2017학년도 6월 모의평가 (가)형

21번. 28번. 29번. 30번 해설

Orbi class 수학강사

초성민(성민)

이 해설은 현재 저의 기출강의인 다보기 책의 해설과 동일하게 이루어져
우측에는 해당하는 수학적능력을 적어가며 풀어나갔습니다.

2017 학년도 6월 모의평가 가형 21번 (추정 정답률 55%)

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

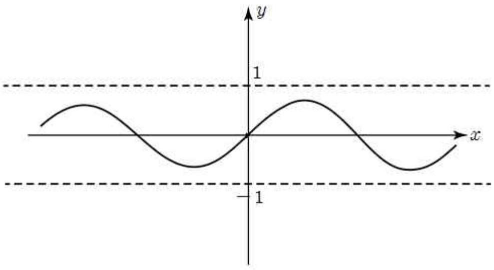
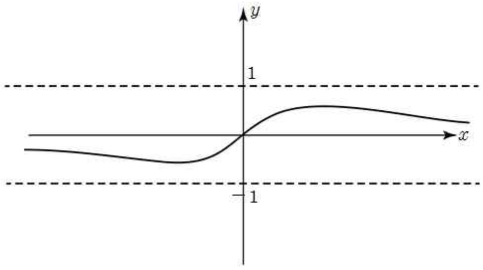
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

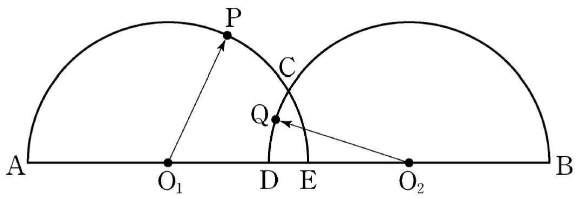
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

최근 경향을 미루었을 때 지금까지 나온 21번 중 가장 쉬운 문제이다. 허나 이 문제를 보자마자 학생들이 실수요소가 많을 것이라고 여기었다. 그 원인과 함께 파헤쳐 보자. 보자마자 보이는 조건은 (가)와 (나)는 읽으면서 해석이 된다.		의사소통
ㄱ	조건 (나)가 바로 해석하면 홀함수(기함수) 이다. 그로 인해, $f(x) \neq 1$ 이므로 $f(x) \neq -1$ 역시 성립된다. 따라서 **(참)**	의사소통 및 개념의활용
ㄴ	결론만 말하자면 아니다. 학생들의 실수를 파헤쳐보자. 흔히 말하는 수학고수들은, 모든 반례가 이미 체화되어 있다. 그리고 실제로 저 문제를 풀 때 문제에 대한 접근자체를 조건부터 제대로 해석하고 가기도 하므로, 중위권 혹은 중상위권까지 하는 실수인 습관적 그래프 개형 추론을 하지 않게 된다. 예를 들어 이런 것이다.	의사소통

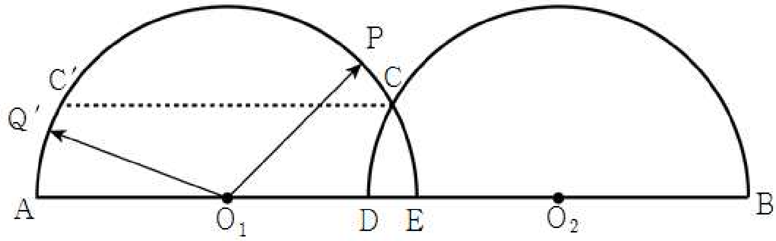
	  위 그래프 개형들 이다. 아마 틀린 친구들이 있다면 위 두가지 형태를 자기 멋대로 그려놓고 시작해서 했을 가능성이 있다. 이는 아주 나쁜 버릇이다. 우선 그래프개형에 대해서 당장 해석하기 이전에 정해진 바가 없다. 기함수가 원점을 지나므로, (다)조건에 식을 넣었을 때, $f'(0)=1$ 이되고 원점에서는 순간 증가하는 함수이다. 그리고 더 그래프 개형을 확인하기 위해 조건 (다)를 보자 $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}=1-\{f(x)\}^2 \cdots$ ㉠가 되고 (가)와 (나) 그리고 ㄱ을 통해서 $-1<f(x)<1$ 임을 확인했으므로, $f'(x)$가 언제나 $f'(x)>0$ 임을 수식으로 확인할 수 있다. 따라서 언제나 함수는 증가하는 형태임을 알 수 있다. **(거짓)** (증가하면서, $y=1$ 과 $y=-1$에 가까워 지는 그래프임을 추론 할 수 있다.	의사소통 개념의 활용 문제추론능력
ㄷ	세 개의 변곡점을 물었으므로, 이계도함수의 부호가 변하는 점을 찾아보면 된다. 주어진 식에서 ㄴ에서 구한 ㉠ 식에서 양변을 미분해보면 $f''(x)=-2f(x)f'(x)$임을 확인할 수 있으며, ㄴ에서 항상 $f'(x)>0$ 임을 확인했으므로 $f(x)$의 부호가 변하는 점을 찾으면 되는데 홀함수(기함수)와 항상 증가하는 함수에서 $x=0$ 말고 해를 가질 수가 없다. 뜨라서 **(거짓)**	개념의활용 문제추론능력

