

수학 영역(가형)

제 2 교시

성명	
----	--

수험번호						3			
------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

1

1. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{3}$ 일 때, $\frac{1}{\cos\theta} \left(\tan\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} \right)$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{45}{16}$ ② $\frac{43}{16}$ ③ $\frac{41}{16}$ ④ $\frac{39}{16}$ ⑤ $\frac{37}{16}$

3. $\sin\theta = \frac{2}{3}$ 일 때, $\cos 2\theta$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{5}{x}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{e^5}$ ② $\frac{1}{e^3}$ ③ 1 ④ e^3 ⑤ e^5

4. 함수 $f(x) = e^{3x} + 10x$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 17 ② 16 ③ 15 ④ 14 ⑤ 13

5. 함수 $f(x) = \sqrt{5} \sin x + 2\cos x + a$ 의 최댓값이 7일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. $\int_e^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 두 사건 A, B 에 대하여 $P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A) = \frac{2}{5}P(B)$ 일 때,

$\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$ 의 값은? (단, $P(A \cap B) \neq 0$ 이다.) [3점]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

8. 좌표평면에서 두 직선 $y = x, y = -2x$ 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan \theta$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

9. 함수 $y = e^x$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y = ax$ ($0 < a < e$)에 의하여 이등분될 때, 상수 a 의 값은[3점]

- ① $e - \frac{1}{3}$ ② $e - \frac{1}{2}$ ③ $e - 1$
 ④ $e - \frac{4}{3}$ ⑤ $e - \frac{3}{2}$

10. 세대당 종자의 평균 분산거리가 D 이고 세대당 종자의 증식률이 R 인 나무의 10세대 동안 확산에 의한 이동거리를 L 이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L^2 = 100D^2 \times \log_3 R$$

세대당 종자의 평균 분산거리가 각각 20, 30인 A나무와 B나무의 세대당 종자의 증식률을 각각 R_A, R_B 라 하고 10세대 동안

확산에 의한 이동거리를 각각 L_A, L_B 라 하자. $\frac{R_A}{R_B} = 27$ 이고

$L_A = 400$ 일 때, L_B 의 값은? (단, 거리의 단위는 m이다.) [3점]

- ① 200 ② 300 ③ 400 ④ 500 ⑤ 600

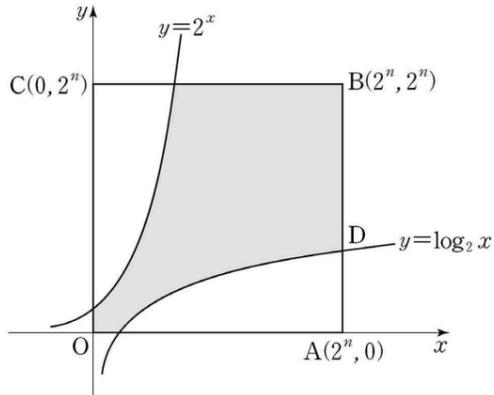
11. 자연수 n 에 대하여 직선 $y = nx + (n+1)$ 이 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$ 이고 초점이 $(a_n, 0)$ 인 포물선에 접할 때, $\sum_{n=1}^5 a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

12. 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ 위의 점 $A(4, 1)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하자. 이 쌍곡선의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F 라 할 때, 삼각형 FAB 의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[13~14] 좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $O(0, 0)$, $A(2^n, 0)$, $B(2^n, 2^n)$, $C(0, 2^n)$ 인 정사각형 $OABC$ 와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, n 은 자연수이다.)



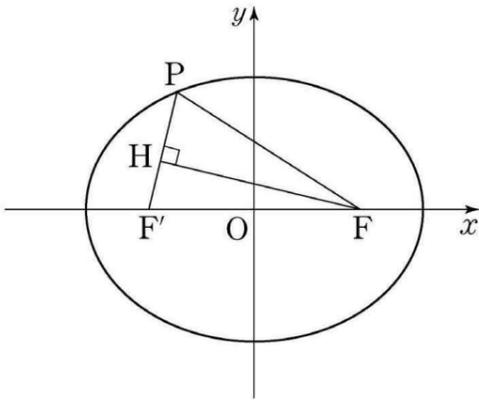
13. 선분 AB 가 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 D 라 하자. 선분 AD 를 $2:3$ 으로 내분하는 점을 지나고 y 축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 E , 점 E 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점을 F 라 하자. 점 F 의 y 좌표가 16일 때, 직선 DF 의 기울기는? [3점]

