

수학 영역(가형)

제 2 교시

성명

수험번호 3

1

1. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ 일 때, $\sin x \cos x$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

2. 두 벡터 $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (3, -2)$ 이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{9}{13}$ ③ $\frac{10}{13}$ ④ $\frac{11}{13}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

3. 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이고 $P(A \cup B) = 4P(B) = 1$ 일 때, $P(A)$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

4. 다음 정적분 중 그 값이 $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ 와 같은 것은 [3점]

- ① $\int_{a+1}^{b+1} \frac{1}{x} dx$ ② $\int_{2a}^{2b} \frac{1}{x} dx$ ③ $\int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{x} dx$
 ④ $\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{x} dx$ ⑤ $\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{x} dx$

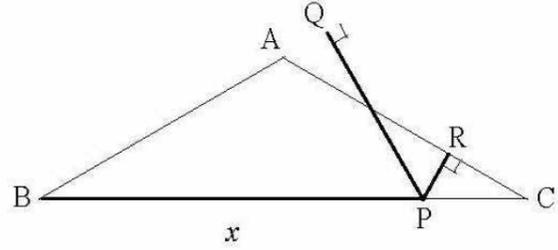
5. 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x-1} = 3$ 을 만족시킬 때, 미분계수 $f'(2)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

6. 1부터 100까지의 자연수에서 서로 다른 3개를 선택하는 방법 중, 17을 포함하도록 선택하는 방법의 수를 a 라 하고, 17을 포함하지 않도록 선택하는 방법의 수를 b 라고 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{94}{3}$ ② $\frac{95}{3}$ ③ $\frac{97}{3}$ ④ $\frac{98}{3}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

7. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC 의 변 BC 위를 움직이는 P 가 있다. 점 P 에서 변 AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 Q , 변 AC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 R 라고 하자.



$\overline{BP} = x$ 와 $\overline{PQ} + \overline{PR} = y$ 에 대하여 y 를 x 의 함수로 나타낼 때, 그 그래프의 개형은? [3점]

- ① ② ③ ④ ⑤

8. 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각이 60° 이다. \vec{b} 의 크기는 1이고 $\vec{a}-3\vec{b}$ 의 크기가 $\sqrt{13}$ 일 때, \vec{a} 의 크기는? [3점]

- ① 1 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

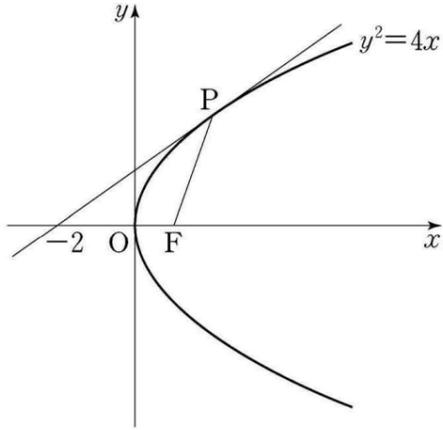
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^3 + 5x^2 + 4x)}{2x^3 + 2x^2 + x}$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 3 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sin 3}{2}$

9. 어느 공항에서 A, B 두 대의 검색대만 있으며, 비행기 탑승 전에는 반드시 공항 검색대를 통과하여야 한다. 남학생 7명, 여학생 7명이 모두 A, B 검색대를 통과하였는데, A 검색대를 통과한 남학생은 4명, B 검색대를 통과한 남학생은 3명이다. 여학생 중에서 한 학생을 임의로 선택할 때, 이 학생이 A 검색대를 통과한 여학생일 확률은 p 라 하자. B 검색대를 통과한 학생 중에서 한 학생을 임의로 선택할 때, 이 학생이 남학생일 확률을 q 라 하자. $p=q$ 일 때, A 검색대를 통과한 여학생은 모두 몇 명인가? (단, 두 검색대를 모두 통과한 학생은 없으며 각 검색대로 적어도 1명의 여학생이 통과하였다.) [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 그림과 같이 초점이 F 인 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 한 점 P 에서의 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -2 이다. $\cos(\angle PFO)$ 의 값은? (단 O 는 원점이다.) [3점]



