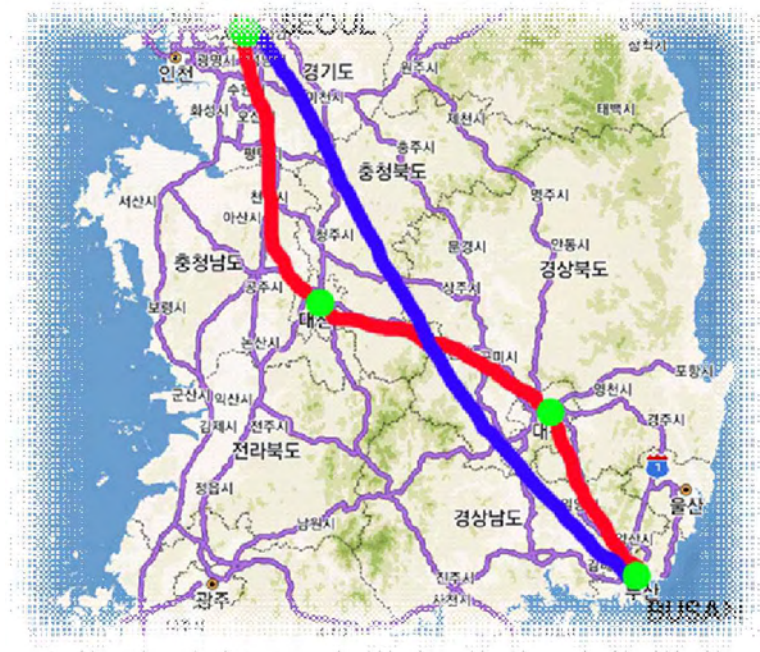


드디어 이 글의 제목에 가장 어울리기도 하는 마지막 부분입니다.

여러분들이 올 한 해도 미친듯이 열공열공한 덕분에 원하는 대학에 당당히 붙고서,
내년엔 애완과 동기들과 함께 서울에서 부산까지 기차 여행을 간다고 상상 해보세요.
창밖으로 내비치는 아름다운 경치 구경도 하면서요..^^;

시간이 지나고 나면 대학 새내기 시절의 기차 여행이 멋진 추억으로 남아있겠죠?
그리고 이번엔 서울에서 부산행 비행기를 타고 간다고 합시다.
여행이란 말이 무색할 정도로 금방 목적지에 도달하고 말겠네요..

이번에 다룰 주제가 바로 **눈에 보이는 극한과 보이지 않는 극한**입니다.
(물론 교과서 같은데 나오는 말은 아니지만, 편의상 저는 이렇게 구분합니다.)
몇몇 극한 문제들 푸는 걸 출발점에서 도착점까지 가는 상황에 비유할 수 있습니다.
누군가는 여행의 추억을 강조하면서 천천히 기차타고 가는 것
(=착실하게 수식을 정확하게 세워서 푸는 것) 의미있게 생각하겠고,
또 다른 누군가는 그런 기차 여행은 충분히 해봤으니
목적지에 최대한 빠르고 정확하게 도착하는 데
(=출제자의 의도 따위 사뭇히 즈려밟고 바로 답 찾는 것)에 비중을 둘 거예요.
그렇다고 꼭 전자보다 후자가 더 바람직하다든가 우월하다는 말은 아닙니다.
그저 어디까지나 개인의 취향일 뿐이죠.
아무개는 기차 여행만을 고수하는데, 세월이 흘러 그 기차가 (KTX)로 변해있다면



서울에서 부산까지 가는데 걸리는 시간은 비행기 탔을 때와 별 차이가 없을 겁니다.

그리고 제아무리 비행기가 빠르다고 한들 고소공포증이 있는 사람은 못 타겠죠?

아무래도 빠르게 푼답시고 출제자의 의도에서 벗어나버리면

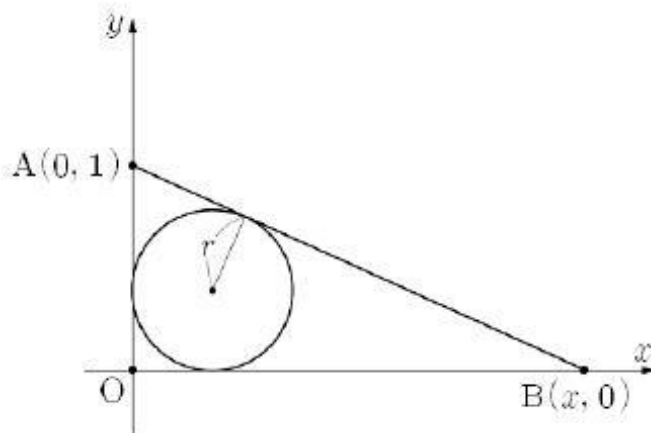
그만큼 정확성을 포기해야만 하는 위험 부담도 각오해야 합니다.

그러니 적어도 고등학교 수리 영역의 완성 단계에 이르신 분들이나 구사하는

일종의 도박이나 수학적인 유희(?)쯤으로 볼 수 있겠네요..+_+;

2007년 07월 12일 교육청 수리 (가형) 09번

9. 그림과 같이 세 점 $A(0, 1)$, $O(0, 0)$, $B(x, 0)$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형과 그 삼각형에 내접하는 원이 있다. 점 B 가 x 축을 따라 원점에 한없이 가까워질 때, $\triangle AOB$ 에 내접하는 원의 반지름의 길이 r 에 대하여 $\frac{r}{x}$ 의 극한값은? (단, $x > 0$) [3 점]



- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

sol)

비록 3점짜리지만 내접원의 반지름 길이를 정리하여 풀려면 귀찮습니다.

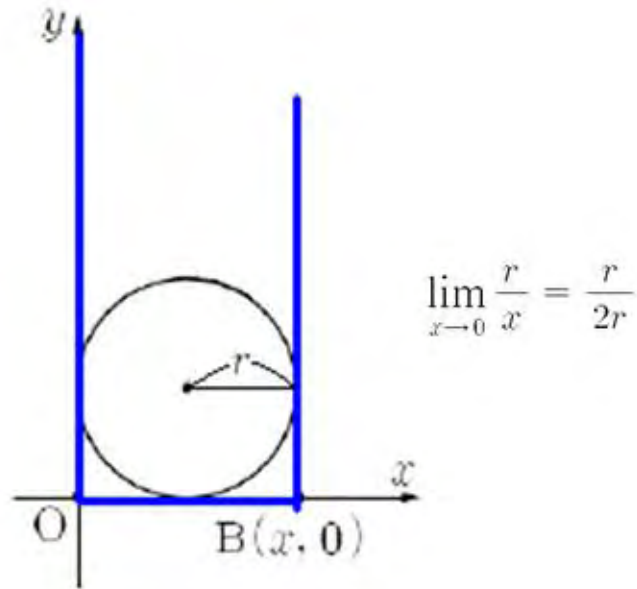
그래서 한 번 그림을 잘 들여다보니..

음.. 뭔가가 보이네요..

아, 이건 눈에 보이는 극한 문제였군요!

(마치 수정 구슬을 보고 얘기하는 것 같죠?)

수정 구슬을 통해 제가 봤던 것들을 밑에 그려보겠습니다.



점 A가 행방불명 된 것 같죠?

