수학 고득점

규토 N제

by 규토

orbibooks.com

Contents

문제편

해설편

수학 고득점

규토 N제

INTRO

출판하고자 억지로 만든 문제가 아닌 과외학생들을 위해 정성과 애정으로 만든 문제

안녕하세요. 규토입니다. :D
과외학생들을 위해 문제를 만들기 시작한지 벌써 9개월이 흘렀네요.
처음문제를 만들게 된 계기는 어떻게 하면 과외학생들에게 더 양질의 수업을 할 수 있을까 고민하던 중에 자작문제를 만들게 되었습니다.
문제를 풀 수 있니? 가 아닌 이런 것도 있으니 꼭 알아가렴 이라는 마음가짐으로 만들었습니다. 한 문제당 평균 3시간 이상씩 치열하게 고민하면서 문제를 만들었고 어떤 문제들은 하루 종일 고민한 적도 있었습니다. 창작을 하는 과정이 정말 힘든 것은 사실입니다. 그렇지만 만든 문제를 빨리 제자들에게 알려주고 싶은 기쁨과 설렘이 훨씬 더 크기 때문에 계속 만들 수 있었습니다.

한 문제를 풀어도 여러 문제를 푼 것처럼 느껴지는 문제

자작문제 초기에는 쉬운 문제를 풀 거면 시중에서 파는 문제집을 사지 굳이 자작문제를 풀 필요가 없다고 생각해서 난이도를 높게 만들었습니다. 미분 자작문제 15 부터 문제들이 점점 현실성을 띠기 시작하지만 그래도 평가원보다 어렵다고 생각합니다.
원래 문제를 만들 때 2~3개의 예제 문제를 적절하게 섞으면 4점짜리 문제가 탄생합니다. 그 2~3개의 예제문제들의 연결 관계를 파악해 풀어내는 것의 난이도에 따라 문제의 난이도가 달라집니다. 보시면 아시겠지만 제 문제들은 대부분 4~5개의 연결 관계를 파악해야 풀 수 있는 문제가 대다수 입니다. 한 문제를 풀더라도 2~3문제를 푼 것 같은 느낌이드는 것도 이 때문입니다. 그러니 당연히 어려울 수밖에 없습니다. 4~5개의 연결 관계를 계속 해석 하다보면 2~3개짜리 연결 관계를 묻는 문제들은 자연스럽게 쉬워질 수밖에 없다고 생각합니다.
수능에서 수학을 치는 이유는 사고력과 논리력을 평가하기 위해서입니다.
단순계산이 아닌 사고력을 측정하는 것입니다.
최대한 사고력을 자극하는 문제들을 만들기 위해 노력했습니다.
총 70문제로 단기간에 수학적 사고력과 문제 해결력을 높일 수 있습니다.

모든 문항마다 테마가 있는 문제

전 문제를 만들 때 항상 테마가 있습니다. 어떤 개념을 알려주고 싶을 때 문제로 그 정보를 전달하려고 노력합니다. 각 문제마다 어떻게 하면 과외학생들에게 효과적으로 내용을 복습하게 하고 사고력을 기를 수 있을까 치열하게 고민했습니다.
틀리셔도 됩니다. 그렇지만 그 개념들을 모조리 흡수해서 확실히 자기 것으로 만들면 다른 문제를 풀 때 큰 도움이 될 수 있다고 생각합니다.
다년간 수능을 치면서 느꼈던 것과 아이들이 생소해 하는 것을 어떻게 하면 전달 할 수 있을까 항상 생각합니다.

INTRO

4점짜리 문제 중에서도 1등급을 변별하는 문제들만 수록

같은 4점짜리 문제라도 난이도는 천차만별입니다. 굳이 풀어보지 않아도 맞출 수 있는 쉬운 4점짜리 문항이 아니라 대부분 21, 29, 30번 때의 1등급을 변별하는 문제들만 수록하였습니다. 따라서 1등급을 변별하는 문제들만 집중적으로 대비하실 수 있습니다.

기존과 차별화된 해설지

기존의 딱딱한 해설지가 아니라 저자와 소통하는 느낌을 주도록 구어체로 만들었고 저자에게 직접 과외를 받는 느낌이 들도록 구성하였습니다.