- ① $-\frac{5}{12}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $-\frac{1}{12}$

12. 쌍곡선 $9x^2 - 16y^2 = 144$ 의 초점을 지나고 점근선과 평행한 4개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{75}{16}$ ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{75}{4}$ ⑤ $\frac{75}{2}$

13. 함수 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^6} dt$ 에 대하여 상수 a 가 $f(a) = \frac{1}{2}$ 을

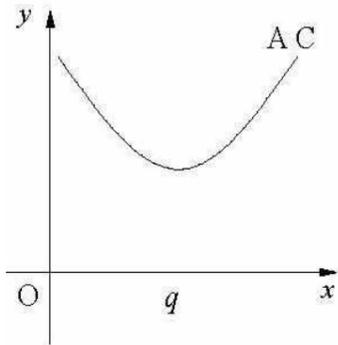
만족 시킬 때, $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ② $\sqrt{e}-1$ ③ 1
 ④ $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$ ⑤ $\sqrt{e}+1$

14. 세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 1과 2가 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는? [4점]

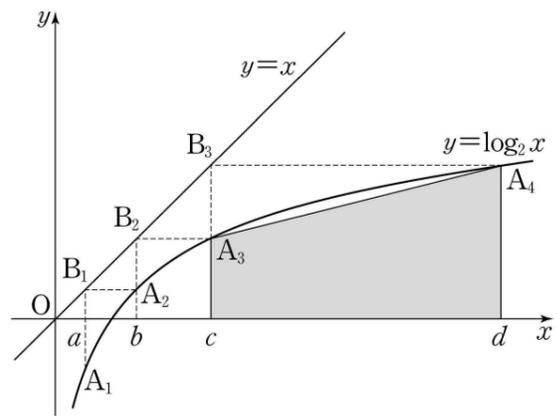
- ① 58 ② 56 ③ 54 ④ 52 ⑤ 50

15. 어떤 제품의 생산량이 x 일 때 생산비를 $f(x)$ 라고 하자. 이때, $\frac{f(x)}{x}$ 를 평균생산비라 하고, AC로 나타낸다. 또, $f(x)$ 가 미분 가능하면 $f'(x)$ 를 생산량이 x 일 때의 한계생산비라 하고 MC로 나타낸다. 평균 생산비 $AC = \frac{f(x)}{x}$ 의 그래프가 그림과 같고 $x=q$ 에서 극솟값을 가질 때, $x=q$ 근방에서 한계생산비 $MC = f'(x)$ 의 그래프의 개형은? [4점]



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

16. 그림과 같이 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 한 점 A_1 에서 y 축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 B_1 이라 하고, 점 B_1 에서 x 축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을 A_2 라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 점 A_2 로부터 점 B_2 와 점 A_3 을, 점 A_3 으로부터 점 B_3 과 점 A_4 를 얻는다. 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4 의 x 좌표를 차례로 a, b, c, d 라 하자. 네 점 $(c, 0), (d, 0), (d, \log_2 d), (c, \log_2 c)$ 를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수 $f(x) = 2^x$ 을 이용하여 a, b 로 나타낸 것과 같은 것은? [4점]



- ① $\frac{1}{2} \{f(b)+f(a)\} \{(f \circ f)(b)-(f \circ f)(a)\}$
- ② $\frac{1}{2} \{f(b)-f(a)\} \{(f \circ f)(b)+(f \circ f)(a)\}$
- ③ $\{f(b)+f(a)\} \{(f \circ f)(b)+(f \circ f)(a)\}$
- ④ $\{f(b)+f(a)\} \{(f \circ f)(b)-(f \circ f)(a)\}$
- ⑤ $\{f(b)-f(a)\} \{(f \circ f)(b)+(f \circ f)(a)\}$

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $f(x) = x^2$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{x} = 0$ 이다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{f(x)} = 1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{f(x)} = \ln 3$ 이다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{x}$ 이 존재한다.