그리고 아무리 봐도 제가 실수로 파란 선으로 외접삼각형을 그려야 할 걸 까먹고 잘못 그린 게 아닌지 싶기도 하구요.

하지만 이게 맞습니다.

원래 극한의 세계에선 종종 이러한 말도 안 되는 일이 발생하거든요.

점 B가 원점을 향해 접근한다면 내접원의 크기도 점점 작아져야만 합니다.

그리고 그게 너무나도 작아지다 보니

(0, 1)의 위치에 있던 점 A가 오히려 y축 저 멀리 도망 간 것처럼 보입니다.

또 선분 AB도 y축에 평행해져 갈 테구요.

그래서 이 때 구하라는 값은 $\frac{1}{2}$ 로 아~주아주 쉽게 보입니다.

9. [출제의도] 도형에서 극한값 계산하기

삼각형 OAB에서 내접원의 반지름의 길이를 r이라할 때

$$\text{삼각형의 넓이} : \frac{1+x+\sqrt{1+x^2}}{2} r = \frac{1}{2} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}$$

해설지 보니깐 나름 간단하게 푼 것 같은데,

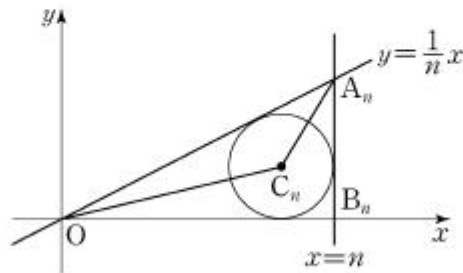
행간에 생략된 과정들까지 고려하면 문제 푸는데 걸리는 시간은 비교도 안 되죠;

(전통적으로(?) 교육청 모의고사 해설자는 불친절아 컨셉안듯..)

2010년 11월 18일 2011학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (나형) 14번

14. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 두 직선 $y = \frac{1}{n}x$ 와 $x = n$ 이 만나는 점을 A_n , 직선 $x = n$ 과 x 축이 만나는 점을 B_n 이라 하자. 삼각형 A_nOB_n 에 내접하는 원의 중심을 C_n 이라 하고, 삼각형 A_nOC_n 의 넓이를 S_n 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

sol)

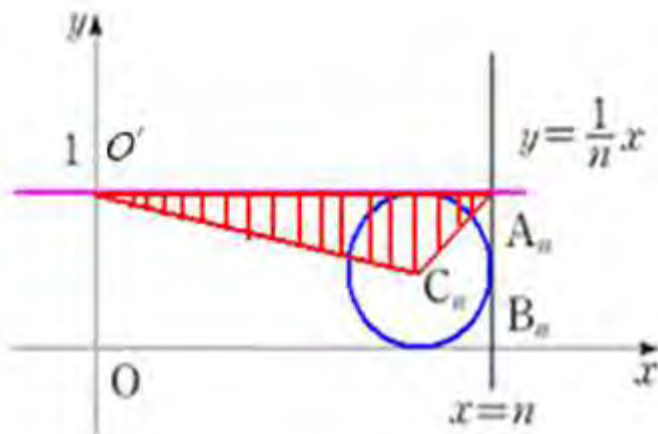
이 문제도 눈으로만 1분 남짓해서 풀 수 있습니다.

무슨 약 파는 것 같지만, 절대로 저는 그런 사람이 아닙니다..ㅠ_ㅠ;

암튼 n 이 무한히 커지면 그림은 어떻게 될까요?

힌트를 드리자면 주어진 그림을 잘 관찰해서 거기서 단서를 얻는 겁니다.

일단 n 이 양의 무한대로 발산하면 그림은 요렇게 됩니다.



'이보시오, 해설자 양반
장난 그만치시구려.
요건 삼각형이 아니잖소?'

하며 말씀하시는 분들이 계실지도 모르겠네요.

하지만 저건 어디까지나 극한적 상황의 그림입니다!

그렇담 이제 그림을 왜 저렇게 그려져야만 하는지 근거를 들어보겠습니다.

n 이 아무리 커져도 교점인 A_n 의 y 좌표가 1로 변함이 없고,

삼각형 A_nOB_n 의 넓이 또한 $\frac{1}{2}$ 로 고정되어 있습니다.

이 상태에서 n 이 증가하면 $\overline{OA_n}$ 의 기울기가 0에 수렴해야 하고,

A_n 의 높이는 항상 불변이니까

원점 O 에서의 교점이 기울기를 0으로 하는 위치인 점 $(0, 1)$ 로 가야 합니다.

즉, 삼각형이 풀어진다는 말입니다.

그러면 내접원(?)의 반지름 길이는 $\frac{1}{2}$ 이고,

구하라는 삼각형 $A_nO'C_n$ 의 넓이는 $S_n = \frac{1}{2} \times n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$

따라서

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{4}$ 입니다.

이게 바로 눈에 보이는 극한 문제입니다.

보시다시피 작년 수능에 딱하니 나왔구요..

그렇담 눈에 보이지 않는 극한 문제란

이런 식으로 간단히 풀리지 않는(수정 구슬에도 보이지 않는) 문제겠죠?

지금부터 단위 도형 설명할 때처럼 여러 문제들을 소개하며

이렇게 풀 때의 주의 사항들도 환기시켜 드리겠습니다.

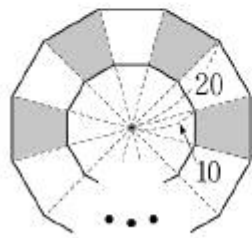
가능한 한 문·이과 공통 문제 위주로 보여드리고 싶지만

7차 때의 가형 심화 선택 미분과 적분 쪽으로 문제가 쏠려 있으니,

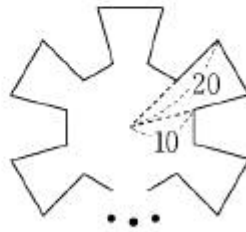
적절히 필터링 하시면서 보세요 ^^;

30. [그림 1]은 중심이 같은 두 개의 정 $2n$ 각형에서 큰 정 $2n$ 각형의 꼭지점, 작은 정 $2n$ 각형의 꼭지점과 중심이 한 직선 위에 있도록 연결한 것이다. 중심에서 두 개의 정 $2n$ 각형의 꼭지점까지의 거리는 각각 10, 20이다. [그림 1]의 어두운 부분을 잘라내어 만든 [그림 2]와 같은 도형의 넓이를 S_n 이라 하자. $\frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값을 구하시오.

