10.

생산가능곡선 위의 두 점 P, Q를 지나는 직선의 변형률은

$\mathrm{P}(2,2)$와 $\mathrm{Q}(x,y)$에 대해 $\dfrac{y-2}{x-2}$가 되고,

점 Q가 점 P에 한없이 가까워진다고 하였으므로

이는 결국 점 P에서의 접선의 기울기를 의미한다.

음함수 미분법에 의해 $x^3+2y^3=24$를 $3x^2+6y^2y'=0$으로 볼 수 있고,

$(x,y)=(2,2)$에서 접선의 기울기는 $12+24y'=0$에서 $y'=-\dfrac{1}{2}$이 된다.

11.

7명의 사람이 서로 구분되지 않는 2개의 조로 나누는 경우의 수에다가
구분이 되지 않는 생수 8병을 그렇게 나눈 2개의 조에 나누어 주는 경우의 수를 곱하면 된다.

전자는 $S(7,2)$인데, $S(n,2)=2^{n-1}-1$이라는 공식을 이용하면 $S(7,2)=63$임을 알 수 있고, 여기서 잠깐 보기들을 둘러보면 ① 189와 ⑤ 441만이 정답의 후보임을 눈치챌 수 있다.

거기다 생수 8병을 나누는 경우의 수도 3 아니면 7임을 알 수 있는데,
만약 리농이를 포함한 7명의 사람들이 2개의 조로 나뉘었다고 가정할 때
생수를 받지 못하는 조는 없다고 하였으므로
리농이 조에서 받을 수 있는 생수병의 개수는 $1,2,3,4,5,6,7$이 가능하므로
답은 $63\times 7=441$이 된다.

※ 2 이상의 자연수 n에 대하여 2개의 조로 나누는 $S(n,2)$는

$$S(n,2)=2^{n-1}-1$$

임의 증명

***pf*)**

$S(n,2)$는 예컨대 n개의 원소를 갖는 집합 A를 두 개의 공집합이 아닌 부분집합 B_1, B_2로 분할하는 방법의 수이고, B_1이 결정되면 $B_2=A-B_1$도 마저 결정된다.

이때 $B_1\neq\phi$이고 $B_1\neq A$인 A의 부분집합 B_1은 2^n-2개 존재하며

B_1, B_2의 구분이 없으므로 구하고자 하는 분할의 수는

$$\frac{2^n-2}{2}=2^{n-1}-1$$

이 된다. □

13.

sol.1)

$\vec{u}$는 곡선 $y=f(x)$위의 어떤 점 P에서의 접선의 방향벡터이다.

그리고 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u}=0$에서 점 P에서 접선에 수직한 직선이 원점을 지남을 의미한다.

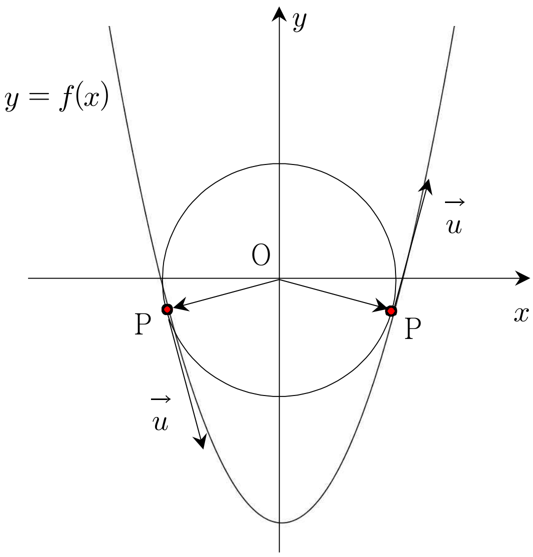
그러면 원점을 중심으로 하는 동심원의 반지름을 증가시켰을 때

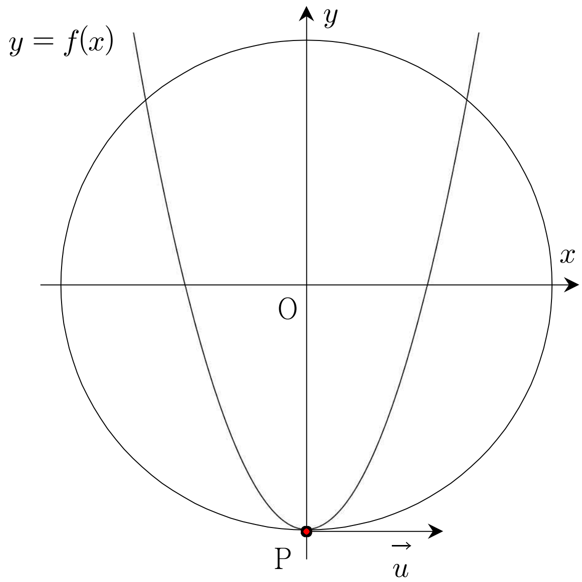
곡선 $y=f(x)$와 두 점에서 접하는 경우의 두 접점들이 점 P로 가능하며,

이때 열심히 그 접점의 좌표를 구할 필요 없이 존재성만 캐치해도 충분하다.

곡선 $y=f(x)$와 한 점, 즉 $(0,-4)$에서 접하는 경우의 점 $\mathrm{P}(0,-4)$가 가능하므로

답은 3이다.





sol.2)

$\mathrm{P}(t, t^2-4)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t, t^2-4)$이고,

점 P에서 미분계수가 $2t$이므로 $\vec{u}=(1, 2t)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u}=t+2t^3-8t=t(t^2-7)=0$이 되어 답은 ③ 3이다.

〔 2013년 06월 평가원 수학 영역(B형) 30번 〕

30. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 $s, t\,(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s, t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

〔 2013년 포카칩 수학 영역(B형) 1회 20번 〕

20. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 점과 점 $(0,\ t)$ 사이의 거리의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $\int_1^5 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{61}{6}$　② $\frac{31}{3}$　③ $\frac{21}{2}$　④ $\frac{32}{3}$　⑤ $\frac{65}{6}$

〔 2014학년도 서울대학교 수시모집 일반전형 면접 및 구술고사 〕

문제 1 $y=x^2+1$의 그래프 위의 점들 중 x축 위의 점 $(a,0)$과 가장 가까운 점을 (b,b^2+1)이라고 하자.(단, $a>0$) 다음 물음에 답하여라.

1-1. a를 b의 함수로 나타내어라.

1-2. 위와 같은 a,b에 대하여, $(0,1)$에서 (b,b^2+1)까지의 그래프 위의 점들과 $(a,0)$을 선분으로 연결하여 얻은 영역을 D라 할 때, 영역 D의 넓이를 b의 함수로 나타내어라.