① 출제의도 ② 해설 ③ 출제자의 한마디 이렇게 3가지로 구분되어있고 보충이 필요한 부분은 √ 표시해서 별도로 보충 설명하였습니다.

제가 운영하는 네이버 블로그 "규토의 특별한 수학" 에 올려놓은 강의들과 쉽게 연동할 수 있도록 QR코드를 넣었습니다.

그 문제만 공부하는 것이 아니라 복합적으로 공부할 수 있도록 만들었습니다.

12. [미분 자작문제 11] **미적분 I**

29. 다음 조건을 만족하는 $f(x)_n$ 에 대하여

$f(x)_{n+1} = (-2n+4)a - f(x)_n$ (단, n는 자연수이다.)

이 성립한다. $f(x)_1$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f'(a)_1 = 0$을 만족 할 때, $\sum_{k=1}^{21} f(10)_k$ 의 값을 구하시오. (단, $a > 1$이다.) [4점]

(가) $f'(x)_1$은 $x = 1$에서 음수인 최솟값을 갖는다.
(나) $f(x)_1 = f(x)_2$ 를 만족하는 x값은 2개 뿐이다.
(다) $f(0)_1 = 27 + a$

35. [미분 자작문제 29] **미적분 I**

21. $|f(x)|=|x^3-n^2x|$ 을 만족하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-n}^{x} \frac{f(t)+f(|t|)}{2}\,dt \geq 0$$

을 만족하는 실수 x의 최댓값을 $g(n)$이라고 하자.
$(x+n)f(x)\geq 0$을 만족하는 모든 정수 x의 합이 45가 되도록 하는 n을 k라 할 때, $g(k)$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [4점]

① $8\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{2}$
④ $14\sqrt{2}$ ⑤ $16\sqrt{2}$

45. [미분 자작문제 39] 미적분II

30. 함수

$$f(x)_k = \begin{cases} mx - m & (x \le k) \\ \dfrac{\ln x}{x} & (x > k) \end{cases} \quad \left(\text{단, } 0 < m < \frac{1}{e(e-1)} \text{ 이다.}\right)$$

에 대하여 집합 S_k 를

$S_k = \{a \mid$ 함수 $f(x)_k$ 는 $x = a$ 에서 극값을 갖는다.$\}$

라 할 때, 집합 S_k 의 원소의 개수를 $g(k)$ 라 하자.
다음 조건을 만족시키는 α 가 최댓값을 가질 때,
$m = \dfrac{3}{2(e^a - e^b)}$ 이다. $4(a^2 + b^2)$ 의 값을 구하시오. (단, $k > 0$ 이고 a 와 b 는 유리수이다.) [4점]

(가) $\lim_{k \to \alpha-} g(k) + 1 = \lim_{k \to \alpha+} g(k)$

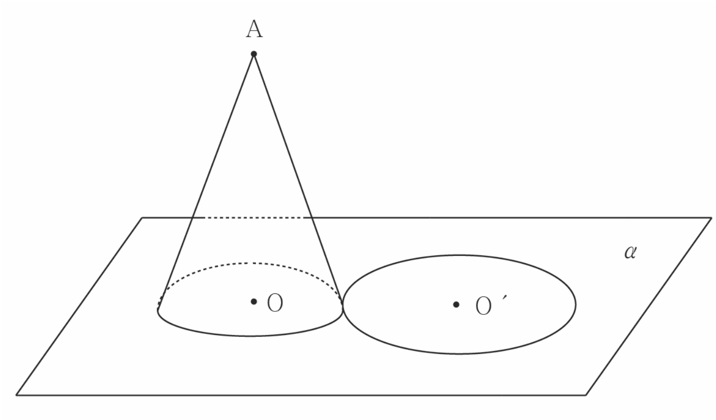
(나) $\dfrac{\ln x}{x}$ $(e < x < \alpha)$ 의 역함수 $h(x)$ 에 대하여 $h'(x)$ 가 열린구간 $\left(\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}, \dfrac{1}{e}\right)$ 에서 감소한다.