[4점]



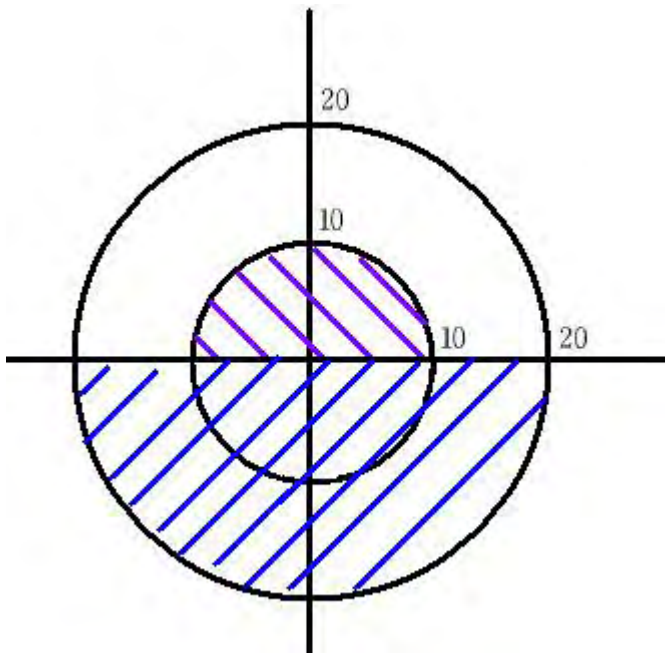
[그림 1]



[그림 2]

sol)

말이 정 $2n$ 각형이지 n 이 한없이 커지면 원이나 다름 없습니다.
바깥 부분이 참 알맞게 생겼는데, 한 쪽으로 다 모아버리면



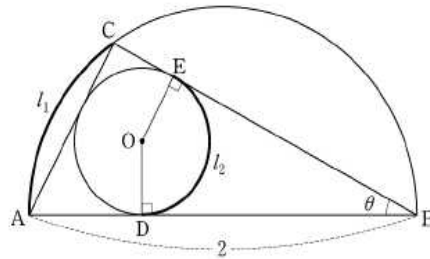
이렇게 됩니다.

따라서 답은 반원 넓이 두 개에
어차피 분모, 분자의 약분될
파이를 애초부터 고려치 않으면

$$\frac{1}{2}(10^2 + 20^2) = 250 \text{ 입니다.}$$

2007년 06월 07일 Kice 2008 대수능 6월 모의평가 수리 (가형) 27번

27. 그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 중심 O에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. $\angle ABC = \theta$ 이고, 호 AC의 길이를 l_1 , 호 DE의 길이를 l_2 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_1}{l_2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [3점]



- ① 1 ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{3}{\pi}$

제법 계산이 지저분했던 평가원 기출문제로 기억하는 분들도 계시겠네요.
그리고 EBS에 올라온 해설은 이렇습니다.

27.

호 AC의 중심각의 크기는 2θ 이므로

$$l_1 = 1 \cdot 2\theta = 2\theta$$

직각삼각형 ABC에서,

$\overline{AC} = 2\sin\theta$, $\overline{BC} = 2\cos\theta$ 이므로 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sin\theta \times 2\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

또, 삼각형 ABC 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 넓이 S는

$$S = r \times \frac{2 + 2\sin\theta + 2\cos\theta}{2}$$

$$= r(1 + \sin\theta + \cos\theta)$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos\theta = r(1 + \sin\theta + \cos\theta)$$

$$\therefore r = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta}$$

따라서 사각형 ODBE에서 $\angle DOE = \pi - \theta$ 이므로

$$l_2 = r(\pi - \theta) = \frac{2\sin\theta\cos\theta(\pi - \theta)}{1 + \sin\theta + \cos\theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_1}{l_2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\theta(1 + \sin\theta + \cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta(\pi - \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin\theta} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 + \sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta(\pi - \theta)} \\ &= 1 \cdot \frac{1 + 0 + 1}{1 \cdot \pi} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

<다른 풀이>

호 AC의 중심각의 크기는 2θ 이므로

$$l_1 = 1 \cdot 2\theta = 2\theta$$

내접원과 선분 AC의 접점을 F라 하면

$$\overline{AF} + \overline{BE} = \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB} = 2 \text{이고,}$$

$$\overline{CE} + \overline{DF} = r + r = 2r \text{므로}$$

$$\overline{AC} + \overline{BC} = 2 + 2r \cdots \textcircled{1}$$

그런데, 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = 2, \overline{AC} = 2\sin\theta, \overline{BC} = 2\cos\theta \text{이므로}$$

$$\overline{AC} + \overline{BC} = 2\sin\theta + 2\cos\theta \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$2 + 2r = 2\sin\theta + 2\cos\theta$$

$$\therefore r = \sin\theta + \cos\theta - 1$$

한편, 사각형 ODBE에서 $\angle DOE = \pi - \theta$ 이므로

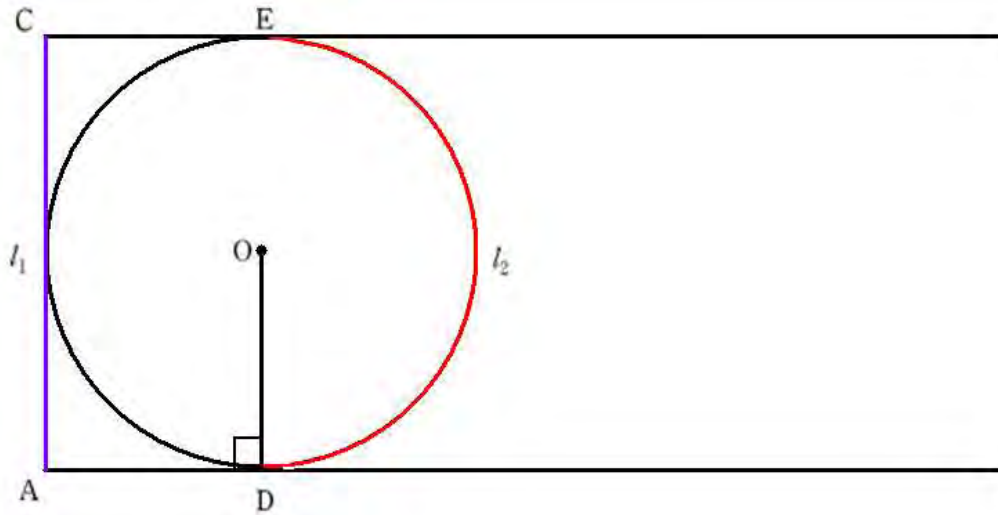
$$l_2 = r(\pi - \theta) = (\sin\theta + \cos\theta - 1)(\pi - \theta)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_1}{l_2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\theta}{(\sin\theta + \cos\theta - 1)(\pi - \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\theta(\sin\theta + \cos\theta + 1)}{\{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1\}(\pi - \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\theta(\sin\theta + \cos\theta + 1)}{2\sin\theta\cos\theta(\pi - \theta)} \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

sol)

이것도 물론 눈에 보이는 극한 문제입니다.

$\theta \rightarrow 0$ 의 극한적 상황에서 그림은 아래와 같습니다.



호 l_1 은 $\theta \rightarrow 0$ 의 상황에서 현과 일치하게 됩니다.

굳이 수식으로 보완하자면,

호 l_1 은 $1 \cdot 2\theta = 2\theta$

해당하는 현은 $2 \times (1 \cdot \sin \theta) = 2 \sin \theta$ 이고

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin \theta}{2\theta} = 1 \text{ 이기에}$$

$\theta \rightarrow 0$ 이면 현과 호가 일치하게 된다고 봐도 무방합니다.

이때도 아까와 마찬가지로 삼각형이 풀려서 두 변이 평행한 모양이 됩니다.