- ① $-\frac{13}{28}$ ② $-\frac{25}{56}$ ③ $-\frac{3}{7}$ ④ $-\frac{23}{56}$ ⑤ $-\frac{11}{28}$

14. 정사각형 $OABC$ 와 그 내부는 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 에 의하여 세 부분으로 나뉜다. $n=3$ 일 때 이 세 부분 중 색칠된 부분의 넓이는? [4점]

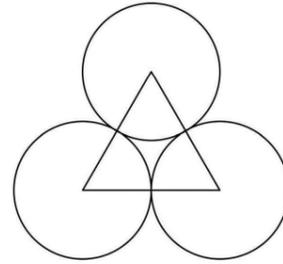
- ① $14 + \frac{12}{\ln 2}$ ② $16 + \frac{14}{\ln 2}$ ③ $18 + \frac{16}{\ln 2}$
 ④ $20 + \frac{18}{\ln 2}$ ⑤ $22 + \frac{20}{\ln 2}$

17. 그림과 같이 두 초점 F, F' 이 x 축 위에 있는 타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{a} = 1$ 위의 점 P 가 $\overline{FP} = 9$ 를 만족시킨다. 점 F 에서 선분 PF' 에 내린 수선의 발 H 에 대하여 $\overline{FH} = 6\sqrt{2}$ 일 때, 상수 a 의 값은? [4점]



- ① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

18. 그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



- ① 1260 ② 1680 ③ 2520 ④ 3760 ⑤ 5040

19. $0 < a < 1 < b$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 두 함수 $f(x) = \log_a(bx - 1)$, $g(x) = \log_b(ax - 1)$ 이 있다. 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축의 교점이 곡선 $y = g(x)$ 의 점근선 위에 있도록 하는 a 와 b 사이의 관계식과 a 의 범위를 옳게 나타낸 것은? [4점]

- ① $b = -2a + 2 \left(0 < a < \frac{1}{2}\right)$
 ② $b = 2a \left(0 < a < \frac{1}{2}\right)$
 ③ $b = 2a \left(\frac{1}{2} < a < 1\right)$
 ④ $b = 2a + 1 \left(0 < a < \frac{1}{2}\right)$
 ⑤ $b = 2a + 1 \left(\frac{1}{2} < a < 1\right)$

20. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는? [4점]

(가) $a + b + c = 6$
 (나) 좌표평면에서 세 점 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$ 가 한 직선 위에 있지 않다.

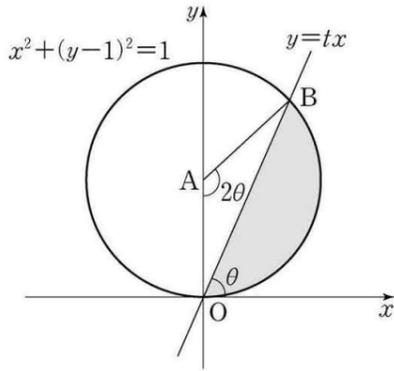
- ①19 ②20 ③21 ④22 ⑤23

21. 양의 실수 t 에 대하여 좌표평면에서 x, y 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ y \leq tx \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이를 $f(t)$ 라 하자. 다음은 $f'(2)$ 의 값을 구하는 과정이다.

원 $C : x^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 중심을 A, 원 C와 직선 $l : y = tx$ 가 만나는 두 점을 각각 O, B라 하자.



직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를

$\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 라 하면 $\angle OAB = 2\theta$ 이다.

주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하면 $g(\theta) = \theta - \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

$t = \tan\theta$ 이므로 $g(\theta) = f(t) = f(\tan\theta)$ 이고,

합성함수의 미분법에 의하여 $g'(\theta) = f'(t) \times \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

$t = 2$ 일 때, $\tan\theta = 2$ 이므로 $f'(2) = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $h_1(\theta), h_2(\theta)$ 라 하고 (다)에

알맞은 수를 a 라 할 때, $a \times h_1\left(\frac{\pi}{4}\right) \times h_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{8}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{12}{25}$ ④ $\frac{14}{25}$ ⑤ $\frac{16}{25}$

단답형

22. 12를 네 개의 자연수로 분할하는 방법 중에서 5를 포함하는 방법의 수를 구하시오. [3점]