5. [공간도형과 벡터 자작문제 5] **기하와 벡터**

29. 그림과 같이 원 C와 원뿔의 밑면이 평면 $\alpha : x-y+z=1$ 위에 있다. 평면 α와 만나는 원뿔의 밑면의 중심을 O, 꼭짓점을 A$(3,\ 0,\ 1)$라 하고 원 C의 중심을 점 O$'$라 하자. 원 C와 원뿔이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 원 C의 중심은 직선 $l : x=-y=\dfrac{z-1}{-2}$ 위에 있다.
>
> (나) 원뿔의 밑면의 둘레가 원 C의 둘레에 외접한다.
>
> (다) 직선 OO$'$와 직선 l은 서로 수직이다.

점 P는 원뿔의 밑면의 둘레 위를 움직이고, 점 Q는 원 C의 둘레 위를 움직인다. 직선 l과 점 A를 포함하는 평면을 β라 하자. 원뿔의 밑면의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\dfrac{\sqrt{15}}{10}\pi$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값을 $\dfrac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(다) 조건 함수 $|g(x)-g(4)|$ 가 실수 전체에서 미분가능하려면 $g(x)-g(4)$의 음수인 부분을 x축을 경계로 위쪽으로 접어 올렸을 때 smooth 해져야겠죠?
여기서 tip을 드리면 $y=g(4)$ 를 x축으로 보고 접어 올리는 것이 훨씬 빨라요.
솔직히 이 표현 자체도 기출문제에 상당히 많이 노출되어 있는 조건이에요. 만약 처음 봤다면 꼭 ! 기출문제를 분석하시고 이 책을 푸셔야 돼요~ 이 책은 기출문제를 보고 난 다음 푸는 책이지 기출문제를 보기 전에 거쳐 가는 문제집이 아니에요. 자 그럼 당연히 푸셨다고 믿고 계속 풀어볼까요?
(다) 조건은 $f(x)$ 가 아닌 $g(x)$ 를 물어봤어요.

$g(x)$는 $g(x)=\int_{-1}^{x}\left\{f(t)-f\left(\frac{3}{2}\right)\right\}dt$ 라고 정의했는데요.

자!!! 앞으로 이 표현을 굉장히 자주 볼거에요. 확실히 익히고 갑시다!!

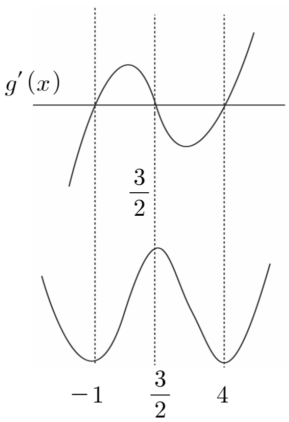
√ $g(x)=\int_{-1}^{x}\left\{f(t)-f\left(\frac{3}{2}\right)\right\}dt$ 에서 뽑아 먹을 수 있는거 다 뽑아 먹어볼게요.

x에 -1을 넣으면 $g(-1)=0$ 이라는 조건을 뽑아 먹을 수 있고 $g(x)$ 를 미분하면 (미분할 때 미적분의 기본정리로 바꾸고 미분해야 실수를 줄인다고 했었죠?)

$f(t)-f\left(\frac{3}{2}\right)$ 를 편의상 $h(t)$ 라고 하면 $g(x)=\int_{-1}^{x}h(t)\,dt=H(x)-H(-1)$

양변 미분하면 $g'(x)=h(x)$ 따라서 $g'(x)=f(x)-f\left(\frac{3}{2}\right)$ 라고 할 수 있어요.

$g'(x)=f(x)-f\left(\frac{3}{2}\right)$ 는 $f(x)$ 를 y축 방향으로 $-f\left(\frac{3}{2}\right)$ 만큼 평행이동 시킨 그래프 에요. 따라서 x축을 $y=f\left(\frac{3}{2}\right)$ 라고 생각 할 수 있어요.