어차피 약분될 테지만, 내접원의 반지름을 r 로 둔다면

$$\text{답은 } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2r}{\pi r} = \frac{2}{\pi} \text{ 입니다.}$$

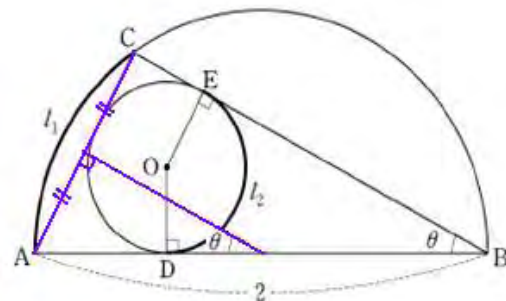
약간 과장해서 말하자면,

실전에서 저 극한 상황의 그림을 떠올리고

$$\text{식도 겨우 } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2r}{\pi r} = \frac{2}{\pi} \text{ 이정도만 쓰는 걸로 족합니다.}$$

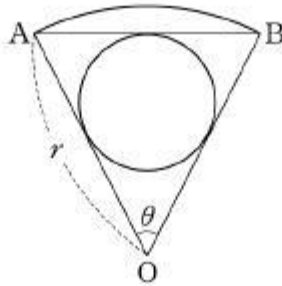
(물론 수리 논술 같은 증명 과정이 중요한 시험에선 부적합한 방법이겠지요.

그렇다고 EBS 풀이처럼 못 풀어서 이렇게 푼 것 또한 아닙니다 ^^;)



2006년 09월 06일 Kice 2007 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 29번

29. 그림과 같이 중심각의 크기가 θ 이고 반지름의 길이가 r 인
부채꼴 OAB 가 있다. 부채꼴의 호 AB 의 길이를 l_1 , 삼각형
 OAB 에 내접하는 원의 둘레의 길이를 l_2 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_2}{l_1}$ 의
값은? [4점]



- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

이제 이 정도 문제를 보면 유레카(Eureka)를 외칠 수 있겠죠.. ㅇ_ㅇ?

괜히 풀었다가 몇몇 분들이 아쉬워하실까봐 여러분들의 몫으로 남겨둡니다.

그것보다 이러한 눈에 보이는 극한 문제를 풀기 위해서
거의 필수로 알아야 할 내용인 '테일러 전개에 의한 근사'를 소개해야 하는데,
마침 좋은 사이트가 있으니 들어가셔서 관련 글들 읽어 보세요 ^^;

<http://blog.naver.com/sjahn0?Redirect=Log&logNo=60022781571>

29. 세 양수 a, b, c 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a \ln \left(b + \frac{c}{x^2} \right) = 2$$

일 때, $a+b+c$ 의 값은? [4점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

명색이 평가원 기출인데도 테일러 전개에 의한 근사를 안다면 눈으로 풀립니다.

간단히 소개하자면 로피탈 정리보다 더 고급 테크닉입니다.

지금은 '우와~' 하고 보셔도 어차피 대학 1학년 때 다 배우게 될 내용입니다.

그리고 저 글 쓰신 교수님께서 워낙 설명을 잘 해주셨기에 다 커버 될 거예요..^^;

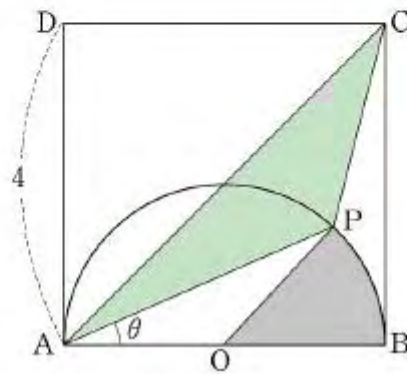
(06년도에 오르비 수리 게시판에서 테일러 전개 붐을 일으킨 분이시기도 하죠 ㅎㅎ)

2005년 09월 07일 Kice 2006 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 30번

30. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서
 변 AB의 중점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인
 반원 위에 점 P가 있다. $\angle BAP = \theta$ 일 때 삼각형 APC의
 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 OBP의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{8 - f(\theta)}{g(\theta)} = \alpha$ 라 할 때, 10α 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [4점]



sol)

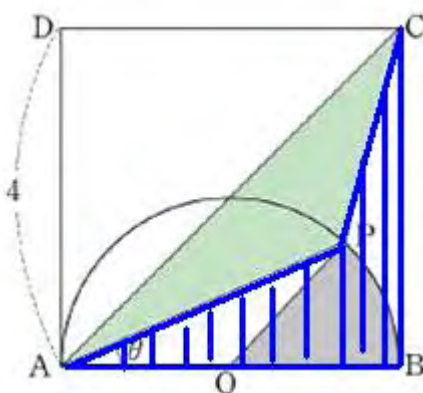
극한 식에서의 분모는 $g(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot 2\theta = 4\theta$ 로 쉽게 구할 수 있습니다.

그런데 분자가 말썽이죠.

그리고 또, 잘 보면 그림에서 $f(\theta)$ 부분이 색칠해져 있으니까

왠지 그 부분 넓이를 구해야겠다는 생각이 무의식적으로 압박할 겁니다.

하지만 실제로는 $8 - f(\theta)$ 만 구해도 충분합니다.



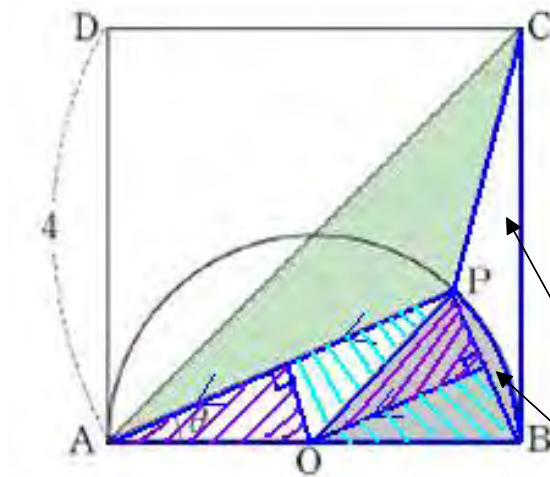
여기서 $8 - f(\theta)$ 의 8은

직각이등변삼각형 ABC의 넓이를 말하는 겁니다.

그러니 이젠 $\theta \rightarrow 0$ 일 때

왼쪽의 빗금 친 부분이 어떻게 되는지

관찰하면 되겠군요.



죄송합니다.. π_T

분명히 눈에 보이는 극한이긴 한데,
요번엔 수정 구슬에 비치는 상이 너무 추상적인지라
부족한 제 그림 실력으로는 도시화가 불가능하네요.

대신 저 그림에서 $\theta \rightarrow 0$ 일 때 어떻게 되는지 묘사 해보면..

8 - $f(\theta)$ 에서 **빗금치지 않은 부분**은 생략해도 무방한 부분입니다.(?!!!)

그러면 남은 직각삼각형 ABP 부분을 합동인 직각삼각형 4개로 분할 가능하겠네요.

그 중에서도 삼각형 OBP 를 이루는 두 부분은 $g(\theta)$ 이기도 합니다.

(∵ 이런 식으로 극한을 보내면 현과 호와 접선이 일치하게 되므로..)

그래서 $\theta \rightarrow 0$ 일 때 $\frac{8-f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{4S}{2S} = 2$ 로 답 10α 는 20입니다.

이 정도 설명으로도 충분하신 분들도 있겠지만,

그냥 넘어가면 아쉬우니 좀 더 자세하게 분석 + 수식으로 뒷받침 해보겠습니다.