1-3. 영역 D의 넓이가 1이 되는 b의 개수를 구하여라.

15.

처음에 얼핏 보면 제이코사인법칙을 사용할 수 밖에 없는 문제가 아닌지 의심이 들 수도 있다. 하지만 삼각형 $\mathrm{PF_1F_2}$의 세 변의 길이를 구해보면 피타고라스 정리가 성립하는 직각삼각형 관계임을 알 수 있다. 피타고라스 정리는 역이 성립한다.

즉, $\overline{\mathrm{PF_2}}=a$, $\overline{\mathrm{PF_1}}=a+4$이고 $\overline{\mathrm{F_1F_2}}=2\sqrt{4+2a}$ 로서

$$(a+4)^2=a^2+4(4+2a)$$

가 성립하므로 삼각형 $\mathrm{PF_1F_2}$에서 $\angle\mathrm{PF_2F_1}=90^\circ$ 임을 알 수 있다.

이때 $\cos\theta=\frac{a}{a+4}=\frac{a+4-4}{a+4}=1-\frac{4}{a+4}$에서 $-\sin\theta\frac{d\theta}{da}=\frac{4}{(a+4)^2}$이고,

$a=2$일 때 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이므로 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고

따라서 $\frac{d\theta}{da}=-\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{9}=-\frac{\sqrt{2}}{12}$가 답이 된다.

16.

편의상 검은 공을 B, 흰 공을 W라 하자.

총 8개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 순서대로 하나씩 꺼낼 때 마지막 꺼낸 공이 검은 색이었으므로 첫 번째와 두 번째에 꺼낼 수 있었던 공으로 가능한 경우의 수는

i) $B-B$ ii) $B-W$ iii) $W-B$ iv) $W-W$

의 네 가지가 가능하다.

세 번째의 검은 공까지 포함해서 순서대로 주머니에서 공을 세 개 뽑을 확률을 각각 p_1, p_2, p_3, p_4라 하였을 때 구하고자 하는 조건부확률의 값은

$$\frac{p_1+p_2+p_3}{p_1+p_2+p_3+p_4} \text{ 혹은 } 1-\frac{p_4}{p_1+p_2+p_3+p_4}$$

가 된다.

이제 실제로 주머니에서 공을 꺼내는 과정을 상상해가면서 p_1, p_2, p_3, p_4에 대한 식을 각각 구해보면 다음과 같다.

$$p_1=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6},\ p_2=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6},\ p_3=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6},\ p_4=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}$$

이때 공통적으로 $\frac{5\cdot3}{8\cdot7\cdot6}$을 포함하므로 조건부확률을 이루는 식에서 이들을 미리 약분하여 계산해보면

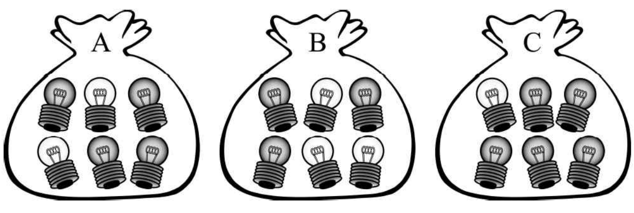
$$\frac{p_1+p_2+p_3}{p_1+p_2+p_3+p_4}=\frac{4+4+4}{4+4+4+2}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$$

이 답이 된다.

〔 2006년 03월 교육청 수리(가형) 28번 〕

28. 세 개의 주머니 A, B, C 에 모양과 크기가 같은 전구가 들어 있다. A 에는 노란 전구 2 개와 파란 전구 4 개, B 에는 노란 전구 3 개와 파란 전구 3 개, C 에는 노란 전구 1 개와 파란 전구 5 개가 들어 있다.

각 주머니에서 전구를 한 개씩 꺼냈더니 노란 전구가 두 개 나왔다고 한다. 이 때, A 에서 꺼낸 전구가 노란 전구일 확률은? [3 점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

17.

$\int_0^1 |t-e^x|dx = \int_0^a (t-e^x)dx + \int_a^1 (e^x - t)dx$ 에서 볼 수 있듯

적분해야 하는 변수는 a나 t가 아니라 오직 x뿐이며,

$e^a = t$, $a = \ln t$라는 관계를 이루고 있음에 주의하여 정적분을 마저 계산해보면

$$[tx - e^x]_0^a + [e^x - tx]_a^1 = at - e^a + 1 + e - e^a - t(1-a)$$

그리고 (가)에서 알 수 있다시피 이를 $f(t)$라 한다고 하였으므로 t에 대한 식으로 정리해주면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &t\ln t - t + 1 + e - t - t + t\ln t \\ &= 2t\ln t - 3t + 1 + e = f(t) \end{aligned}$$

이때 $f'(t) = 2\ln t + 2 - 3 = 2\ln t - 1$이므로 $t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ 에서 극솟값을 가지므로 $m = \sqrt{e}$ 이고, 따라서 $f(m) = f(\sqrt{e}) = \sqrt{e} - 3\sqrt{e} + 1 + e = (\sqrt{e} - 1)^2$이 답이다.

〔 2012년 05월 대성 수리(가형) 21번 〕

21. 실수 전체에서 미분가능하고 $f(0)=0$이며 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & (x \neq 0) \\ f'(0) & (x=0) \end{cases}$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$

ㄴ. $x \neq 0$일 때 $g'(x) > 0$이다.

ㄷ. $0 < t < 1$일 때 $\int_0^1 |g(t)x - f(x)|dx$의 값을 최소로 하는 t의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

적분 계산 연습 문제가 필요하다면

☞ http://cafe.naver.com/pnmath/813464

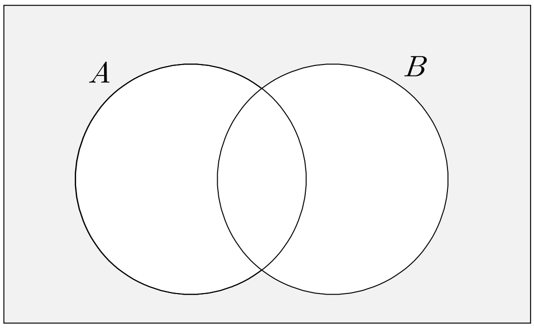
18.

$1,2,3,4,5$를 모두 한 번씩만 사용하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서

십의 자리의 수가 1 또는 2인 사건을 A,

일의 자리의 수가 1 또는 3인 사건을 B라고 하자.

그러면 구해야 하는 값은 $P(A^c \cap B^c)$로서 벤 다이어그램으로 나타내면



위와 같고, 따라서 $1 - P(A \cup B)$를 구하면 된다.