2017 학년도 6월 모의평가 가형 28번 (추정 정답률 47%)

28. 그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DB}}=2$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{O_1A}}=\overline{\mathrm{O_2B}}=1$인 두 점을 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하자.
호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $1<\overline{\mathrm{O_1O_2}}<2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



최근 벡터의 최대최소가 내적보다는 합의 형태를 묻고 있다. 이역시 제곱하여 내적의 값으로 확인 가능하기도 하고, 합의 형태를 이미지화 시켜서 확인도 가능하다.(현재는 생략)	의사소통



먼저, $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$ 를 평행이동 시켜 시점을 일치 시킨다. (벡터의 합의 기본 형태로 만들기)
평행이동한 벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{O_1Q'}}$ 라고 하고 위의 그림과 같다.
이때 $\mathrm{Q'}$는 호 $\overset{\frown}{\mathrm{AC'}}$ 위의 임의의 점이고, P는 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 위의 점이다.

문제에서 나온 조건 중, $|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}|$ 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이므로 이 식을 제곱하여 정리하면

$|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}\geq\frac{1}{4}$가 된다.

이 때, $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}=\overrightarrow{\mathrm{O_1Q'}}$ 이고 각각 반지름이므로, 식을 정리하면

의사소통
및
개념의활용

$$2\,\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q} \geq -\frac{7}{4}$$

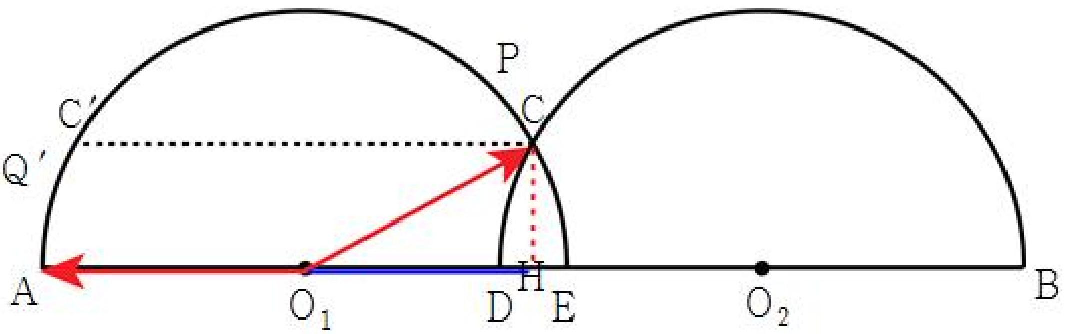
$$\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q} \geq -\frac{7}{8}$$

의 형태로 내적의 최솟값을 묻게 된다. (문제 해결력)

이 때, 내적의 최소가 되려면, $\overrightarrow{O_1P}$ 과 $\overrightarrow{O_2Q'}$가 서로 가장 벌어져있을 때 이므로

(지금 이 상황에서 해당되는 말이다. $\cos\theta$ 값이 -1에 가까울수록 내적값이 작아진다.)

최종적인 이미지는,



가 되며 O_1H 는 $\frac{7}{8}$ 가 된다.

$\therefore \overline{AB} = 2(\overline{AO_1} + \overline{O_1H}) = \frac{15}{4}$가 되며 답은 19 이다.

