

수학 영역(가형)

제 2 교시

1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2. ${}_n C_2 = 21$ 일 때, 자연수 n 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

3. 두 벡터 $\vec{a} = (x+1, 2)$, $\vec{b} = (1, -x)$ 가 서로 수직일 때, x 의 값은?
[2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. $\int_e^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

일 때, $P(B|A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

6. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 2$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ 이다. 점 P 가 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PA}|^2$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

7. 부등식 $2\log_3(x+1) \leq \log_3(5-x)$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수는? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ 5 ⑤ 6

8. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가

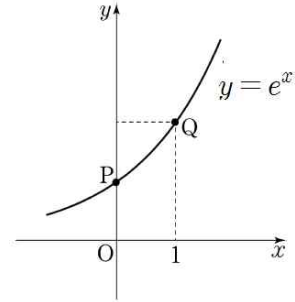
$x = \ln t^2$, $y = t + \frac{1}{t}$ 일 때, 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인 거리는? [3점]

- ① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3
 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

9. 다항식 $(1+ax)^7$ 의 전개식에서 x 의 계수가 14일 때, x^2 의 계수는?
 (단 a 는 상수이다) [3점]

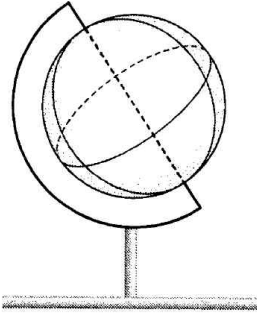
- ① 72 ② 78 ③ 84
 ④ 90 ⑤ 96

10. 그림과 같이 곡선 $f(x) = e^x$ 에 대하여, 곡선 위의 두 점 $P(0, 1)$, $Q(1, e)$ 가 있다. 동점 $R(t, f(t))$ 이 곡선 PQ 를 따라 0부터 1까지 움직일 때, $f(t)$ 를 지름으로 하는 원이 단면인 입체도형의 부피는? [3점]



- ① $\frac{\pi(e^2+1)}{8}$ ② $\frac{\pi(e^2-1)}{8}$ ③ $\frac{\pi(e^2-2)}{8}$
 ④ $\frac{\pi(e^2+1)}{4}$ ⑤ $\frac{\pi(e^2-1)}{4}$

11. 아래 그림과 같이 회전이 가능한 지구본 형태의 구를 세로로 3등분, 가로로 2등분하여 크기와 모양이 같은 6개의 도형으로 나누었다. 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여 이 도형의 6면을 각각 하나의 색으로 칠하는 모든 경우의 수는? [3점]



- ① 600 ② 480 ③ 360
 ④ 240 ⑤ 120

12. 타원 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 과 직선 $y = -2x$ 가 만나는 점에서의 타원

$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 의 접선의 기울기는? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

13. 함수 $f(x) = \ln(e^x - 1)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 양수 a 에 대하여 $\frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{g'(a)}$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

14. 다음은 양의 실수 x 에 대하여 $y \geq \frac{1}{n\pi}x$ 와 $y \leq |\sin x|$ 를 만족하는 영역의 면적을 S_n 이라 할 때,

$$\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)n < S_n < \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)n$$

이 성립하는 것을 보이는 과정이다.

위의 그림에서 $S_n > n \int_0^\pi \sin x dx - \triangle OAB$
 (점 A, B의 좌표는 각각 $(n\pi, 0)$, $(n\pi, 1)$)
 $= n [-\cos x]_0^\pi - \frac{1}{2}n\pi = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)n$
 한편, $n \geq k$ 일 때, $(k-1)\pi \leq x \leq k\pi$ 에 있어서 $y = |\sin x|$ 와 $y = \frac{1}{n\pi}x$ 로 둘러싸인 부분의 면적은, $y = |\sin x|$ 와 오른쪽 그림에서 선분 PR, RQ로 둘러싸인 부분의 면적보다 작다.

