음과 같이 주어졌다.

$$g_1: x - 1 = \frac{y+2}{3} = -z + 4, \quad g_2: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z+3}{4}$$

두 직선 사이의 최단 거리를 구하시오.

- ① $\frac{14}{\sqrt{150}}$ ② $\frac{34}{\sqrt{150}}$ ③ $\frac{8}{\sqrt{230}}$
 ④ $\frac{12}{\sqrt{230}}$ ⑤ $\frac{52}{\sqrt{230}}$

12. 다음 식으로 나타내어지는 두 직선 l, m 이 있다.

$$l: x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}, \quad m: \frac{x-1}{3} = -y = \frac{z+1}{2}$$

직선 m 을 포함하고 직선 l 에 평행한 평면의 방정식을 $ax + by + cz = 1$ 의 형식으로 쓸 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

13. 아래 보기의 함수들 중 $x = 0$ 에서 미분가능한 함수들을 모두 고르시오.

<보기> $f(x) = x|x|$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 + 3x, & x \geq 0 \\ -x^2 + 3x, & x < 0. \end{cases}$$

- ① f ② h ③ f, h ④ g, h ⑤ f, g, h

14. 함수 f 가 미분가능하고 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 2$ 를 만족할 때, $g(x) = x^2 f(2x^2)$ 로 정의된 함수 g 에 대하여 $g'(1)$ 의 값을 구하시오.

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 24

15. 곡선 $2x^2 - xy + y^2 = 8$ 위에 있는 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.

- ① $6x - 5y + 16 = 0$ ② $6x + 5y - 4 = 0$
 ③ $5x - 6y + 15 = 0$ ④ $5x + 6y - 7 = 0$
 ⑤ $5x + 6y + 7 = 0$

수학 자가진단 문제

(배점: 1번-10번 문제 각 3점, 11번-20번 문제 각 4점, 21번-25번 문제 각 6점)

16. $f(x) = \sqrt{2}e^{-x}\sin x$ ($x \geq 0$) 가 $x = a_0, a_1, a_2, \dots$

(단, $0 < a_0 < a_1 < \dots$)에서 극대값을 가질 때 $\sum_{n=0}^{\infty} f(a_n)$ 의 값을 구하시오.

- ① $\frac{e^{-\frac{5\pi}{4}}}{1-e^{-2\pi}}$ ② $\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{1-e^{-2\pi}}$ ③ $\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{1-e^{-2\pi}}$
 ④ $\frac{e^{-\frac{5\pi}{4}}}{1-e^{-\pi}}$ ⑤ $\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{1-e^{-\pi}}$

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} (\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+2} + \dots + \sqrt{3n+n})$ 의 값을 구하시오.

- ① $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ ② $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}+1)$ ③ $\frac{2}{3}(8-3\sqrt{3})$
 ④ $\frac{2}{3}(8+3\sqrt{3})$ ⑤ $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+3)$

18. $f(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_0^x \left(\int_1^{\sin t} \sqrt{1+u^4} du \right) dt \right)$ 일 때 $f(\pi)$ 의 값을 구하시오.

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

19. $\int_0^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x + 2}{x^n + 1} \right) dx$ 의 값을 구하시오.

- ① $\frac{23}{2}$ ② $\frac{23}{3}$ ③ $\frac{23}{4}$ ④ $\frac{23}{5}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

20. 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 을 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 구하시오.

- ① π^2 ② $2\pi^2$ ③ $3\pi^2$ ④ $4\pi^2$ ⑤ $5\pi^2$

<주관식(단답형)>

21. 다음 부등식을 동시에 만족하는 점 (x, y) 의 영역을 그림으로 나타낼 때 생기는 부분의 면적을 S 라 할 때 $400S$ 의 값을 구하시오.

$$\sin^2(\pi x) + \cos^2(\pi y) \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

22. 함수 $f(x) = e^{3x} + x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $1000g'(1)$ 의 값을 구하시오.

23. 한 변의 길이가 100m인 정사각형 $OABC$ 가 있다. 변 AB 의 중점 P 를 중심으로 반지름이 50m인 원을 그리자. 시각 $t=0$ 일 때 물체가 점 A 에서 출발하여 원 위를 반시계방향으로 매초 $\frac{\pi}{10}$ 라디안(radian)의 등각 속도로 움직인다고 하자. t 초 후 물체의 위치를 Q 라 하고 변 OA 와 변 OQ 가 이루는 각을 θ 라 할 때, 5초 후에 θ 의 시간에 대한 변화율은 $a\pi$ (rad/초)가 된다. 이 때 $1000a$ 의 값을 구하시오.

24. 점 $P_n(1 - \frac{1}{4^n}, 0)$ 에서 곡선 $y = \sqrt{x-1}$ 에 접선을 긋고 그 접점을 T_n 이라 하자. T_n 에서 x 축에 내린 수선, x 축 그리고 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 면적을 S_n 이라 하자.

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \text{이라 할 때 } \left[\frac{1}{a} \right] \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대정수이다.)

25. 반지름 r 이 3이고, 높이 L 이 20인 직원기둥 모양의 유리잔에 물이 가득 담겨있다. 유리잔을 기울여서 남은 물이 밑면의 절반이 될 때까지 물을 따라낸다면, 유리잔에 남아있는 물의 양은 얼마인지 구하시오.