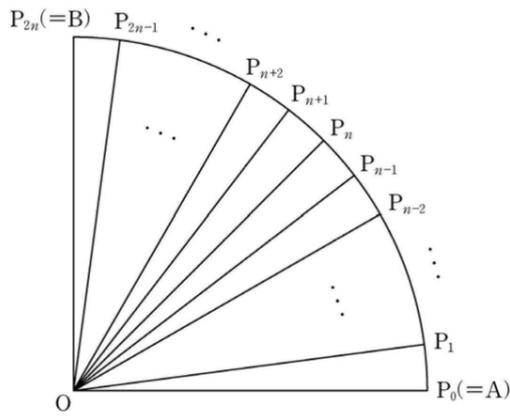
23. $(ax + \frac{1}{x})^4$ 의 전개식에서 상수항이 54일 때, 양수 a 의 값을 구하시오. [3점]

24. 서로 평행하지 않은 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=2$ 이고 $\vec{a} \cdot \vec{b}=2$ 일 때, 두 벡터 \vec{a} 와 $\vec{a}-t\vec{b}$ 가 서로 수직이 되도록 하는 실수 t 의 값을 p 라 할 때, $20p$ 의 값을 구하시오. [3점]
25. 로그방정식 $\log_8 x - \log_8 (x-7) = \frac{1}{3}$ 의 해를 구하시오. [3점]
26. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(x)\ln x^4$ 이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e, -e)$ 에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e, -4e)$ 에서의 접선이 서로 수직일 때, $100f'(e)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 중심이 O , 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 자연수 n 에 대하여 호 AB 를 $2n$ 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $P_0(=A), P_1, P_2, \dots, P_{2n-1}, P_{2n}(=B)$ 라 하자. 주어진 자연수 n 에 대하여 S_k ($1 \leq k \leq n$)을 삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$ 의 넓이라 할 때,

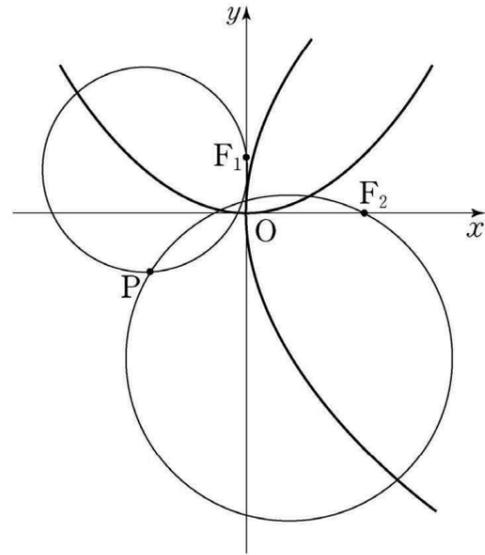
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{a}{\pi}$$

일 때, $30a$ 의 값을 구하시오. [4점]



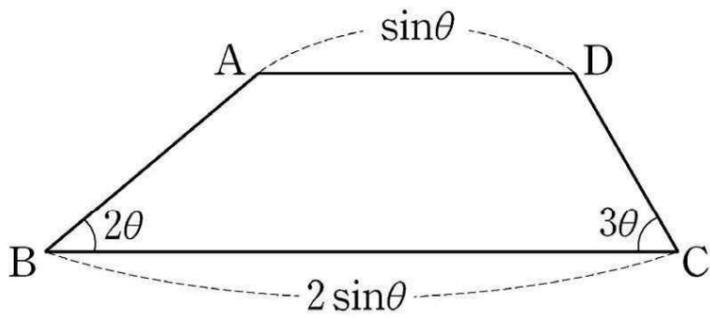
28. 좌표평면에서 포물선 $C_1: x^2 = 4y$ 의 초점을 F_1 , 포물선 $C_2: y^2 = 8x$ 의 초점을 F_2 라 하자. 점 P 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1 을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원의 교점이다.
- (나) 제3사분면에 있는 점이다.



원점 O 에 대하여 $\overline{OP^2}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 사다리꼴 ABCD에서 변 AD와 변 BC가 평행하고 $\angle B=2\theta$, $\angle C=3\theta$, $\overline{BC}=2\sin\theta$, $\overline{AD}=\sin\theta$ 이다. 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점 P 는 제1사분면에 있다.
- (나) 삼각형 $PF'F$ 가 이등변삼각형이다.

삼각형 $PF'F$ 의 넓이를 a 라 하고, 모든 a 의 값의 곱을 p 라 할 때, $\frac{p^2}{9}$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.