$g'(x)$ 은 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에 점대칭되어 있으니까 x축과 $g'(x)$ 사이의 넓이가 서로 같겠죠? 따라서 $g(x)$ 의 그래프를 그릴 때 $x=\frac{3}{2}$ 에 대칭되어 있는 그래프를 그려야 해요.
(다) 조건을 만족시키려면 오른쪽 그림처럼 극솟점의 x 좌표가 4가 되어야 해요.
여기서 아니 왜 극솟점이에요? 극솟점보다 밑에 $y=g(4)$ 가 있으면 되잖아요? 라고 하시는 분이 있을 것 같아요. 잘 생각해보세요. $g(4)$ 란 말은 **함숫값**이에요. 극솟점 밑에 함숫값이 있나요? 없죠? 따라서 가능하지 않아요. (만약 $|g(x)-k|$ 라고 했으면 가능했겠죠?) 그럼 또 다른 극솟점의 x 좌표는 어떻게 찾을 수 있을까요? $g(x)$ 가 $x=\frac{3}{2}$ 에 대칭이므로 -1이 되겠네요~ 위에서 찾은 조건 $g(-1)=0$을 가지고 무엇을 설정할 수 있죠?
<u>x 축을 설정</u>할 수 있어요.

√ check

① $g(x)=\int f(x)\,dx$

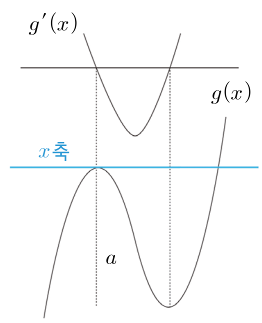
② $g(x)=\int_{a}^{x}f(t)\,dt$

①, ②차이점은 무엇일까요?

①도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 이고

②도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 에요.
①은 x축이 어디 있는지 모르지만
②는 $g(a)=0$ 임을 토대로

x축을 설정할 수 있어요.



모르겠다. 라고요? ㅎㅎ;; 자 잘 생각해보세요. 우리는 $f(x)$의 그래프를 그려야해요.
$x \geq 0$ 때 $x(x-a)^2$ 라고 했어요. 그래프를 그리려고 하는데 무엇 때문에 난감하나요?
바로 a때문이죠? 그래프를 그릴 때 x축에 접하는 a값에 따라 그래프가 달라지겠네요?
크게 몇 가지로 case 분류할 수 있죠?
그래요. ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분할 수 있어요.
$x<0$ 때를 살펴볼까요? 자 $x<0$ 일 때는 $(x+a)^2x(x-a)$ 라고 했죠? 이것도 그래프를 그리려고 하니까 a때문에 난감해요. 따라서 a에 따라 case분류를 해줘야 해요.
case 분류를 해주면 마찬가지로 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분이 되겠죠?
결국 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 경우만 case분류 하면 되겠네요.

여기서 잠깐 !
"아니 그럼 규토 쎈세 무조건 이런 문제가 나오면
① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$로 case 분류해야 하나요?"
√ 여러분이 대답해주세요. 아니죠? 그래프를 그리려니까 a 때문에 난감해서 같은 그래프 개형이 나오도록 a의 범위를 case 분류 한 거예요.

이제 A집합의 의미를 파악해볼게요.

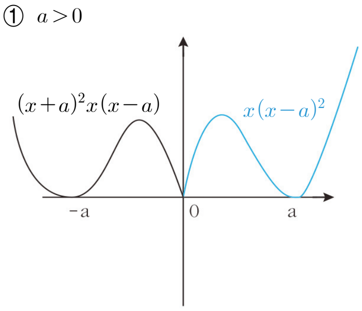
$$A=\left\{t \mid \lim_{x \to t+} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \neq \lim_{x \to t-} \frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right\}$$

x=t 에서 우미분계수와 좌미분계수가 다르다는 의미에요.
결국 미분이 불가능한 점의 x좌표가 A집합의 원소가 되겠죠?

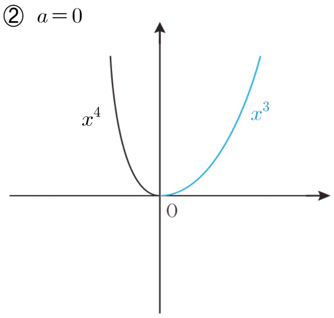
B집합은 $B=\{t \mid$ 함수 $f(x)$는 $x=t$에서 극솟값을 갖고 $t \neq 0\}$ 라고 했는데요.
극솟값을 가지면서 $t \neq 0$ 를 만족해야 해요. 왜 하필 $t \neq 0$일까요?
조건을 만족시키는 case를 제거하기 위함이에요~
출제자는 조건을 줄 때는 무엇인가 의도가 있다는 거예요. +_+

이제 a에 따라 case 분류 해봅시다!