한편, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$로서

A가 일어날 확률은 십의 자리 수가 1 또는 2면 되므로 $P(A) = \dfrac{2}{5}$

혹은 $P(A) = \dfrac{2 \cdot 4!}{5!} = \dfrac{2}{5}$이고,

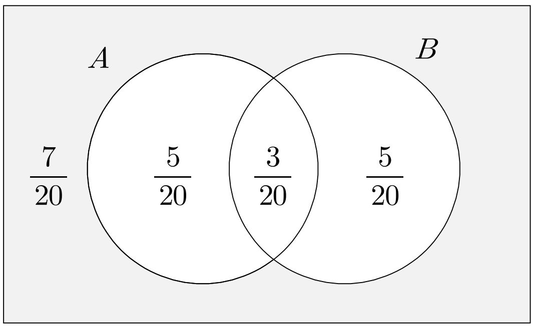
비슷하게 $P(B) = \dfrac{2}{5}$임을 알 수 있다.

그리고 A, B 두 사건이 동시에 일어날 확률은

□□□13, □□□21, □□□23의 세 경우를 취합한 것에 해당하는 $\dfrac{3!}{5!} \cdot 3 = \dfrac{3}{20}$이므로 $P(A \cup B) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20}$이다.

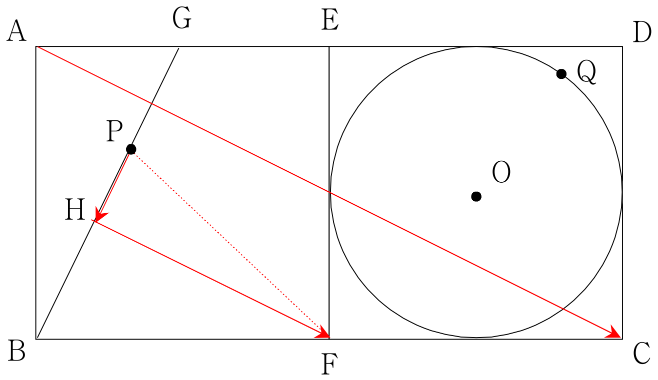
따라서 답은 $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \dfrac{13}{20} = \dfrac{7}{20}$이다.

※ 참고로 지금은 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$이므로 두 사건은 종속이다.



19.

ㄱ.



점 F에서 선분 BG에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AC}} // \overline{\mathrm{HF}}$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PF}} = \overrightarrow{\mathrm{PH}} + \overrightarrow{\mathrm{HF}}$로서 수직인 두 벡터의 합으로 나타내면

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{PH}} + \overrightarrow{\mathrm{HF}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HF}}$$

가 되어서 점 P의 위치에 상관없이 항상 일정하므로 ㄱ은 참.

ㄴ. 점 P에 의해 어떻게 $\overrightarrow{\mathrm{PF}}$가 결정되든지 상관없이 $\overrightarrow{\mathrm{PF}} // \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 되게 할 수 있으므로 $\overrightarrow{\mathrm{PF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leq \left|\overrightarrow{\mathrm{PF}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{PF}}\right|$가 된다. $\quad \because \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = 1$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값은 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}}\right|$의 최댓값과 같으며

이는 $\mathrm{P} = \mathrm{H}$일 때가 아니라 $\mathrm{P} = \mathrm{G}$로서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}}\right| \leq \left|\overrightarrow{\mathrm{GF}}\right| = \sqrt{5}$이므로 ㄴ도 참.

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{GQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}}$

$$\leq \sqrt{5} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}} = \sqrt{5} + \overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FP}}$$

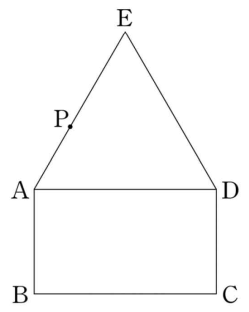
이고, 점 P의 위치에 관계없이 $\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FP}}$의 값은 $\sqrt{5} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{5}} = 4$로 일정하므로

$\overrightarrow{\mathrm{GQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}}$의 최댓값은 $\sqrt{5} + 4$가 되어 ㄷ도 참이다.

고로, 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

〔 2010년 09월 평가원 수리(가형) 14번 〕

14. 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

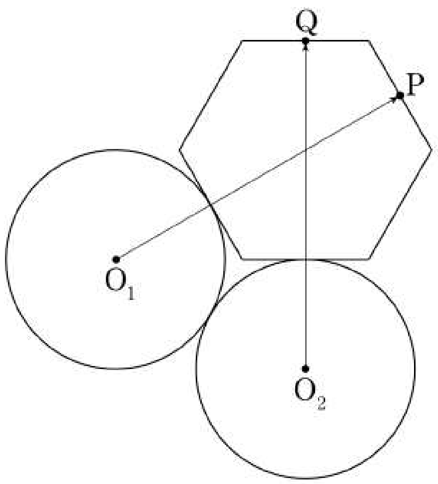
ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

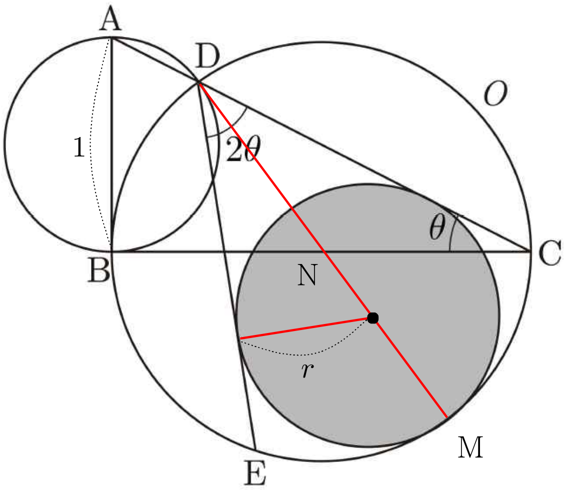
〔 2016학년도 포카칩 예비시행 수학 영역(B형) 29번 〕

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형과 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 중심이 각각 O_1, O_2인 두 원이 동시에 외접한다. 정육각형 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



20.

sol.1)



두 선분 ED, CD와 원 O에 동시에 내접하는 원의 반지름을 r이라 하고, 이 원과 원 O의 접점을 M이라 하자.

그리고 두 선분 BC, DM의 교점을 N이라 하였을 때, 삼각형 BCN은 이등변삼각형으로서 $\angle \mathrm{BND} = 2\theta$이므로 N은 선분 BC의 중점으로서 원 O의 중심이다.

따라서 선분 DM 역시 원 O의 지름이 됨을 알 수 있다.

즉, $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{DM}} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$이고, $\sin\theta = \dfrac{r}{\cot\theta - r}$임을 알 수 있다.