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx - \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{n\pi} \left(\boxed{\text{(가)}} \right)$$

$2 - \frac{\pi}{2n} \left(\boxed{\text{(가)}} \right)$ 보다 작다. 따라서

$$S_n < \sum_{k=1}^n \left\{ 2 - \frac{\pi}{2n} \left(\boxed{\text{(가)}} \right) \right\}$$

$$= 2n - \frac{\pi}{2n} \left(\boxed{\text{(나)}} \right)$$

따라서 $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)n < S_n < \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)n$ 를 만족한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$ 이라 할 때, $\frac{\pi \times g(15)}{f(5)}$ 의 값은? [4점]

- ① 15 ② 20 ③ 25
 ④ 30 ⑤ 35

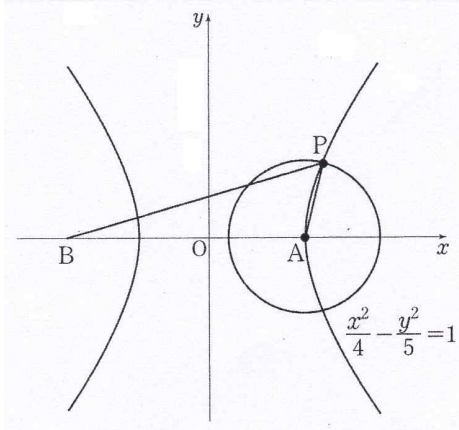
15. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 를 만족하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는? [4점]

- ① 135 ② 162 ③ 189
 ④ 216 ⑤ 243

16. $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 함수 $f(x) = \frac{\cos x + \sin x + 2}{\cos x + 2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M+m$ 의 값은? [3점]

- ① $2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ② 2 ③ $2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$
 ④ 3 ⑤ $3 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

17. 그림과 같이 점 A(2,0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 한 교점을 P라고 하자. 점 B(-3,0)에 대하여 $\overline{PB} - \overline{PA} = 4$ 일 때, r의 값은? (단, $0 < r < 2$) [4점]



- ① $\frac{7}{4}$
- ② $\frac{13}{8}$
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{11}{8}$
- ⑤ $\frac{5}{4}$

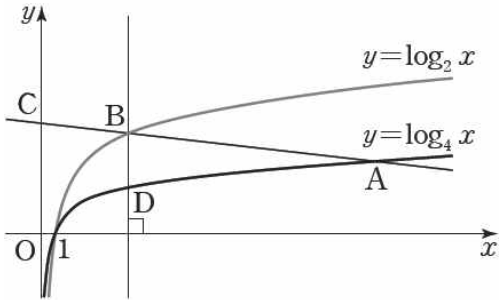
18. 두 동전 A, B를 동시에 던져 그 결과에 따라 좌표평면 위의 점을 다음과 같이 이동시킨다.

- (가) A, B 모두 앞면이 나오면 점 (x, y) 를 점 $(x+1, y+1)$ 로 이동시킨다.
- (나) A는 앞면, B는 뒷면이 나오면 점 (x, y) 를 점 $(x+1, y-1)$ 로 이동시킨다.
- (다) A는 뒷면, B는 앞면이 나오면 점 (x, y) 를 점 $(x-1, y+1)$ 로 이동시킨다.
- (라) A, B 모두 뒷면이 나오면 점 (x, y) 를 점 $(x-1, y-1)$ 로 이동시킨다.

원점에 위치한 점 P가 두 동전 A, B를 동시에 던지는 시행을 6번 반복한 후 직선 $x+y=6$ 위로 옮겨지게 될 확률은? [4점]

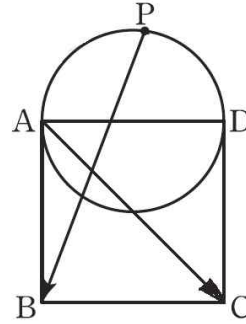
- ① $\frac{45}{1024}$
- ② $\frac{55}{1024}$
- ③ $\frac{65}{1024}$
- ④ $\frac{75}{1024}$
- ⑤ $\frac{85}{1024}$

19. 그림과 같이 곡선 $y = \log_4 x$ 위의 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점을 B, y 축과 만나는 점을 C라 하고, 점 B를 지나고 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y = \log_4 x$ 와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB} = 3\overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$ 일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? [4점]



- ① 36 ② 42 ③ 48
- ④ 54 ⑤ 60

20. 그림과 같이 한 평면 위에 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD와 선분 AD가 지름인 원이 있다. 이 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 의 최댓값은? [4점]



- ① 3 ② $3 + \sqrt{2}$ ③ $3 + 2\sqrt{2}$
- ④ $2 + \sqrt{2}$ ⑤ $2 + 2\sqrt{2}$

21. 연속함수 $y = f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \int_1^x \sin x \cdot f(x) dx \text{ 이다.}$$

$f(0) = -1$ 일 때, $\int_0^1 \sin 2x \cdot f(x) dx$ 의 값은? [4점]