① $a>0$



② $a=0$



√ check

$f(x)=(x-1)(x-a)^2$
이면
① $a>1$
② $a=1$
③ $a<1$
이렇게 3가지로 분류할 수 있겠죠? 이해 되셨나요?

31. [미분 자작문제 25] **미적분 I**

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여, $x \le a$에서 $\int_1^x f(t)\,dt$의 최솟값을 $h(a)$라 하자. 함수 $f(x)$와 $h(a)$에 대하여 집합 S를 다음과 같이 정의하자.

$$S=\left\{x \mid \int_1^x f(t)\,dt = h(2)\right\}$$

집합 S와 $h(a)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-2)$의 값은? [4점]

(가) 집합 S의 모든 원소의 합은 7이다.
(나) 함수 $|h(a)|$는 $a=2$에서만 미분가능하지 않다.

① 50 ② 52 ③ 54 ④ 56 ⑤ 58

출제의도

① $\int_1^x f(t)\,dt = g(x)$ 라고 보고 식을 reading 할 수 있는가? (New 함수 technic !)
② 낯선 식이 의미하는 것을 논리적으로 해석할 수 있는가?
③ $g(x)$ 관한 식 세우기 !

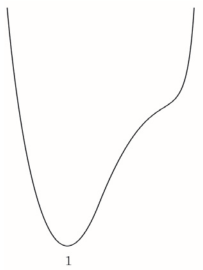
해설

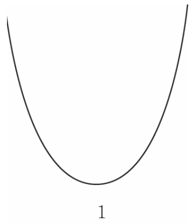
$\int_1^x f(t)\,dt = g(x)$ 라고 두고 풀어 보셨나요? ㅎㅎ 저번에 배웠었죠?
New 함수 technic ! $g'(x)=f(x)$, $g(1)=0$ 을 뽑아먹을 수 있겠죠?
그런데 √ $f(1)=0$이므로 $g'(1)=0$ 이겠죠? 어 ! 무엇이 생각나야하죠?
$g(1)=g'(1)=0$ 이니까 $(x-1)^2$이라는 인수를 가지고 있어야겠죠? ㅎㅎ
여기서 조심해야하는데요. $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이기 때문에 $g(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{4}$가 돼요.

√ check

$f(1)=0 \Rightarrow g'(1)=0$
가 없으면 문제를 풀기위한 논리적 연결고리가 너무 약해지거든요.
“ 너와 나의 연결고리
이건 우리 안의 소리 “
yeah~
$(x-1)^2$이라는 인수를 가지고 있다고 풀어내는 것이 훨씬 깔끔하다고 생각했기 때문에 $f(1)=0$을 주었어요.

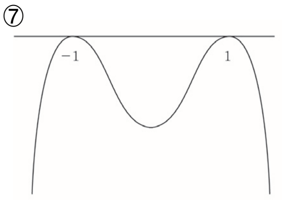
⑥ 이 개형에서는 $n(A)=n(B)=1$ 이 될 수 밖에 없겠죠?
1이 결정 되서 -1 이 갈 곳이 없군요. 따라서 조건을 만족할 수 없어요.





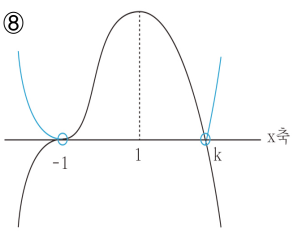
마찬가지로 해보면 최고차항의 계수가 음수일 때 $A=B$와 (가) 조건을 만족 하는 개형은 2가지가 나와요.

⑦



$f(x)=p(x-1)^2(x+1)^2$ 이고 $f(0)=5$를 만족해야 하기 때문에 $p=5$가 나와야하는데 p가 음수이니까 이 그래프 개형은 될 수 없겠죠?

⑧



case ⑤에 했던 식을 그대로 활용하면 되겠죠?
$f(x)=p(x+1)^3(x-\frac{5}{3})$ 이고 $f(0)=5$ 를 만족해야 하기 때문에 $p=-3$가 되겠죠?