이를 정리해보면 $\sin\theta\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - r\right) = r$에서 $(1+\sin\theta)r = \cos\theta$로서

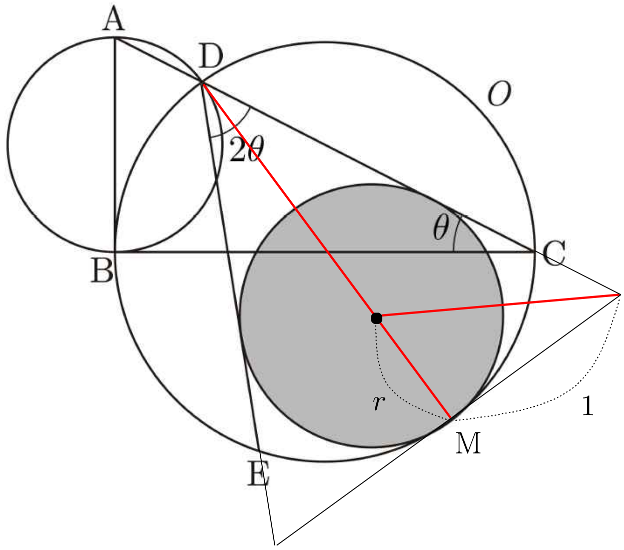
$r = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$이므로 $S(\theta) = \dfrac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}\pi$가 된다. 따라서

$$\pi - S(\theta) = \frac{(1+\sin\theta)^2 - \cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}\pi = \frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\pi$$

$$= \frac{2\sin\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\pi = \frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\pi$$

로서 답은 $\dfrac{2}{1+0}\pi = 2\pi$이다.

sol.2)



두 선분 ED, CD 의 연장선과 점 M에서의 접선으로 만든 이등변삼각형을 생각하자. 그러면 길이가 다른 변은 그 길이가 2이므로

$$r=\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$

라는 식을 세울 수 있다.

또, $\pi-S(\theta)=(1-r^2)\pi=(1+r)(1-r)\pi$로부터

$\theta\to0+$일 때 $r\to1-0$이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi-S(\theta)}{\theta}=2\pi\lim_{\theta\to0+}\frac{1-r}{\theta}$임을 알 수 있다.

그러면 $1-r=\dfrac{1+\tan\frac{\theta}{2}-\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$이므로 동일한 답을 얻는다.

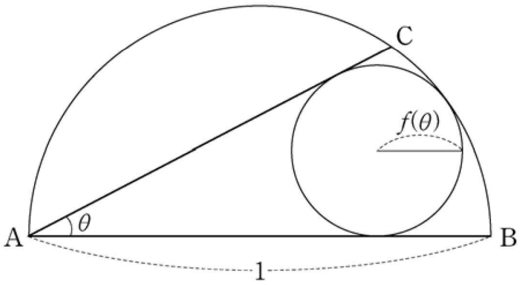
※ $r=\dfrac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$를 $\dfrac{1-\frac{\theta}{2}}{1+0}=1-\dfrac{\theta}{2}$로 잘못 근사해서 $1-r\simeq\dfrac{\theta}{2}$라 해버리면 오답을 얻는다. 왜냐하면 지금 구하고자 하는 것은 r값 뿐이라기 보다는 0으로 다가가는 $\pi-S(\theta)$를 이루는 $1-r$의 형태이기 때문에 $1-r$까지 구한 다음에 근사해야 한다. 예컨대 $1-r=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}\simeq\dfrac{2\cdot\frac{\theta}{2}}{1+\frac{\theta}{2}}\simeq\theta$로 보는 것은 유효하다.

〔 2015년 06월 평가원 수학 영역(B형) 29번 〕

29. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle BAC = \theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

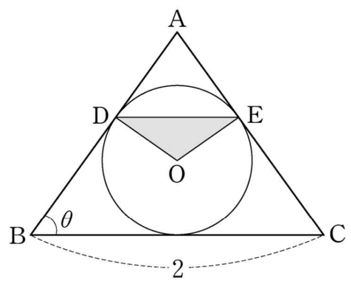
$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\tan\frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$$

이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



〔 2007년 11월 대수능 수리(가형) 28번 〕

28. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 $\angle ABC = \angle ACB = \theta$이고 $\overline{BC} = 2$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 선분 AB와 내접원이 만나는 점을 D, 선분 AC와 내접원이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 OED의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

21.

step.0) 이차함수 $f(x)$와, 함수 $g(x)=e^{-x}f(x)$라는 조건이 주어져 있다.

step.1) 여기에 (가)를 적용해보면 $g(0)=f(0)=3$으로서

이차함수 $f(x)$의 y절편이 3임을 알 수 있다.

step.2) 다음으로 (나)를 적용하고자

$(g(x)$의 최댓값$)\ \le\ \left(\left(x^2+1\right)e^{-x}+2\text{의 최솟값}\right)$

이라고 말할 수는 없지만, 편의상 $h(x)=g(x)-\left(x^2+1\right)e^{-x}$라 하였을 때,

$(h(x)$의 최댓값$)\ \le\ 2$

라고는 말할 수 있다.

step.3) 이제 $h(x)$를 조금 더 분석해보자.

$$h(x)=e^{-x}f(x)-\left(x^2+1\right)e^{-x}=e^{-x}\left\{f(x)-\left(x^2+1\right)\right\}$$

이고, $h(x)$의 최댓값이 2 이하임을 알 수 있다.

step.4) 한편 $g(0)=f(0)=3$이므로 $h(0)$도 한 번 구해보면 때마침

$$h(0)=f(0)-1=2\le 2$$

가 되어 $h(x)$의 최댓값이 2이고,

나아가 $h(x)$는 미분가능한 함수이므로 2를 극댓값으로 가져야만 한다.

즉, $h'(0)=0$이 되어야 한다. 미분하여 마저 계산해보면

$$\begin{aligned}h'(x)&=-e^{-x}\left\{f(x)-\left(x^2+1\right)\right\}+e^{-x}\left\{f'(x)-2x\right\}\\&=e^{-x}\left\{-f(x)+f'(x)+x^2-2x+1\right\}\end{aligned}$$

이고, $h'(0)=-f(0)+f'(0)+1=f'(0)-2=0$에서 $f'(0)=2$이다.