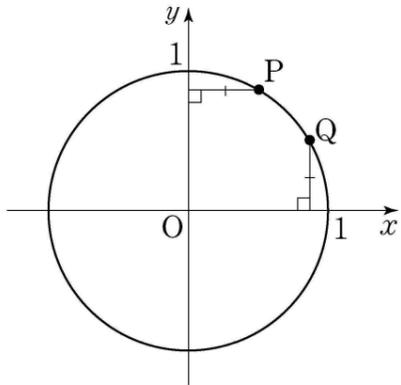
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 일 때, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 의 값은? [4점]

(단, $0 < \theta < \pi$)

- ① $-\frac{\sqrt{5}}{8}$ ② $-\frac{\sqrt{15}}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

19. 좌표평면에서 두 점 P, Q가 점 (1, 0)을 동시에 출발하여 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 시계 반대 방향으로 돌고 있으며, 점 P가 $2t$ ($0 \leq t \leq \pi$)만큼 움직일 때, 점 Q는 t 만큼 움직인다. 점 P에서 y 축까지의 거리와 점 Q에서 x 축까지의 거리가 같아지는 모든 t 의 값의 합은? [4점]



- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ $\frac{5\pi}{4}$ ⑤ $\frac{3\pi}{2}$

20. 한 개의 동전을 한 번 던지는 시행을 5번 반복한다. 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 표를 작성한다.

(가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 Δ , 뒷면이 나오면 \circ 를 표시한다.
 (나) 두 번째 시행부터
 (1) 뒷면이 나오면 \circ 를 표시하고,
 (2) 앞면이 나왔을 때, 바로 이전 시행의 결과가 앞면이면 \circ , 뒷면이면 Δ 를 표시한다.

예를 들어 동전을 5번 던져 '앞면, 뒷면, 앞면, 앞면, 뒷면'이 나오면 다음과 같은 표가 작성된다.

시행	1	2	3	4	5
표시	Δ	\circ	Δ	\circ	\circ

한 개의 동전을 5번 던질 때 작성되는 표에 표시된 Δ 의 개수가 2개일 확률은? [4점]

- ① $\frac{13}{32}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{17}{32}$ ④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

21. 함수 $f(x) = \sin \frac{x^2}{2}$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

단답형

<보기>

ㄱ. $0 < x < 1$ 일 때, $x^2 \sin \frac{x^2}{2} < f(x) < \cos \frac{x^2}{2}$ 이다.

ㄴ. 구간 $(0, 1)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 는 위로 볼록하다.

ㄷ. $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x} = ae$ 일 때, $100a$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(x^3) = 2x^3 - x^2 + 32x$ 를 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. x 에 대한 방정식 $\ln x - x + 20 - n = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [3점]

26. 다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a + b + c + d = 20$

(나) a, b, c 는 모두 d 의 배수이다.

25. 어느 질병에 대한 치료법으로 1단계 치료를 하고, 1단계 치료에 성공한 환자만 2단계 치료를 하여 2단계 치료까지 성공한 환자는 완치된 것으로 판단한다. 1단계 치료 결과와 2단계 치료 결과는 서로 독립이며, 1단계 치료와 2단계 치료에 성공할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$ 과 $\frac{2}{3}$ 이다. 4명의 환자를 대상으로 이 치료법을 적용하였을 때, 완치된 것으로 판단될 환자가 2명일 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

27. 좌표평면 위의 점들의 집합 $S = \{(x, y) \mid x \text{와 } y \text{는 정수}\}$ 가 있다. 집합 S 에 속하는 한 점에서 S 에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P 에서 한 번의 '점프'로 점 Q 로 이동 할 때, 선분 PQ 의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$ 이다.