따라서 모든 조건을 만족하는 $f(x)$ 는 총 2개가 나와요.

$f(x)=-3(x+1)^3(x-\frac{5}{3}) \Rightarrow f(2)=-27$

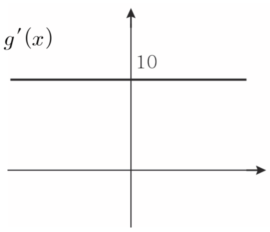
$f(x)=5(x-1)^2(x+1)^2 \Rightarrow f(2)=45$

답은 : 18

출제자의 한마디

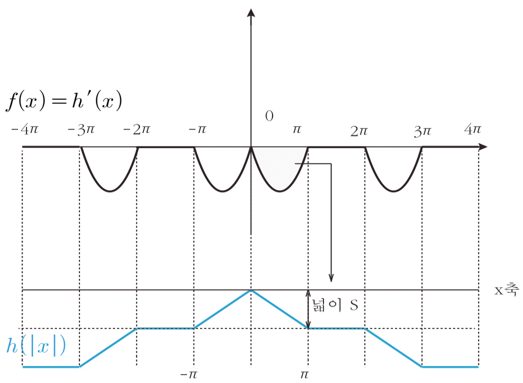
이 문제는 $A=B \Rightarrow n(A)=n(B)$ 을 문제를 풀어나가는 핵심 연결고리로 보고 풀어나가는 문제에요. 논리구조도 복잡하고 사고를 깊게 해야 하는 고난도 문제인 만큼 꼭 백지에 다시 풀어보셨으면 좋겠어요. 개인적으로 이 문제만큼은 누군가에게 설명해보셨으면 좋겠어요. 해설지를 보고 "알겠다!" 라고 하는 것은 정말로 아는 것이 아니거든요 -_-;; 친한 친구한테 "너 이거 5분 안에 풀면 치킨 사줄게. 대신 10분 안에 못 풀면 아이크림 사죠." 라고 해보세요. 흐흐 메로나 추천합니다. :D
알려주면서 수학실력도 쌓고 아이스크림도 먹고 일석이조겠죠? ㅎㅎ
"규토 쎈세,, 5분 안에 풀면 어떻게 하나요?" 굽네치킨 추천합니다. 하하하하

② $k=0$



$k=0$ 가 되면 $f(x)=0$ 이 되고 $g'(x)=10$ 이 되니까 (나) 조건을 만족하지 않겠죠?

③ $k<0$ 마찬가지로 $f(x)$ 를 그리고 $h(|x|)$ 를 그려봅시다.~



오직 개구간 $(-\pi,\ \pi)$ 에서만 $g'(x)=h(|x|)+10$ 가 양수가 되려면 $h(|x|)$ 가 넓이 S ($\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$)만큼 y축 방향으로 평행이동 해야 되겠죠?

$0<x<\pi$ 일 때 $f(x)=2k\sin x$ 이니까

$\int_0^{\pi}-2k\sin x\,dx=[2k\cos x]_0^{\pi}=-2k-2k=-4k\quad(k<0)$

$-4k=10 \Rightarrow k=-\frac{5}{2}$ 이니까

$f(\frac{\pi}{2})^2=25$

답은 : 25

출제자의 한마디

이 문제의 출제의도는 New함수 technic을 적용시켜서 문제를 풀어보라는 의미도 있었지만 k에 따라 case분류를 의도하는 것도 있었어요. 제가 계속 강조했었죠? 만약 $a\ln x$ 의 그래프를 그린다고 하면 어떻게 해야 할까요? ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 라고 case 분류 해야겠죠? 이게 정말 당연하다는 듯이 case분류할 수 있어야 해요. √ 2016년 수능 수학 B형 30번 문제에도 case분류가 나왔었고 정말 자주 나오는 사고과정이니 꼭 기억하세요! √ 2016년 9월 평가원 수학 B형 21번 문제도 같이 풀어보셨으면 좋겠어요.