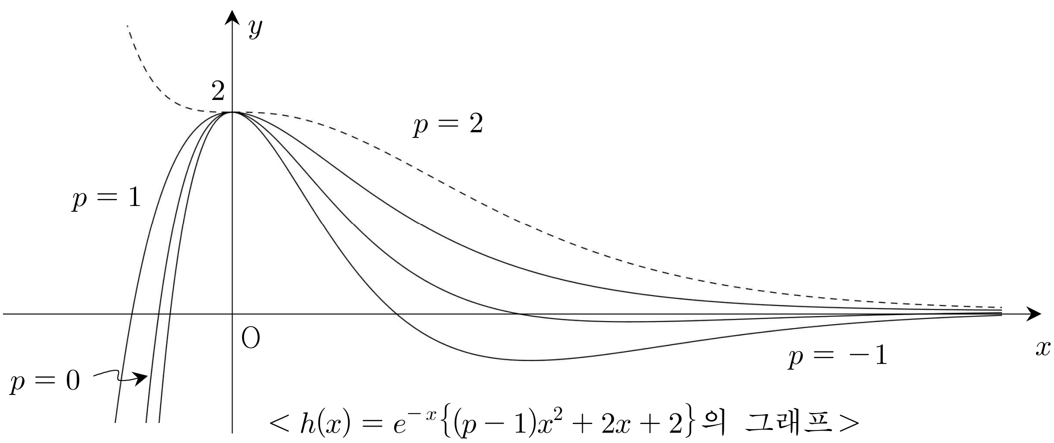
예컨대 이차함수 $f(x)$를 $f(x)=px^2+qx+r$이라 두었다면 지금까지의 정보들로 미루어 $f(x)=px^2+2x+3$이라고 정리할 수 있을 것이다.

그러므로 $h(x)=e^{-x}\left\{(p-1)x^2+2x+2\right\}$가 된다.

step.5) 이때 $p-1\ne 0$이면, 가령 $p-1>0$이면 $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\infty$가 되어서

$h(x)$의 최댓값이자 극댓값이 2임에 모순이다.

step.6) 따라서 $p-1\le 0$이고, $f(1)=p+5\le 6$이 답이 된다.



< $h(x)=e^{-x}\left\{(p-1)x^2+2x+2\right\}$의 그래프 >

26.

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$ 와 $(\tan x)'=\sec^2 x$ 임을 이용하자.

(가) 조건에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\tan^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\left(\sec^2 x-1\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\sec^2 x dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=f(1)$$

임을 얻고, $\tan x=t$ 로 치환하여 적분하면 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=\int_0^1 f(t)dt-f(1)$ 이다.

그리고 (나) 조건은 $x_k=\dfrac{k}{n}$ 로 두었을 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 xf'(x)dx=-10$$

이고, 부분적분에 의해 $[xf(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=-10$ 에서 $f(1)-\int_0^1 f(x)dx=-10$

그리고 거짓 변수(dummy variable)로 정적분 도중에 등장하는 변수 x, t 는 지금 중요치 않기에 $\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx$ 로 볼 수 있으므로

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=\int_0^1 f(t)dt-f(1)=-\left\{f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right\}=10$$

〔 2009년 11월 대수능 수리(가형) 29번 〕

29. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}\,dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}\,dx=-k$

ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면, $k=0$이다.

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin\pi x$이면, $k=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27.

우선 홀수 조건부터 완화시키기 위해서

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$이라 하자.

(가) 조건에 대입해보면 $1\le a'\le b'\le c'\le d'$을 얻고,

(나) 조건에서는 $a'+b'+c'+d'=10$이 되어

$P(10,4)$를 구하는 문제가 된다. 한 번 내림차순으로 나열해보면

$$\begin{aligned}10&=7+1+1+1=6+2+1+1=5+3+1+1=5+2+2+1\\&=4+4+1+1=4+3+2+1=4+2+2+2\\&=3+3+3+1=3+3+2+2\end{aligned}$$

로서 총 9가지이므로 답은 $P(10,4)=9$이다.

※ 만약 (가) 조건에서 대소관계 없이 1이상 네 정수 a',b',c',d'라 하였다면

다시 $a'=a''+1$, $b'=b''+1$, $c'=c''+1$, $d'=d''+1$에서

$$a''+b''+c''+d''=6$$

으로, a'',b'',c'',d''는 모두 음이 아닌 정수가 되어

(나) 조건에서는 중복조합을 써서 ${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$가 답으로 나오겠지만,

한 번 중복조합 공식 ${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$을 유도하는 과정을 상기해보면

$n-1$개의 칸막이와 r개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수로서

$n+r-1$개의 자리를 일렬로 배치하였을 때 r개의 공의 위치를 선택하는 것이기에

고로 중복조합을 이용하면 $a''\le b''\le c''\le d''$의 관계를 항상 만족한다 할 수 없다.

대신 이를 항상 만족시키는 것이 바로 자연수의 분할이다.

〔 미래엔 확률과 통계(이강섭) 〕

자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 것을 다음과 같이 나타낸다.
$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$
(단, $n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_k\ge 1$)

자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 **자연수의 분할**이라고 한다.

예를 들어, 자연수 5를 분할하는 방법은 다음과 같다.

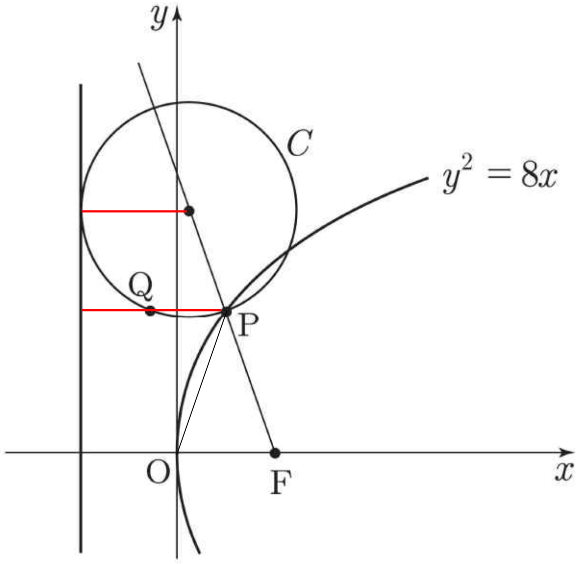
$$\begin{aligned}5&=5\\&=4+1=3+2\\&=3+1+1=2+2+1\\&=2+1+1+1\\&=1+1+1+1+1\end{aligned}$$

자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수를 기호로

$$\boldsymbol{P(n,k)}$$

와 같이 나타낸다.

28.