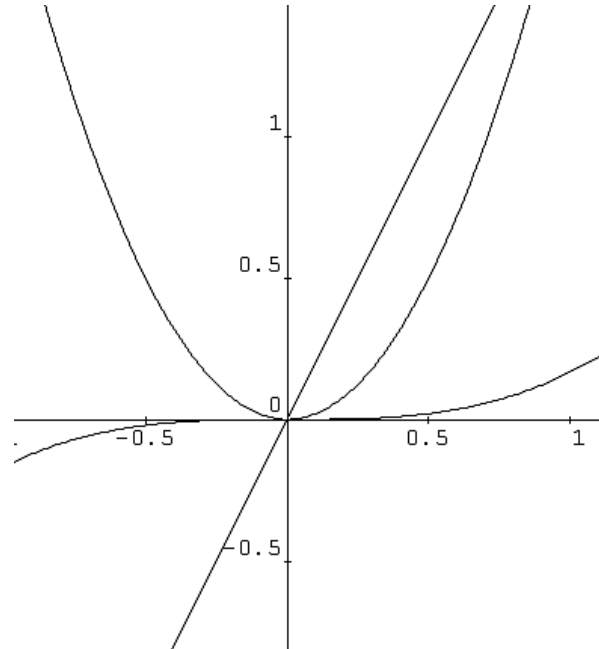
합동인 직각삼각형 4 개의 넓이가 $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = 4 \sin 2\theta$ 에서

각각 $|\sin 2\theta \approx 2\theta|$ 고,

할꼬 끝 부분은 $\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \theta - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin \theta = \theta - \sin \theta \approx \frac{\theta^3}{6}$

나머지 부분은 $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (2 - 2\cos\theta) = 4(1 - \cos\theta) \approx 2\theta^2$ 이므로

$\theta \rightarrow 0$ 의 상황에서 가장 느리게 감소하는 $\sin 2\theta \approx 2\theta$ 부분만 고려해도 되는거죠.



보다시피 $\theta \rightarrow 0$ 에서 감소하는 정도가 $2\theta < 2\theta^2 < \frac{\theta^3}{6}$ 의 순입니다.

이 때, 가장 빠른 $\frac{\theta^3}{6}$ 가 아닌 가장 느린 2θ 를 고려해야 하는 까닭은

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2 + 2\theta}{3\theta^2 + 4\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta + 2}{3\theta + 4} = \frac{0 + 2}{0 + 4} = \frac{1}{2} \text{인 것과 같습니다.}$$

그러므로 위와 같은 눈에 보이는 극한 문제들에서

면적들을 θ 에 관한 다항함수로 근사했을 때,

가장 느리게 감소하는 부분 위주로만 생각하고

나머지 값들은 첨부부터 무시해도 되는 겁니다.

빠르게 푸는 데만 치중해서 굳이 수식을 세워서 따지지 않고,

감각적으로 판단하고 넘어가는 경우가 대부분이라서

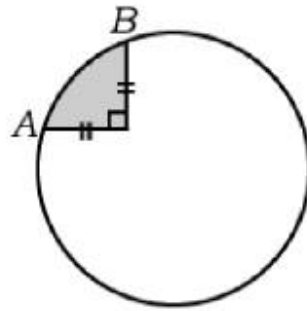
이런 풀이가 종종 비난 받기도 하지요 ㅠ_ㅠ..

2009년 06월 평가원 대비 포카칩 모의고사 수리 가형 30번

30. 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이 있다. 호 $\widehat{AB}$ 에 대한 중심각을 θ 라 할 때, 색칠한 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta) + \sin \theta - \theta}{\theta^2} = \frac{b}{a}$ 라 할 때, $10(a^2 + b^2)$ 의 값을

구하시오. (단, a, b 는 서로소) [4점]



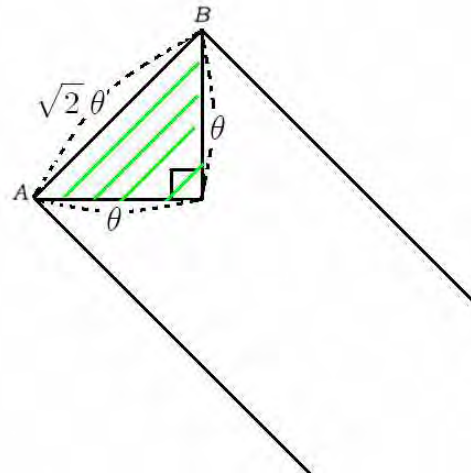
sol)

$\theta \rightarrow 0$ 이면 $\widehat{AB} \simeq \overline{AB}$ 이고,

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2$$

한편, $\sin \theta$ 를 일차항인 θ 까지 근사시키면

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \text{로 끝입니다. ^^;}$$



실전에선 눈만 몇 번 깜빡이고도 암산으로 답 찾을 수 있겠네요..

아까 사이트 들어가셔서 충분히 익히셨겠지만

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad \cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

이니, 문제에서 필요한 만큼 적당히 짧은 근사식을 이용하면 됩니다 ^^;

(참고로 $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \dots$ 이고, 유도 과정이 어려워서 언급하지 않은거예요.)

2008년 06월 04일 Kice 2009 대수능 6월 모의평가 수리 (가형) 28번

28. 연속함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos(x^2)} = 2$ 를 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p} = q$ 이다. $p+q$ 의 값은? (단, $p > 0$, $q > 0$ 이다.) [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

sol)

$$x \rightarrow 0 \text{ 일 때, } 1 - \cos(x^2) \approx 1 - \left(1 - \frac{(x^2)^2}{2}\right) = \frac{x^4}{2} \text{ 이므로,}$$

$f(x) \approx x^4$ 으로 볼 수 있고,

따라서 $p = 4$, $q = 1$

테일러 전개에 의한 근사는 어디까지나

눈에 보이는 극한 문제를 풀기 위해 필요한 도구 중에 하나일 뿐이지만

혹시나 해서 관련 문제들을 봤습니다.

능수능란하게 사용하려면 그만큼 숙련이 되어야 하거든요.

게다가 아무리 테일러 전개에 의한 근사식이 강력하다지만

2009년 06월 04일 Kice 2010 대수능 6월 모의평가 수리 (가형)

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1 - \sin x} - e^{1 - \tan x}}{\tan x - \sin x}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ $2e$

이렇게 평균값 정리로 풀어야하는 문제에까지 적용하기엔 무리겠죠?

뿐만 아니라 심지어 테일러 전개를 어설프게 사용하는 사람들을 겨냥해서

낚시 문제를 만드는 분들도 있습니다.

2009년 09월 평가원 대비 포카칩 모의고사 수리 가형 28번

28. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{f(x)} = 1$ 을 만족할 때,

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sin x^4} = -\frac{1}{2}$

ㄷ. $f(x)$ 가 다항함수이면 $f'(1) = -2$ 이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

sol)

$x \rightarrow 0$ 일 때, $\ln(\cos x^2) \approx \ln\left(1 - \frac{x^4}{2}\right) \approx -\frac{x^4}{2}$ 에서 $f(x) \approx -\frac{x^4}{2}$ 으로 근사하면

ㄱ, ㄴ, ㄷ이 모두 참이지만,

$\ln(\cos x^2) \approx \ln\left(1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24}\right) \approx -\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24}$ 으로 근사한다면

ㄱ, ㄴ은 참이지만 ㄷ이 거짓이 됩니다.

