2017학년도 7월 정현경 모의고사 해설
(나 형)

1.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n+2}{4n^3+8n^2}=\dfrac{1}{4}$

2.

표준편차= $\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}}=1$

3.

$2^4=16$

4.

$6^a=36$이므로, $a=2$

5.

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+x+\dfrac{1}{4}=1$에서 $x=\dfrac{1}{8}$

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{17}{8}$

6.

$f(x)=-(x-1)^2$이고, $f'(x)=-2(x-1)$이므로

$$f'(2)=2$$

이다.

7.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+\sum\limits_{k=1}^{n}a^n}{2^n}=b$에서, $b\neq1$이라면

$$a=2$$

이고, $b=2$이다.

$$\therefore a+b=4$$

8.

문제에서 구하는 a의 값들은

$$a=1,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

이다.

9.

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cap B)$$

이므로

$$2\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

인데, $\mathrm{P}(A\cap B)$는 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$보다 작거나 같으므로,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

이다. 따라서, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$이다.

10.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to-1}f(f(x))=\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$ (참)

ㄷ. $x\geq2$일 때, $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$이므로 $\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{f(x)}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$ 이다. (참)

11.

문제의 방정식의 해는 방정식

$$x^3-3x=x$$

의 실근 중에서 $x>0$인 것들이고, $x=\sqrt{2}$가 존재한다.

12.

$(x-2)^2f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면, $a=2$이어야 한다.

13.

집합 $A\cup B$ 의 원소를 선택하는 경우 ${}_8\mathrm{C}_2$에서, (나)조건을 고려하면

$n(A)=0,\ n(B)=2,\ n(A\cap B)=0$일 때 1가지
$n(A)=1,\ n(B)=1,\ n(A\cap B)=0$일 때 2가지
$n(A)=1,\ n(B)=1,\ n(A\cap B)=1$일 때 2가지
$n(A)=1,\ n(B)=1,\ n(A\cap B)=2$일 때 1가지

이므로 구하는 모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2\times6=168$이다.

14.

(나)조건에 의하여 $c=-2$이고, (다)조건에 의해

$$\sqrt{b}+c=0$$

이므로, $b=\pm4$인데, (가)조건을 고려하면

$a=-1,\ b=4,\ c=-2$이다.

15.

1) $f(4)=1$일 때,

$f(2)=2$인 경우 2가지
$f(2)=3$인 경우 2가지

2) $f(4)=2$일 때,

$f(2)=3$인 경우 2가지

이다.

16.

명제 $p \to \sim q$가 거짓이고 명제 $p \to \sim r$이 참이려면 좌표평면에서 직선 $y=x$와 원 $x^2+(y-2a)^2=1$은 만나지 않아야 하고, 직선 $y=x$와 원 $(x-a)^2+y^2=1$은 만나야 한다. 따라서, 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하면

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le a \le \sqrt{2}$$

임을 알 수 있다.

$$\therefore p^2+q^2=\frac{5}{2}$$

17.

여사건을 이용해보자.

ab가 3의 배수가 아니라면 a와 b가 각각 3, 6이 아니므로 ab가 3의 배수가 아닐 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

이므로 구하는 확률은 $\frac{5}{9}$이다.

18.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)-f'(2)}{x}=1$에서, $f(2)=f'(2)=1$임을 알 수 있으므로, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식은

$$y=x-1$$

이고 y절편은 -1이다.

19.

S_n은 첫째항이

처음 육각형의 넓이-처음 원의 넓이

인 $6\sqrt{3}-3\pi$이고 공비가

$$\left(\frac{\text{두번째 육각형의 한 변의 길이}}{\text{처음 육각형의 한 변의 길이}}\right)^2$$

인 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$인 등비수열의 무한 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3(2\sqrt{3}-\pi)}{1-\frac{3}{4}}=12(2\sqrt{3}-\pi)$$

20.

이차함수 $f(x)$의 대칭축을 $x=l$이라 하면,

$$f(a_{n+1})=f(a_n)$$

이 성립하기 위해서는 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n$$

이거나,

$$\frac{a_{n+1}+a_n}{2}=l$$

이어야 하는데, 공비가 1, 0이 아니므로 $a_{n+1}=a_n$은 성립하지 않는다. 따라서, $\frac{a_{n+1}+a_n}{2}=l$이고, 이를 만족하려면 수열 $\{a_n\}$의 공비는 -1이어야 한다.

$$\therefore l=0,\ f(x)=x^2+2$$

$$f(3)=11$$

21.

다항함수 $f(x)$에 대하여, $f(x)f'(x)=3x^5+kx^2$이려면 $f(x)$는 삼차함수여야 하고,

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

라 하면, $b=d=0$이어야 한다. 또한 $a=\pm1$인데, (나)조건에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 제 3사분면을 지나지 않으므로, $a=-1$이다.

$$\therefore f(x)=-x^3+cx$$

한편, $\int_0^2 f(x)dx=4$이므로, $d=4$이고, $f(-1)=5$이다.

22.

${}_{7}\mathrm{C}_{5}=21$

23.

$f'(x)=2x-5$이므로, $f'(5)=5$

24.

건우와 민재를 포함한 팀을 구성하는 방법의 수 ${}_{8}\mathrm{C}_{3}$
나머지 5명의 팀을 구성하는 방법의 수 ${}_{5}\mathrm{C}_{5}$

$$\therefore {}_{8}\mathrm{C}_{3}\times{}_{5}\mathrm{C}_{5}=56$$

25.