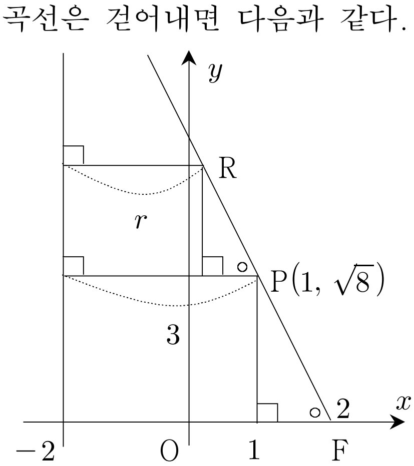
보통 포물선 문제에서는 그 위의 한 점에서 초점을 연결한 선분과, 준선에 내린 수선을 이용하여 접근한다.
그런데 지금은 그러한 보조선뿐만 아니라, 준선에 접하는 원과 관련해서도 보조선을 이용하여야 하고, 포물선 위의 점 P에서 준선에 내린 수선 위에 점 Q가 존재하는 것처럼 보이는데 이를 수식을 통해 정당화해야 한다.
당연히 점 P에서 준선에 내린 수선 위에 점 Q가 있을 거라 여기고 풀면 안 된다는 얘기이다.

점 P의 x좌표는 $-2+3=1$이므로 $\mathrm{P}(1,\ \sqrt{8})$이고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발이 선분 OF를 수직 이등분하므로 삼각형 OPF는 이등변삼각형임을 알 수 있다.
또한 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{1+8} = 3$에서 $\overline{\mathrm{OQ}} < \overline{\mathrm{OP}}$라 하였으므로 $4\overline{\mathrm{OQ}}^2 < 36$이 되어야 한다.

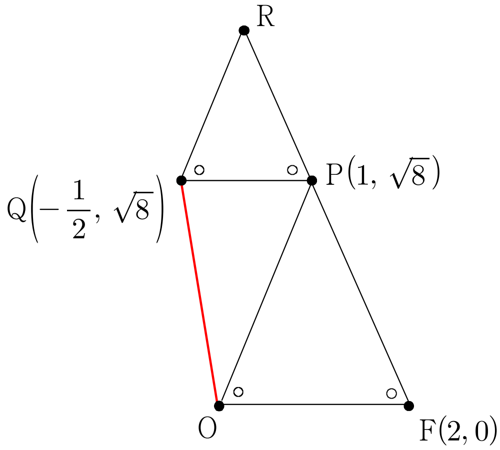
다음으로 원의 반지름을 찾기 위해 $\cos(\angle \mathrm{PFO})$를 이용하자.
원 C의 중심을 편의상 R이라 하였을 때 불필요한 곡선은 걷어내면 다음과 같다.
원 C의 반지름 r과 $\overline{\mathrm{FP}}, \overline{\mathrm{RP}}$를 빗변으로 하는 직각 삼각형에 대하여

$$\cos(\angle \mathrm{PFO}) = \frac{1}{3} = \frac{3-r}{r} = \frac{3}{r} - 1$$

이므로 $r = \dfrac{9}{4}$임을 알 수 있다.



그러면 또 놀랍게도, 삼각형 QRP가 이등변삼각형 OPF과 닮음이 된다는 것을 알 수 있다. 15번과 마찬가지로 길이를 구해보고 그냥 아는 것이다.



왜냐하면 이등변삼각형 OPF의 세 변의 길이는 각각 $3, 3, 2$인데,

삼각형 QRP의 세 변의 길이는 $\frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}$로서 닮음비가 $4:3$인 관계이다.

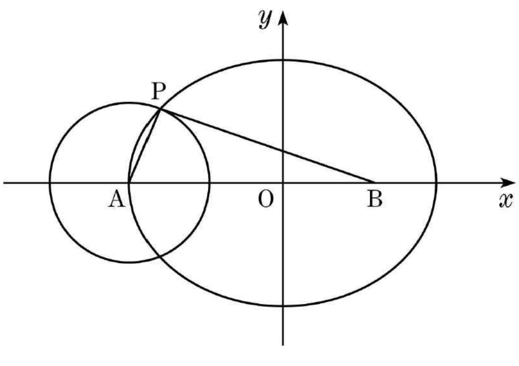
더군다나 세 점 F, P, R이 직선 FP위에 존재하므로 선분 PQ가 x축과 평행함을 알 수 있다. 이렇게 되면 처음부터 그럴 것이라고 두고 푸는 것과 별 반 다를 바 없는 문제가 되어서 다소 아쉬운 감이 있다.

따라서 점 Q는 점 P를 x축 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼 떨어진 곳에 위치하므로

$\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{8}\right)$이 되어 $4\overline{\mathrm{OQ}}^2 = 4\left(\frac{1}{4}+8\right) = 33$이 답임을 알 수 있다.

〔 **2013년 10월 교육청 수학 영역(B형) 27번** 〕

27. 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(-5, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 한 교점을 P라 하자. 점 $\mathrm{B}(3, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$일 때, $10r$의 값을 구하시오. [4점]



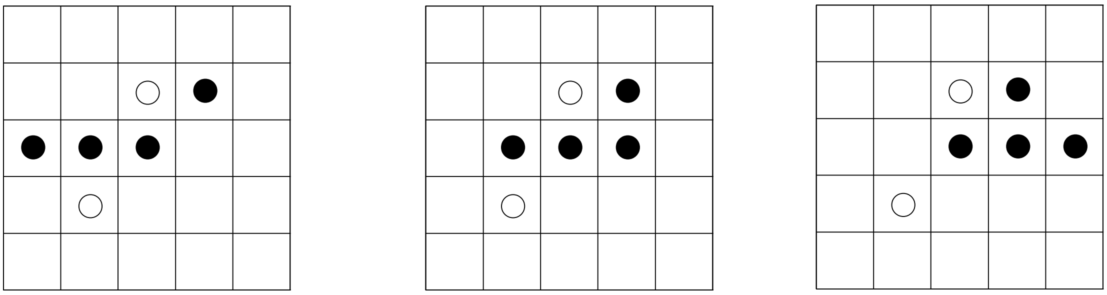
29.

검은 돌이 먼저 두었으며, 검은 돌은 앞으로 최대 두 수를, 흰 돌은 최대 한 수를 더 둘 수 있다. 그런데 을은 한 수를 더 두어서 절대로 이길 수 없으므로 결국 총 7수 이내에 '삼목'이 만들어지는 경우의 수는 검은 돌이 5수 만에 끝내는 경우와 7수만에 끝내는 경우를 각각 구하여 취합한 것과 같다.

먼저 5수 만에 끝내는 경우는 1행 5열에 두는 것으로 1가지이다.