따라서 정답은 ② ㄱ, ㄴ이구요.

이 문제에서의 교훈이 있다면,,

테일러 전개랍시고 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ 처럼 단순히 암기만 하는 식으로

왜곡된 본질을 기억의 주머니에 담으면 안 된단 말이겠죠?

어차피 할꺼면 그 원리를 한번쯤은 정확하게 이해하고 넘어가야 합니다.

(제가 계속 당연한 말만 하는군요..+_+;)

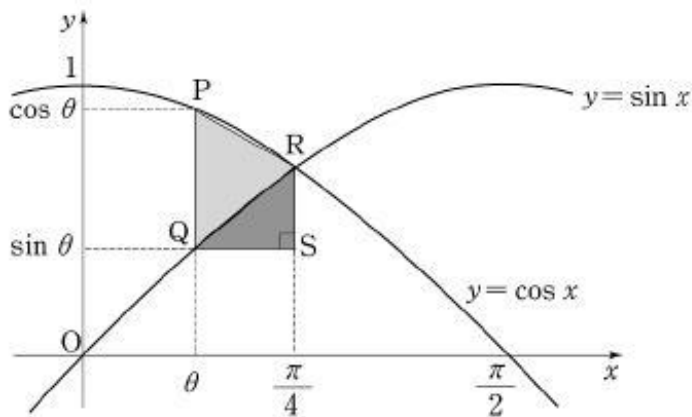
29. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ 일 때, 곡선 $y = \cos x$ 위의 점

$P(\theta, \cos \theta)$ 를 지나고 x 축에 수직인 직선과 곡선 $y = \sin x$ 의 교점을 Q 라 하자. 점 Q 를 지나고 x 축에 평행한 직선과

점 $R(\frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$ 를 지나고 x 축에 수직인 직선의 교점을

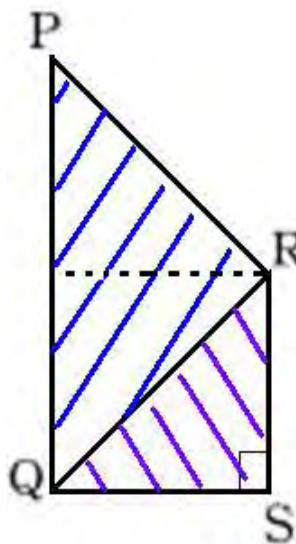
S 라 하자. 삼각형 PQR 의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 QSR 의

넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ 의 값은? [4점]



- ① $2\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

sol)



점 R 에서 $y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 의 미분계수는

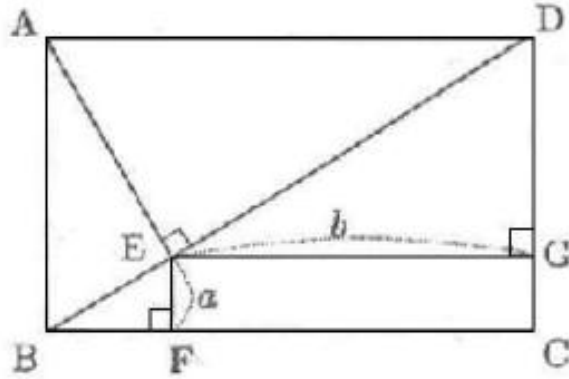
각각 1, -1이므로,

$\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 인 상황은 왼쪽의 그림과 같습니다.

그러니까 답은 2입니다.

2011학년도 경찰대학 제1차 시험 (수리영역) 12번

12. 오른쪽 그림과 같이 직사각형 $ABCD$ 의 꼭짓점 A 에서 대각선 BD 에 내린 수선의 발을 E , 점 E 에서 두 변 BC 와 CD 에 내린 수선의 발을 각각 F 와 G 라 하자. $\overline{EF} = a$ 이고 $\overline{EG} = b$ 일 때, 대각선 BD 의 길이는?



- ① $\sqrt{2}(a+b)$ ② $2\sqrt{a^2+b^2}$ ③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
 ④ $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^3$ ⑤ $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

sol)

극한 문제가 아닌데도, 극한 문제처럼 풀 수도 있습니다!
 (당연히 모든 문제에서 그런건 아니고 몇몇 문제에서 ^^;)

일단 $a = b$ 일 때 답이 $2\sqrt{2}a$ 가 나오는 ①, ②, ⑤번 중에서
 직사각형의 가로 길이를 0으로 보낼 때, (그러면 $b \rightarrow 0$)

대각선 BD 의 길이 = 세로 길이 = a

직사각형의 세로 길이를 0으로 보낼 때, (그러면 $a \rightarrow 0$)

대각선 BD 의 길이 = 가로 길이 = b

가 나오는 ⑤번이 답입니다.

시간의 압박이 장난 아닌 경찰대 시험에서 이런 생각 없이
 쌍으로 풀기가 참 어렵죠;;

이 문제가 '문제해법 삼각법 사전(저자 : 사사베사다 이치로우)'의
p74에 있는 문제와 동일한데,
그 책의 풀이는 다음과 같습니다.

(풀이) $\overline{AD} = x$, $\overline{AB} = y$ 라 하고, $\angle ADB = \angle DBC = \angle BAE = \theta$ 라 하면,

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ 이고,}$$

$$\overline{BE} = y \sin \theta = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \overline{DE} = x \cos \theta = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

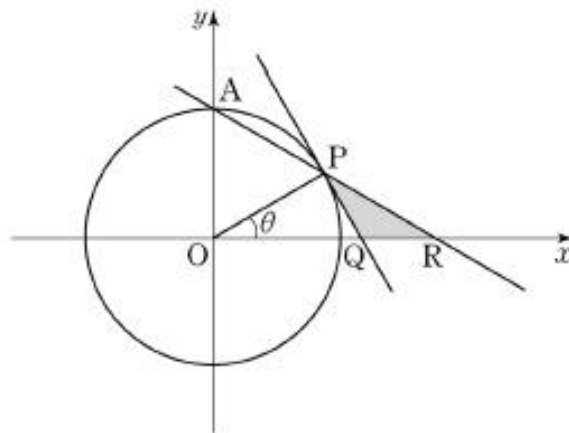
$$\therefore a = \overline{BE} \sin \theta = \frac{y^3}{x^2 + y^2}, b = \overline{DE} \cos \theta = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \left\{ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{정답}) \text{ ⑤}$$

2010년 06월 10일 Kice 2011 대수능 6월 모의평가 수리 (가형)

30. 좌표평면에서 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q , 점 $A(0,1)$ 과 점 P 를 지나는 직선이 x 축과 만나는 점을 R 라 하자.
 $\angle QOP = \theta$ 라 하고 삼각형 PQR 의 넓이를 $S(\theta)$ 라고 하자.
 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \alpha$ 일 때, 100α 의 값을 구하시오. (단, 점 P 는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



당시 평가원 시험 끝나고 나서 오르비 수학 게시판에 narurun님께서 직접 별해를 해설 강의로까지 찍어서 올려주셨던 기억이 나네요.

오늘 본 평가원 수리 가형 30번 별해...

작성일 | 10-06-10 16:36

작성자 | narurun

IMIN | 113454

조회수 | 966

~~모범답안~~이 아닌 별해입니다...

오르비 님들은 좋아하실려나??