$a_n=2n+k$라 하면,

$$(a_3)^2-(a_2)^2=20$$

에서,

$$(k+6)^2-(k+4)^2=4k+20=20$$

이므로, $k=0$이다.

$$\therefore a_5=10$$

26.

$k=3$이므로,

$$-6+a=0 \;\rightarrow\; a=6$$

27.

$$\mathrm{P}(X=0)={}_{n}\mathrm{C}_{0}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \mathrm{P}(X=n)={}_{n}\mathrm{C}_{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

인데, $\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=n)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^6}$이므로, $n=7$이다.

28.

(나)조건에 의하여

$$a=-b,\ c=-d,\ e=-f$$

이고, $|a|=A+1,\ |c|=C+1,\ |e|=E+1$이라 하면
(가)조건에서

$$A+B+C=4$$

이다. 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{4}$이고,

a와 b의 부호
c와 d의 부호
e와 f의 부호

는 서로 뒤바뀔 수 있으므로, 모든 경우의 수는

$$8\times{}_{3}\mathrm{H}_{4}=120$$

이다.

29.

(나)조건에 의하여, $x\geq 0$일 때,

$$f(x)\geq 0$$

이어야 하는데, $f(2)=0$이므로, 모든 조건을 만족시키는 함수는

$$f(x)=x(x-2)^2$$

이다.

$$\therefore f(5)=45$$

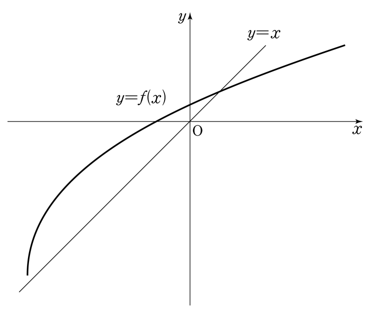
30.

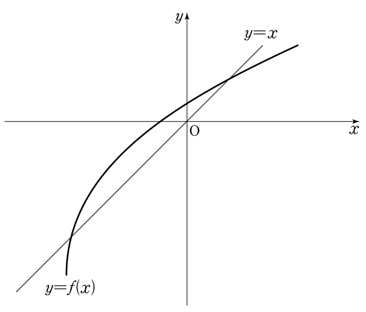
(나)조건에서 $\sqrt{(t-1)^2+\{f(t)+1\}^2} \geq \sqrt{(t+1)^2+\{f(t)-1\}^2}$ 의 의미는, 두 점 $(t,\ f(t))$, $(1,\ -1)$사이의 거리가 두 점 $(t,\ f(t))$, $(-1,\ 1)$사이의 거리보다 크다는 것이다.

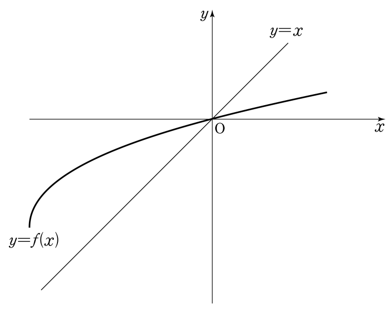
두 점 $(1,\ -1)$, $(-1,\ 1)$사이의 거리가 같은 점들의 집합은 $y=x$를 만족시키므로, $-\dfrac{b}{a} \leq x \leq 0$일 때 곡선 $y=f(x)$는 영역

$$\{(x,\ y)\,|\,y \geq x\}$$

에 존재해야 한다.







위의 그림들과 같이 곡선 $y=f(x)$의 그래프 형태를 고려하면, 만약 곡선 $y=f(x)$의 끝점 $\left(-\dfrac{b}{a},\ -n\right)$과 y축과 만나는 점인 $(0,\ \sqrt{b}-n)$이 영역

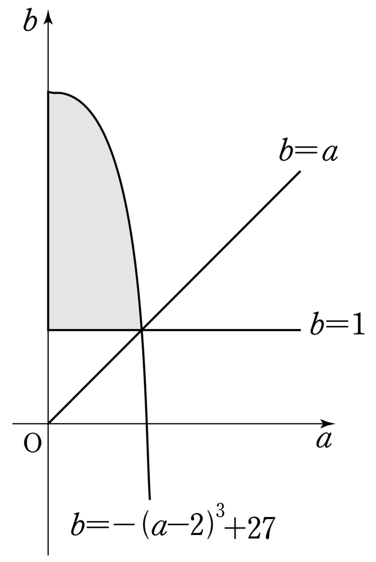
$$\{(x,\ y)\,|\,y \geq x\}$$

에 존재한다면, (나)조건이 만족된다. 따라서

$$-\frac{b}{a} \leq -n \ \rightarrow\ b \geq an$$

$$\sqrt{b}-n \geq 0 \ \rightarrow\ b \geq n^2$$

이다. $n=1$일 때, (가)조건과 위의 조건들을 고려해 x축$=a$축, y축$=b$축인 좌표평면을 생각해보면 점 $(a,\ b)$가 존재하는 영역은 빗금친 부분과 같다.



(왜곡된 그림이니 참고만 하세요)

따라서 모든 조건을 만족시키는 점은

$a=1$일 때 $b=1 \sim 28$에서 28개
$a=2$일 때 $b=2 \sim 27$에서 26개
$a=3$일 때 $b=3 \sim 26$에서 24개
$a=4$일 때 $b=4 \sim 19$에서 16개

이므로 $a_1=94$이고, 위와 같은 방법으로 모든 개수를 세어보면

$a_2=82$, $a_3=65$, $a_4=40$, $a_5=9$
$a_6 \sim a_{10}=0$

이다. $\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n = 310$