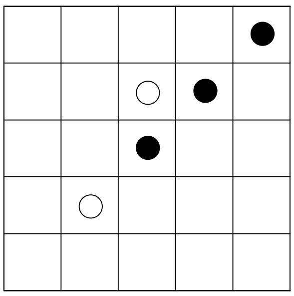
다음으로 7수 만에 끝내는 경우는, 다시 검은 돌 세 개가 이루는 기울기값 네 가지인 $0, 1, -1, \infty$로 나누어 생각해보자.

i) 검은 돌 세 개가 이루는 기울기가 0



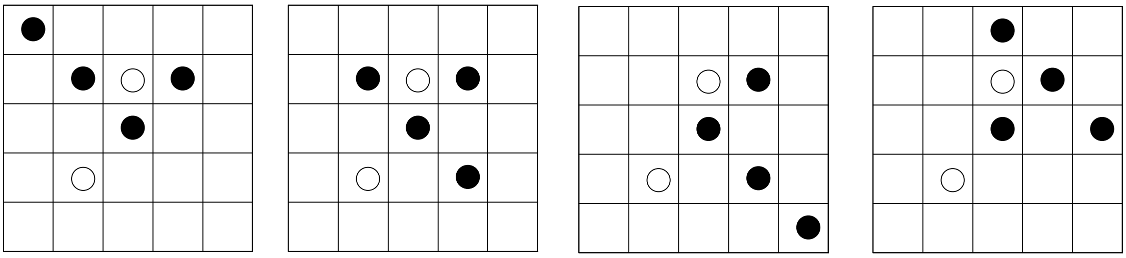
검은 돌이 5, 7수를 둘 위치를 제외하고 흰 돌이 6수를 둘 수 있는 곳은
$25-(4+2)=19$군데이고,
검은 돌의 5, 7수 순서를 고려하면 $(19\times 2)\times 3$가지이다.

ii) 검은 돌 세 개가 이루는 기울기가 1
5수 만에 끝내지 않고 7수째에 1행 5열에 두는 경우 뿐이므로



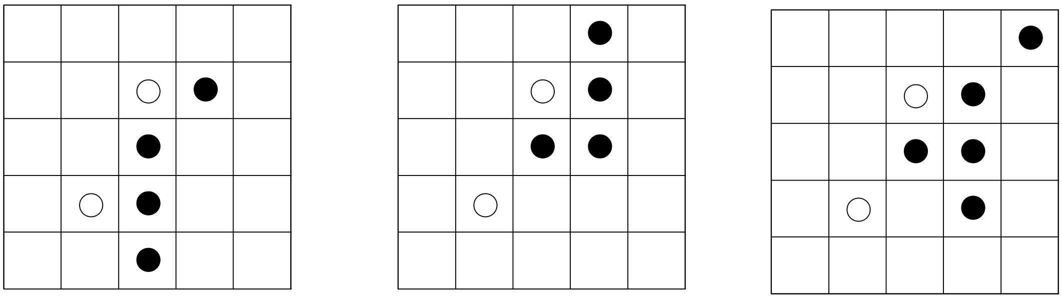
검은 돌의 5, 7수 순서는 정해져 있고,
5수, 6수에 검은 돌과 흰 돌을 둘 수 있는 위치는 ${}_{20}\mathrm{P}_2=20\times 19$가지이다.

iii) 검은 돌 세 개가 이루는 기울기가 -1



ii)와 마찬가지로 검은 돌이 5, 7수를 둘 위치를 제외하고 흰 돌이 6수를 둘 수 있는 곳은 $25-(4+2)=19$군데이고,
검은 돌의 5, 7수 순서를 고려하면 $(19\times 2)\times 4$가지이다.

iv) 검은 돌 세 개가 이루는 기울기가 ∞



ii)와 마찬가지로 검은 돌이 5, 7수를 둘 위치를 제외하고 흰 돌이 6수를 둘 수 있는 곳은 $25-(4+2)=19$군데이고,
검은 돌의 5, 7수 순서를 고려하면 $(19\times 2)\times 3$가지이다.

고로, $1+19\cdot 6+19\cdot 20+19\cdot 8+19\cdot 6=1+19(6+20+8+6)=761$이 답이다.

〔 2004년 05월 교육청 수리(가형) 21번 〕

21. 부등식 $|x|+|y|\leqq 2$를 만족하는 좌표평면 위의 임의의 점 $(x,\ y)$ 중에서 세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하시오. (단, $x,\ y$는 정수) [3점]

30.

크게 문제를 분석하자면,

① 개정 교육과정에서 강조되고 있는 매개변수 문제이면서,

② 함수를 다단계적으로 정의하되,

③ 그래프 개형보다는 수식에 의존해서 풀어도 답이 나올 것 같은 문제이다.

함수 $y=g(x)$를 매개변수 t로 나타내서 그 위에 있는 점을 $\left(e^t, \ln|f(t)|\right)$라 할 수 있는데, 이의 개형을 따지기 위해서는

$$g'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{f'(t)}{f(t)}}{e^t}=\frac{f'(t)}{e^t f(t)}$$

을 이용하여야 한다.

그리고 문제에서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항 계수가 1이라 하였으므로

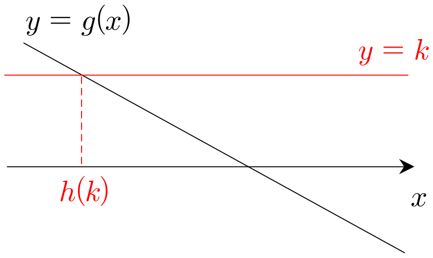
$$\frac{f'(t)}{e^t f(t)}=\frac{3t^2+\cdots}{t^3e^t+\cdots}$$

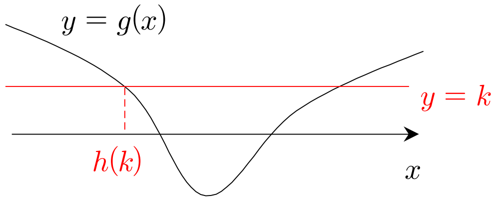
로서 $t\to\infty$일 때 $x\to\infty$, $g'(x)\to 0$이고,

또한 $t\to-\infty$일 때 $x\to 0+$, $g'(x)\to-\infty$이 되어

$y=g(x)$는 y축을 점근선으로 갖는다는 것을 알 수 있다.

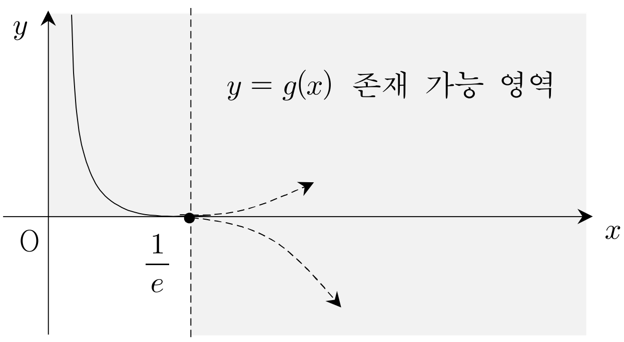
한편 $h(k)$를 정의하길 $g(x)\le k$를 만족시키는 x의 최솟값이라 하였는데, 예를 들어





와 같이 $h(k)$가 $y=g(x)$와 $y=k$의 관계에 따라 x축 상의 어떤 값으로 정의된다.