√ check

[규토] 2016년 9월 평가원
수학 B형 21번 해설 강의 QR코드에요.
꼭 풀고 들어보셨으면 해요.
(들어가시면 문제도 보실 수 있어요. :D)

[규토] 2016년 수능
수학 B형 30번 해설 강의 QR코드에요.
꼭 풀고 들어보셨으면 해요.
(들어가시면 문제도 보실 수 있어요. :D)

5. [통계 자작문제 7] **확률과 통계**

28. 상자 속에 1의 숫자가 적혀있는 카드 n개, 2의 숫자가 적혀있는 카드 $n+5$개가 들어 있다. 이 상자에서 임의로 1개의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인하고 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 3번 반복하여 얻은 세 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}>1)=\dfrac{26}{27}$ 일 때, $\dfrac{\mathrm{E}(4\overline{X})}{\mathrm{P}(\overline{X}=\frac{5}{3})}$ 의 값을 구하시오. [4점]

출제의도

① $\mathrm{P}(\overline{X}>1)=\dfrac{26}{27}$ 로부터 $\mathrm{P}(\overline{X}=1)$을 찾 수 있는가?

② 표본평균의 평균은 모평균과 같다 ! $(\mathrm{E}(\overline{X})=m)$

해설

다음과 같이 표를 그릴 수 있겠죠?

X	1	2
P	$\dfrac{n}{2n+5}$	$\dfrac{n+5}{2n+5}$

일단 확인하고 다시 넣는다고 했으니까 복원 추출이겠군요.
3번 반복하여 얻은 세 수의 평균을 $\overline{X}$ 라고 했으니까 나올 수 있는 $\overline{X}$ 에 대하여 case분류 해봅시다.~
첫 번째 a, 두 번째 b, 세 번째 c를 뽑았다고 했을 때 기호로 (a,b,c)라고 쓸게요.

$(1,\ 1,\ 1) \Rightarrow \overline{X}=1$

$(1,\ 1,\ 2)\ (1,\ 2,\ 1)\ (2,\ 1,\ 1) \Rightarrow \overline{X}=\dfrac{4}{3}$

$(1,\ 2,\ 2)\ (2,\ 1,\ 2)\ (2,\ 2,\ 1) \Rightarrow \overline{X}=\dfrac{5}{3}$

$(2,\ 2,\ 2) \Rightarrow \overline{X}=2$

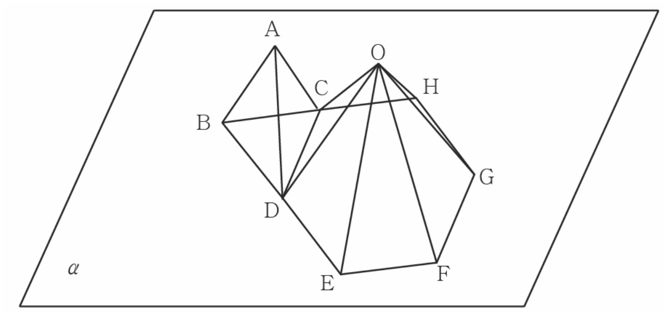
$\mathrm{P}(\overline{X}>1)=\dfrac{26}{27}$ 라고 했으니까 $\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\dfrac{1}{27}$ 이겠죠?

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\left(\dfrac{n}{2n+5}\right)^3=\dfrac{1}{27}$ 이니까 $n=5$가 나오겠죠?

이제 위의 표를 완성시켜 봅시다.~

9. [공간도형과 벡터 자작문제 9] **기하와 벡터**

29. 그림과 같이 높이가 $\sqrt{3}$ 인 정육각뿔과 밑면의 한 모서리를 공유하는 정사면체가 평면 α 위에 놓여 있다. 삼각형 ACD 를 포함하는 평면과 직선 BO 는 서로 수직이다. 삼각형 ODE 을 포함하는 평면과 삼각형 OFG 을 포함하는 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $60\cos^2\theta$ 의 값을 구하시오. [4점]

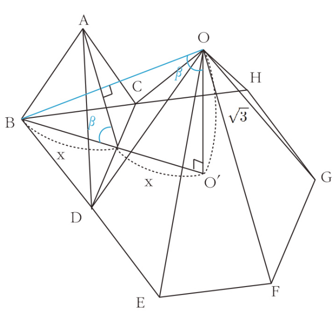


출제의도

① 삼각형 ACD의 무게중심이 직선 BO 위에 있다는 것을 아는가?
② 정육각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는가? (삼각함수 같다 technic !)
③ 다양한 사고로 문제 풀이유도