Comment : 이 문제는 다양한 방법으로 풀 수 있다. 연산적인 실수를 조심해주고(제곱)

다른 방법들로 푼 형태 역시 점검해보도록 하자. (중점, 및 벡터의 합 삼각형법 추론)

2017 학년도 6월 모의평가 가형 29번 (추정 정답률 30%)

29. 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 1)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0,\ f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때 시각 t는 $t = \dfrac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$이고, $t=2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2},\ a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

매개변수의 미분. 곡선의 길이 및 이동거리.
제대로 방향만 잡힌다면 쉽게 풀리지만, 그렇지 않다면 헤맬 수도 있다.
기존에 이런문제는 너무나 쉽게나왔었기에, 올해 6월 29번에 나왔으면

앞으로 주목할 가치가 매우 높다. (좀 더 다양한 킬러문제형태로 출제가능 But 계산위주의 풀이)

의사소통

거리에 관한 공식부터 기억해보자.
해설이기에 자세한 개념은 생략한다.
(공식 나오는 원리까지 이해하고 있으면 문제해결력 및 추론력에 도움이 매우 된다.)

곡선의 길이

① 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 t에서의 위치가

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

일 때, 점 P가 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$까지 그리는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_a^b |\vec{v}|\,dt=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

② 곡선 $y=f(x)$의 $x=a$에서 $x=b$까지의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

의사소통
및
개념의활용

실제로 문제를 풀 때는 주어진 상황이 시간인지, x좌표 기준인지 확인하는데
지금 같은 경우 시간 1에서부터 t 까지의 거리가 s 라고 표현되어있으므로

$\displaystyle\int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = s$라는 식부터 세우고 시작하자.

문제를 다시 보면 t와 s에 관한 식이 나와있는데 여기서 이 식을 제대로 정리할 수 있는것도 계산능력과 해결력이다. 이 상황에서 바로 음함수미분을 해가면서 하는 경우도 있는데,
내 생각에는 문제풀이 경험 부족에서 비롯되는 계산과정에서의 진행방향을 잘못 정한 케이스다.

근호 안에는 제곱 근호밖에는 단독으로 되어있다보니 적당히 연산해주면 쉽게 나온다.

$$t = \frac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$$

$$2t = s + \sqrt{s^2+4}$$

$$2t - s = \sqrt{s^2+4}$$

(생략)

위 식에서 제곱하여 정리하면, $s = t - \dfrac{1}{t}$가 된다. 이제 끝난 셈이다.

해결력
계산능력

$$\int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = s$$

$$\int_1^t \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \{f'(t)\}^2}\, dt = t - \frac{1}{t}$$

양변을 t 에 관하여 미분한 후 정리

$$\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \{f'(t)\}^2} = 1 + \frac{1}{t^2}$$

$$\{f'(t)\}^2 = \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)^2$$

$f'(2) = \dfrac{3}{4}$ 이므로 $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$

(솔직히 지겹게 많이 본 연산식 아닌가)

문제에서 원하는 값은 $f''(2)$ 이므로 연산하면 답이 된다.

Comment : 곡선의 길이 공식을 가볍게 연산하는 개념활용수준문제를 벗어나서 복잡한 연산의 식으로 나타낸 문제이다. 허나 풀이를 보면 알겠지만 허무할 정도로 쉽다. 오히려 t=g(s)에서 돌다가 틀리는 경우가 많지 않을까 추측하며 연산연습을 평소 게으르지 않게 하길 권장한다.

개념의활용
계산능력
해결력

2017 학년도 6월 모의평가 가형 30번 (추정 정답률 5%)

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=f(-x)$
>
> (나) $\displaystyle\int_{x}^{x+a} f(t)\,dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0,\ \dfrac{a}{2}\right]$에서 두 실수 $b,\ c$에 대하여 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때 $abc=-\dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

생긴 것은 단순하다.
(가)조건쯤이야 보자마자 해석이 되고 (나) 역시 적절히 하면 될 것같은 자신감.

허나 이번 평가원에서 느낀 것은 문제를 풀면서 나조차 조마조마할정도로 계산을 꼼꼼히 해야함을 더더욱 느꼈다.
그리고 문제스타일이, 추론적 논리 보다는 계산능력과 해결력을 중점으로 복잡하거나 어렵지 않지만 틀리기 좋은 문제라고 생각이 든다.

문제 첫째줄 미분가능과 조건 (가)는 바로 해석하고 (나)와 주어진 $f(x)$로 풀어나가보자.