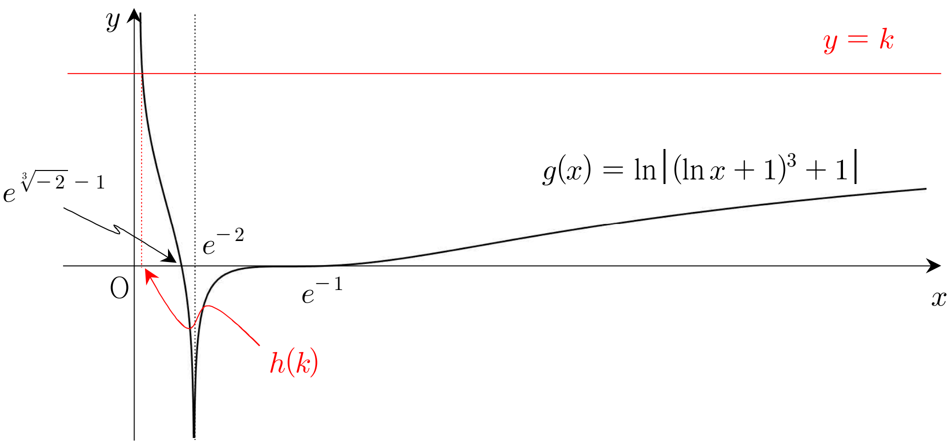
그래프 개형을 파악하고자 (나) 조건을 먼저 이용해보면



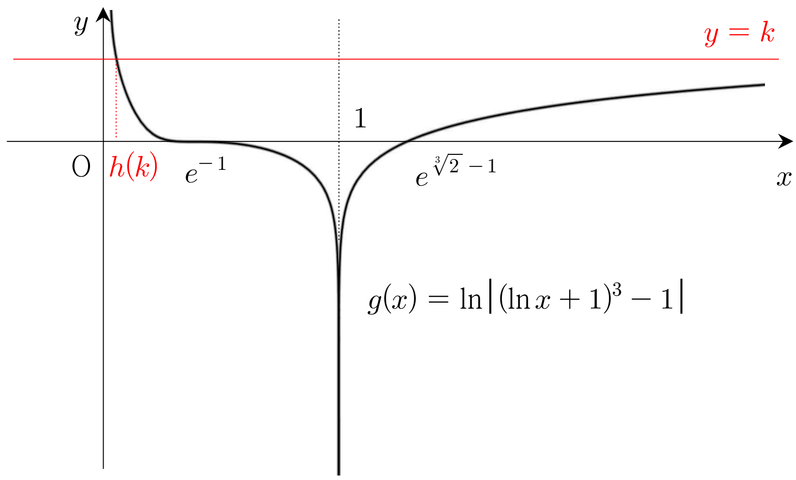
$h(0)=e^{-1}$이라는 것은 $k=0$일 때 $y=g(x)$의 x좌표가 e^{-1}가 된다는 것이므로 $g\left(e^{-1}\right)=0$이 된다. 이 경우 $t=-1$이다.
그리고 $y=g(x)=\ln|f(\ln x)|$에서 $x=e^{-1}$일 때 $0=\ln|f(-1)|$로서 $f(-1)=\pm1$임을 알 수 있다.
다음으로 (가) 조건을 살펴보자.
$h(k)$가 연속함수임에도 $k=0$에서 미분가능하지 않으려면
 i) $h(k)$가 $k=0$에서 첨점을 갖거나
 ii) $h(k)$가 $k=0$에서 수직 기울기를 가지면 된다.
$k=0$이면 $x=e^{-1}$이고 $t=-1$인데, 점 $\left(e^{-1},0\right)$을 지나는 $y=g(x)$의 개형과 비교해보면 i)은 일어날 수가 없음을 알 수 있다. k값이 $0+$에서 0을 지나 $0-$로 감소하는 과정을 생각해보자.
따라서 $h(k)$는 $k=0$에서 수직 기울기를 가져야 하고, $g'\left(e^{-1}\right)=0$이면 된다.
그러면 $g'(x)=\dfrac{f'(t)}{e^t f(t)}=\dfrac{f'(\ln x)}{x f(\ln x)}$에서 $f'(-1)=0$이 되어야 하고,
점 $\left(e^{-1},0\right)$은 $y=g(x)$의 극(솟)값이 되거나 아니면 변곡점이 되어야 한다.

그런데 만약 점 $\left(e^{-1},0\right)$가 $y=g(x)$의 극솟값이면 $h(k)$는 불연속함수가 되어서
(가) 조건에 모순이므로 점 $\left(e^{-1},0\right)$는 $y=g(x)$의 변곡점이 되어야 한다.
따라서 $f''(-1)=0$임을 알 수 있고,
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f가 또한 변곡점 $(-1,\pm1)$대칭인 함수라는 점을 이용하면 $f(x)=(x+1)^3\pm1$이 된다.

그리고 $f(x)=(x+1)^3+1$이면 $y=g(x)=\ln|f(\ln x)|=\ln\left|(\ln x+1)^3+1\right|$에서
x축과의 교점이 $x=e^{-1}$에서 뿐만 아니라
$(\ln x+1)^3+1=\pm1$를 만족하는 $\ln x+1=\sqrt[3]{-2}$, 즉 $x=e^{\sqrt[3]{-2}-1}\left(<e^{-1}\right)$에서도 발생하므로 (나)의 조건에 모순이 된다.



반면, $f(x) = (x+1)^3 - 1$이면 $y = g(x) = \ln|f(\ln x)| = \ln\left|(\ln x + 1)^3 - 1\right|$에서
x축과의 교점이 $x = e^{-1}$에서 뿐만 아니라
$(\ln x + 1)^3 - 1 = \pm 1$를 만족하는 $\ln x + 1 = \sqrt[3]{2}$, 즉 $x = e^{\sqrt[3]{2}-1}\left(> e^{-1}\right)$에서도 발생하므로 (나)의 조건에 드러맞는다.



고로, $f(x) = (x+1)^3 - 1$이므로 $f(3) = 4^3 - 1 = 63$이 답이 된다.

〔 2010년 11월 대수능 수리(가형) 24번 〕

24. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a \text{에서 } \underline{\text{미분가능하지 않다}}.\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

[4점]

〔 2016년 03월 교육청 수학(가형) 30번 〕

30. 함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$에 대하여 부등식 $f(x) \geq t\ (t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t=\dfrac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$) [4점]