해설

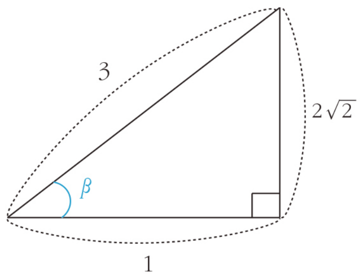
직선 BO가 삼각형 ACD를 포함하는 평면과 수직이라고 했죠? 중요한 것은 정사면체의 한 면이 삼각형 ACD 라는 것이에요. 점 B에서 삼각형 ACD를 포함하는 평면에 내린 수선의 발은 삼각형 ACD의 무게중심이 되겠죠? 따라서 삼각형 ACD의 무게중심은 직선 BO 위에 있어야 해요. 이 사실을 파악하는 것이 문제를 풀어가는 첫 번째 연결고리입니다. :D



$\cos\beta = \dfrac{1}{3}$ 이겠죠? 정사면체에서 각 평면이 이루는 각의 cos 값은 $\dfrac{1}{3}$ 이니까요~

(암기합시다.~ bonus로 한 변의 길이가 a인 정사면체의 높이= $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$ 도 기억해주세요.)

$\overline{\mathrm{BO'}} = 2x$ 라 할 때



$\cos\beta = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \tan\beta = 2\sqrt{2}$

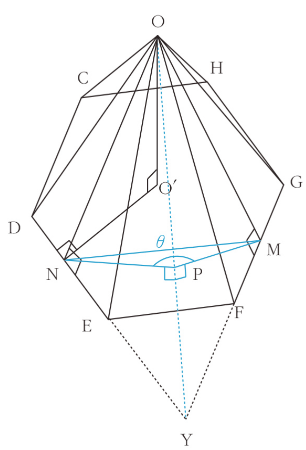
따라서 $2\sqrt{2} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \therefore\ x = \sqrt{6}$

정삼각형 BCD의 한 변의 길이를 a라고 하면 $a \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} \Rightarrow \therefore\ a = 2\sqrt{2}$

이제 한 변의 길이도 구했으니 $\cos\theta$ 만 구하면 되겠죠?
다양한 방법으로 $\cos\theta$를 구할 수 있지만 크게 두 가지 방법으로 풀어볼게요. :D

① 이면각의 정의 = 교선에 수직인 두 직선이 이루는 각

이면각의 정의를 사용하려면 교선이 있어야하죠? 하지만 문제에서 주어진 그림에서는 삼각형 ODE를 포함하는 평면과 삼각형 OFG를 포함하는 평면의 교선을 찾을 수 없어요. 여기서 ! 제가 알려드리고 싶은 것(출제의도)은 교선이 없으면 평면을 연장시켜 교선을 만들 수 있다는 것이에요. 선분 DE를 직선으로 만들고 선분 GF를 직선으로 만들어봅시다.~



직선 DE와 직선 FG는 점 Y에서 만나겠죠? 결국 직선 OY가 두 평면의 교선이라고 할 수 있겠죠? 교선에 수직인 두 직선을 찾아봅시다. 점 O에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 N이라 하고 점 O에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 N과 M에서 선분 OY에 내린 수선의 발은 점 P로 동일하겠죠? 결국 직선 NP와 MP가 이루는 각이 이면각 θ이겠군요. $\cos\theta$를 구하기 위해서 삼각형 NMP의 세변의 길이를 구해봅시다.~

삼수선 정리에 의해서 자동으로 선분 O' N와 DN은 서로 수직이겠죠?

$\therefore \overline{ON} = \sqrt{(\overline{OO'})^2 + (\overline{O'N})^2} = \sqrt{3+6} = 3$

삼각형 DEO는 이등변삼각형이니까

$\therefore\ \overline{EN} = \dfrac{1}{2}\overline{DE} = \sqrt{2}$

$\angle EFY = \angle FEY = \angle EYF = 60^\circ$ 이니까 삼각형 EFY는 정삼각형이겠죠?

$\therefore\ \overline{EY} = \overline{EF} = 2\sqrt{2}$