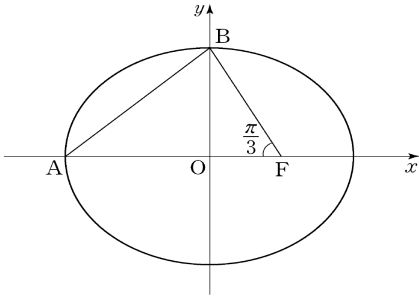
- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

단답형

22. 7을 세 자연수의 합으로 분할하는 경우의 수를 구하시오. [3점]

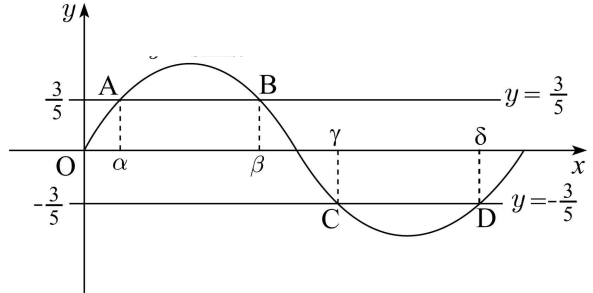
23. 함수 $f(x) = \tan x$ 에 대하여 $\tan a = 5$ 일 때, $f'(a)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 초점을 $F(c, 0)$ ($c > 0$), 이 타원이 x 축과 만나는 점 중에서 x 좌표가 음수인 점을 A , y 축과 만나는 점 중에서 y 좌표가 양수인 점을 B 라 하자. $\angle AFB = \frac{\pi}{3}$ 이고 삼각형 AFB 의 넓이는 $6\sqrt{3}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

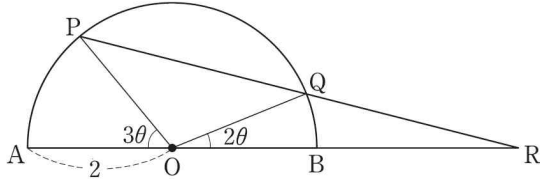


25. 어느 고등학교의 3학년 학생들을 대상으로 주거형태를 조사한 결과 A형과 B형 두 가지였다. 주거형태가 B형인 남학생의 수는 주거형태가 A형인 여학생수의 2배이고, 주거형태가 A형인 학생 중 여학생의 비율은 40%이다. 3학년 학생 중 임의로 한명을 뽑았더니 남학생이었다. 이 학생의 주거형태가 A형일 확률을 $\frac{q}{p}$ 라고 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수) [3점]

26. 그림과 같이 함수 $y = \sin \pi x$ ($0 \leq x \leq 2$)의 그래프가 직선 $y = \frac{3}{5}$ 과 두 점 A, B 에서 만나고, 직선 $y = -\frac{3}{5}$ 과 두 점 C, D 에서 만난다. 네 점 A, B, C, D 의 x 좌표를 각각 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때, $\alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta$ 의 값을 구하시오. [4점]



27. 그림과 같이 중심이 O이고 $\overline{AB}=4$ 를 지름으로 하는 반원이 있다. 실수 θ 에 대하여 $\angle AOP = 3\theta$, $\angle BOQ = 2\theta$ 가 되도록 두 점 P, Q를 반원 위에 각각 잡고, 직선 PQ와 지름 AB의 연장선의 교점을 R이라 하자. 삼각형 OQR과 부채꼴 OBQ의 넓이를 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 세 정수 a, b, c 에 대하여

$$|a| + |b| + |c| = 8$$

을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오. [4점]

29. 쌍곡선 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ 이 x 축과 만나는 점 중에서 x 좌표가 양수인 점을 A, 제 1 사분면에 있는 쌍곡선 위의 점을 $P(x_1, y_1)$ 이라 하자. 어떤 단위벡터 \vec{u} 가 $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}| = \frac{q}{p}$ 를 만족할 때, $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x) = e^{-x}(x^2 - x)$ 와 m 이 상수일 때, 직선 $y = mx + t$ 에 대하여, 두 함수의 교점의 좌표를 $g_m(t)$ 라고 하자(t 는 모든 실수). 그리고 실수 m 에 대하여 집합 S 를 $S = \{m \mid g_m(t) \text{의 불연속점이 1개보다 적거나 같다.}\}$ 라 하자. 집합 S 에 속하는 m 의 범위가 $m < a$ 또는 $m > b$ 일 때, $ab = -\frac{q}{e^p}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.