<http://blog.naver.com/narurun/20107471531>

아쉽지만 위 주소로 들어가 봐도 지금은 영상이 삭제되어 있네요.

다행히도 제가 그 풀이를 생생하게 기억하고 있습니다 ^^;

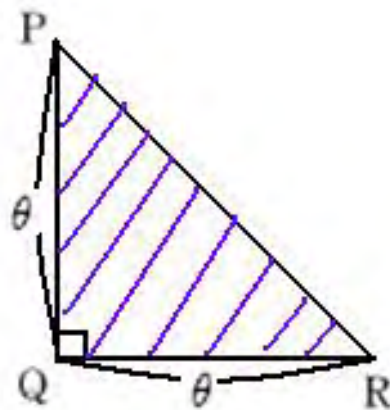
그렇게 푸는 걸 처음 봤을 때는 마치 뒤통수 맞은 기분이었죠..ㄷㄷ;

그 당시 저에겐 이 문제 또한 눈에 보이지 않는 극한 문제였거든요..

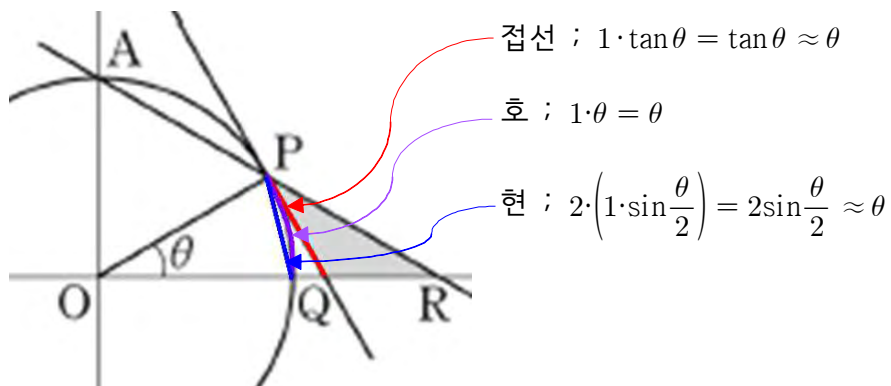
식을 다 세운 다음에 테일러 전개에 의한 근사로 간단하게 해봐도
여전히 식이 복잡할겁니다.

하지만 $\theta \rightarrow +0$ 의 상황의 그림이 생각보다 간단합니다.

혹 이 글을 보시는 분들 중에서 이렇게 푸신 분들도 계시겠네요.. ^^;



$\overline{PQ}$ 가 접선이지만 $\theta \rightarrow +0$ 이면 호와 현의 길이가 전부 다 같아집니다.



그리고 점 Q 에서의 접선은 y 축에 수직하겠죠?

그 다음이 살짝 까다로운데,

빗변 PR 의 기울기가 곧 선분 AP 의 기울기와 같고, 이는 -1 이 됩니다.

따라서 위와 같은 직각이등변 삼각형을 생각할 수 있고,

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 \text{이 되겠네요.}$$

얼마 전에 오르비 독수라동 독학생동에 Romanum님이 투척하신 문제입니다.

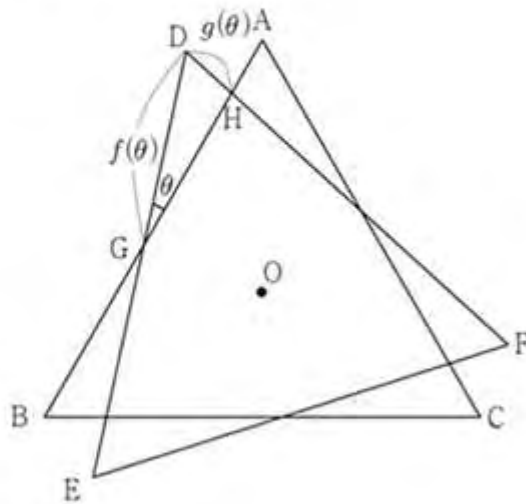
작성일 | 11-02-11 08:37

작성자 | Romanum

IMIN | 125018

조회수 | 198

29. 그림과 같이 외심 O 를 공유하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 $\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$ 가 있다. $\overline{AB}$ 와 $\overline{DE}$ 가 만나는 점이 G 이고, $\overline{AB}$ 와 $\overline{DF}$ 가 만나는 점이 H 일 때, $\angle DGH = \theta$ 이다. $\overline{DG} = f(\theta)$, $\overline{DH} = g(\theta)$ 일 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} - f(\theta)}{g(\theta)} = a$ 이다. $100a$ 의 값을 구하시오. [4점]



과외시장 때문에 로그인은 정기적으로 하는 편이니 용무 있으면 꼭주세요.

난이도가 별 다섯 개까지래도 별 여섯 개를 주고 싶은 문제네요.

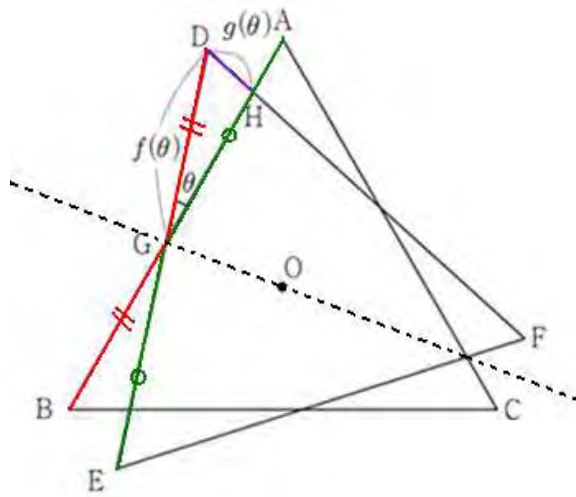
(물론 처음에 올라 왔을 때 저도 바로 못 맞췄습니다 π_{π})

암튼 Romanum님의 의도대로 복잡하게 푸는 법도 있지만

이 문제도 눈에 보이는 극한 문제이기에 더 간단하게 푸는 방법이 있습니다.

하지만 지금껏 다뤄왔던 것들보다 제법 어려울 거예요.

튼금없지만 조그마한 나비의 날개짓이 지구 반대편에서 폭풍을 일으킨다는 말처럼 극한적 상황에서의 미세한 수치를 착각하면 가차없이 틀려버리게 됩니다.



보다시피 빨간색 선분 GD 와
초록 선분 GA 의 길이 합이,
정삼각형 한 변의 길이인
 $2\sqrt{3}$ 으로 일정하네요.

(당시에 이 사실만으로 문제를
제이코사인 법칙을 이용해서
몇 줄 만에 빠르고 간단하게
풀어버린 분도 있었습니다만..)

그리고 극한 식에서 분자인 $\sqrt{3} - f(\theta)$ 가 의미하는 바를 해석해내야 합니다.

위 그림을 잘 보면 $\overline{GD}$ 와 $\overline{GA}$ 가 정삼각형 한 변 길이의 절반인

$\sqrt{3}$ 을 중심으로 $\pm k$ 의 관계네요.

$$\overline{GD} = \sqrt{3} - k = f(\theta), \quad \overline{GA} = \sqrt{3} + k$$

따라서 $\sqrt{3} - f(\theta)$ 는 $\overline{GD}$ 와 $\overline{GA}$ 의 차이인 $2k$ 의 절반입니다.