[의사소통능력]

조금씩 다를 수 있는데, (나)에서 먼저 $x=-\dfrac{a}{2}$를 대입하였다. 그 근거로는 (가)의 짝함수 조건이 있으며 자연스레 좌우 대칭범위로 값을 찾아 식을 정리하고자 노력한다.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \cdots ㉠$$

~~그리고 양변을 미분해보자. (인테그랄을 정리하기 가장 좋은 도구이다.)~~

$$\cancel{\frac{d}{da}2\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \frac{a}{da}\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

[문제해결력]
[계산능력]

~~즉 $2f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \cdots$ ㉡값을 얻는다.~~

(이과정은 잘못되어있다. a는 이미 문제에서 상수라고 명시되어있기에
 미분을 하게 될 경우 0이 된다. ㉠까지만 타당하다.)

허나 여기서, 더 진행 할 수 없기에 이번엔 주어진 조건 (나)를 다른 식으로 해석하였다.
처음부터 미분해서 식을 하나 더 뽑아내는 것이다.(나는 정보를 최대한 끌어모은다.)

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \frac{d}{dx}sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

즉,

$$f(x+a)-f(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

라는 식도 얻을 수 있다. 이 때, 아까와 마찬가지로 짝함수조건을 통해 $x=-\frac{a}{2}$ 를 대입하여

식을 정리해본다. $f\left(\frac{a}{2}\right)-f\left(-\frac{a}{2}\right)=0=\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$의 정보를 얻을 수 있으며,

주어진 a 범위 내에서 위 식을 만족하는 값은 $a=\frac{5\pi}{3}$가 된다.

---

a를 구하면서 앞으로 나아가기 편해졌다.
주어진 식을 처음봤을 때 옛날 공식을 활용해야하나 싶었지만, 그럴 리가 없다고 판단하고
식 변환을 통해서 더 많은 정보를 모으는 방향으로 지속적으로 진행한다.

위 구한식 중 ㉠을 보면 정적분 범위가 $[0, \frac{a}{2}]$이고 주어진 함수 역시 같은 범위이므로

대입한 후 식을 정리해보자

[개념의 활용]

$$2\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \cdots ㉠$$

$$2\int_{0}^{\frac{a}{2}} b\cos 3t + c\cos 5t\, dt = \sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

[문제해결력]
(기울기의 정의)

$$2\left[\frac{b}{3}\sin 3t+\frac{c}{5}\sin 5t\right]_{0}^{\frac{a}{2}} = \sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$a=\frac{5\pi}{6}$ 대입

$$2\left(\frac{b}{3}\sin\frac{5\pi}{2}+\frac{c}{5}\sin\frac{25\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$$

$\therefore \frac{1}{3}b+\frac{1}{10}c=-\frac{1}{2}$

b와 c에 관한 식을 하나 얻었으므로 자연스레, 식 하나를 다 찾아야 한다.

문제에서 처음부터 주어졌던, (나)를 한번미분한 식 $f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$에서 다시 한번더 미분할 수 있음을 확인 할 수 있다. (실수 전체집합에서 미분가능)

[문제해결력]

$f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$가 되고 아까와 마찬가지로 $x=-\frac{a}{2}$ 를 대입한다.

$f'\left(\frac{a}{2}\right)-f'\left(-\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$a=\frac{5\pi}{3}$ 대입

$f'\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}$

따라서 문제에서 주어진 $f(x)$ 역시 미분하여 $\frac{a}{2}$ 를 넣은 값이 -1이 된다.

[문제해결력]
[계산능력]

(이 때, 실수전체에서 미분가능 조건이 적용되므로 가능하다. 다시볼때는 그런 조건들의 타당함을 한번씩 더 살펴보자)

$f'\left(\frac{a}{2}\right)=-3b\sin\left(\frac{3a}{2}\right)-5c\sin\left(\frac{5a}{2}\right)$

$f'\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-3b\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)-5c\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$\therefore -3b-\frac{5c}{2}=\frac{1}{2}$

위에서 구한 두 식 $-3b-\frac{5c}{2}=\frac{1}{2}$ 와 $\frac{1}{3}b+\frac{1}{10}c=-\frac{1}{2}$ 을 연립하면

$b=-\frac{9}{4},\ c=\frac{5}{2}$ 가 된다. (연립과정까지 무시하지 말기)

Comment : 이과 30번이 이전 문과 30 번처럼 많은 해결력과 계산력을 물었다.
문제를 요리보고 저리보아서 삼각함수 주기성 및 그래프개형 등을 살펴보려 했지만 그러기는 어려웠었고 29번과 함께 나온걸로 보아 “계산능력” “해결능력” 에 많은 초점을 두어야할 듯 싶다.