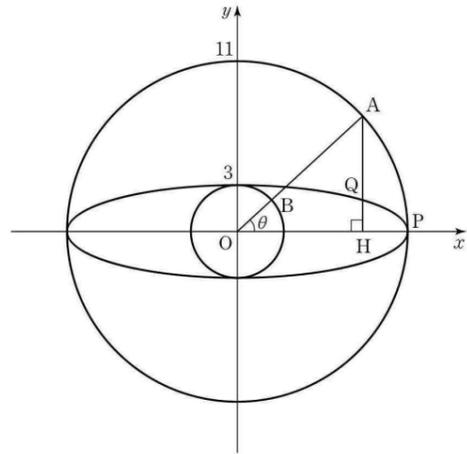
점 $A(-2, 0)$ 에서 점 $B(2, 0)$ 까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오. (단, 이동하는 과정에서 지나가는 점이 다르면 다른 경우이다.) [4점]

28. 좌표평면 위에 타원 $\frac{x^2}{11^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 과 점 $P(11, 0)$ 이 있고,

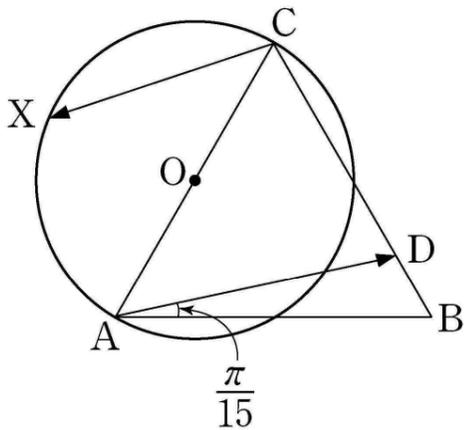
원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 11인 원 C_1 과 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 C_2 가 있다. 제 1사분면에 있는 원 C_1 위의 점 A 에 대하여 선분 OA 와 원 C_2 의 교점을 B , 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H , 선분 AH 와 타원의 교점을 Q , 선분 OA 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. 삼각형 ABQ 의 넓이를 S_1 이라 하고, 삼각형 APQ

의 넓이를 S_2 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S_2}{\theta^2 \cdot S_1} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하

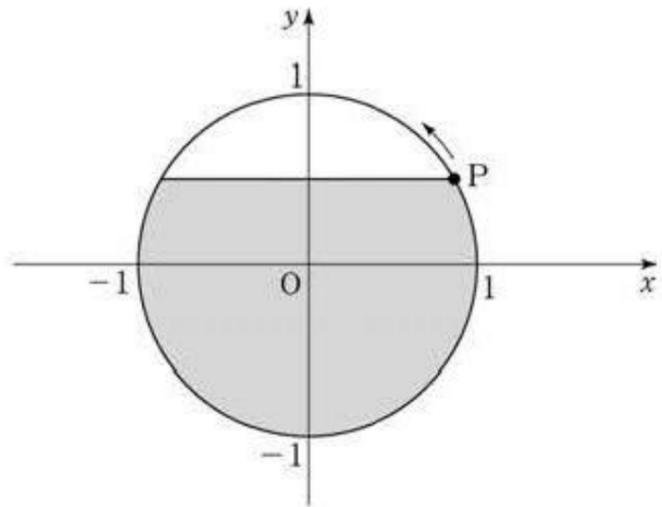
시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC 와 선분 AC 를 지름으로 하는 원 O 가 있다. 선분 BC 위의 점 D 를 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$ 가 되도록 정한다. 점 X 가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 \vec{AD}, \vec{CX} 의 내적 $\vec{AD} \cdot \vec{CX}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 X 를 점 P 라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P 가 점 $(1,0)$ 에서 출발하여 원점을 중심으로 매초 $\frac{1}{40}$ (라디안)의 일정한 속력으로 원 위를 시계 반대방향으로 움직이고 있다. 점 P 에서 x 축에 평행한 직선을 그을 때, 원과 직선으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S 라 하자. 점 P 가 점 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 을 지나는 순간, 넓이 S 의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{b}{a}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.