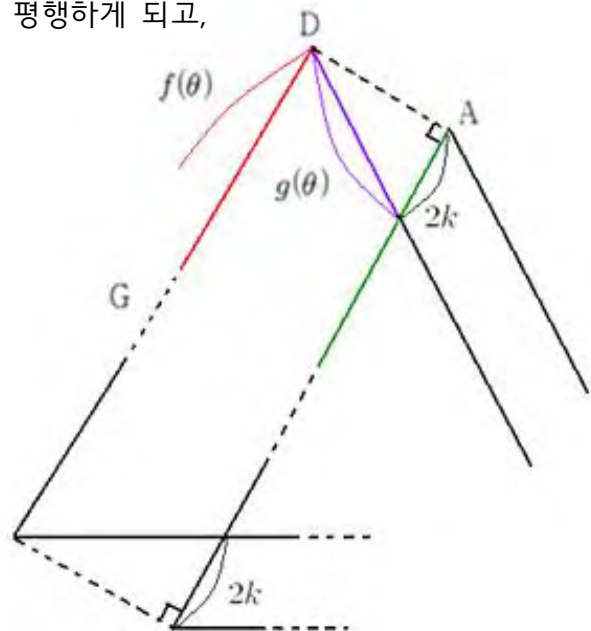
그러면 $\theta \rightarrow 0$ 의 상황에서는

오른쪽 그림과 같이 삼각형의 두 변이 평행하게 되고,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2k}{g(\theta)} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{k}{g(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} - f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{1}{4}$$

이 됩니다.



이제 눈에 보이지 않는 극한도 봅시다.

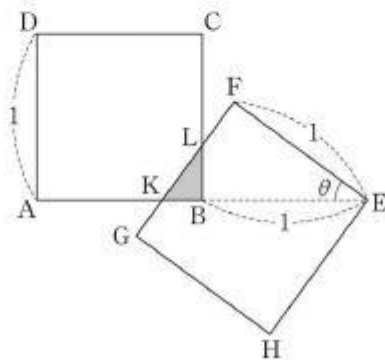
(어쩌면 저에게만 보이지 않을 수도 있겠네요... $\pi_ \tau_ \tau_$)

2008년 06월 04일 Kice 2009 대수능 6월 모의평가 수리 (가형) 30번

30. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서

변 AB를 연장한 직선 위에 $\overline{BE} = 1$ 인 점 E가 있다. 점 E를
꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH에
대하여 $\angle BEF = \theta$ 일 때, 변 FG와 변 AB의 교점을 K,
변 FG와 변 BC의 교점을 L이라 하자. 삼각형 KBL의 넓이를
 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{q}{p}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 이고, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



sol)

구해야 하는 극한값의 형태가 아마 $\frac{\theta^3}{\theta^3}$ 의 부정형인 것 같네요.

이런 경우엔 $S(\theta)$ 를 이루는 성분들을 제각각 찾아서 분해해서 찾아보면
오히려 더 복잡해질 뿐더러 시간도 더 걸립니다.

그러니까 일단 식은 다 세운 다음에

테일러 전개에 의한 근사식을 적용하는 정도로 만족해야 겠군요.

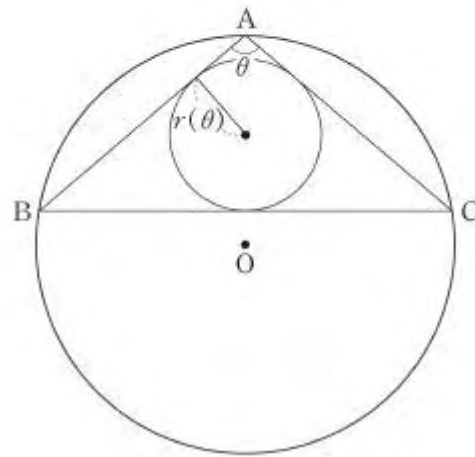
$$\overline{LB} = 1 \cdot \tan \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\overline{KB} + 1} \rightarrow \overline{KB} = \sec \theta - 1 \approx \frac{\theta^2}{2} \text{ 이므로 } \frac{q}{p} = \frac{1}{8} \text{ 입니다.}$$

2008년 11월 13일 2009학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 30번

30. 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A 가 있다. 그림과 같이 양수 θ 에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C 를 $\angle BAC = \theta$ 이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2} = \frac{q}{p}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



sol)

**쪽지
사절**

아벨

0

30. BC의 중점을 M이라 하면 $\theta \rightarrow \pi$ 일 때 $r(\theta) \rightarrow AM/2$
 $\angle AOB = \pi - \theta$ 이므로 $AM = 1 - \cos(\pi - \theta)$
 $\pi - \theta = \alpha$ 라 하면 구하는 식은 $\alpha \rightarrow 0$ 일 때 $(1 - \cos \alpha) / 2\alpha^2 = 1/4$



태면여신님

0

이풀이 짜네엄 제풀이는 저 이등변 삼각형을 a로 두면 $r(\theta) = 1/2a \times BM$
 근데 BM은 사인법칙에 의해 $\sin \theta$
 $a = \pi - \theta / 2$ 이걸로 전개하면 $1/4$

앗오타 a는 이등변삼각형의 각도 말하는거예요 세타 말고 $\pi - \theta$

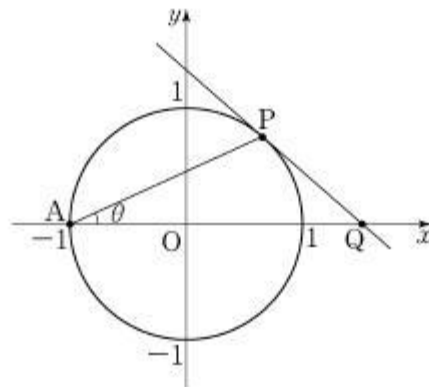
2009년 11월 12일 2010학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 28번

28. 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과

만나는 점을 Q라 하자. 점 A(-1, 0)과 원점 O에 대하여

$\angle PAO = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\overline{PQ} - \overline{OQ}}{\theta - \frac{\pi}{4}}$ 의 값은?

(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]



- ① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

sol)

**꼭지
사절**

아벨

0

28. OP를 잇고, OQ위에 PQ = BQ인 점 B를 잡으면

삼각형 PBQ는 내각이 순서대로 $45 + \theta, 45 + \theta, 90 - 2\theta$

삼각형 POB에서 내각은 순서대로 $45 - \theta, 2\theta, 135 - \theta$

OQ - PQ = OB이므로 구하는 값은 OB/각OPB

θ 가 45도로 수렴하면 삼각형 OPB는 각 B가 직각인

직각삼각형으로 수렴하므로 구하는 값은 $\sin OPB / OPB = 1$

답이 틀렸다면 대략 낭패..

제 눈엔 아무리 봐도 보이지가 않아서

다른 독동 교수분들의 색다른 풀이들을 굶어 와봤습니다.

보다시피 모든 관련 극한 문제들을 그런 식으로 풀 수는 없더라도,
가능한 한 많은 문제를 빠르고 정확하게 풀기 위해서는
부단한 노력 + 축적된 내공 + 수학적 센스 등이 아~주 아주 많이 요구됩니다.

한편으론, 아직 기차 여행으로 경치를 다 둘러보시지 못한 분들에게
문제를 풀어가(수식들을 전개해가는) 과정들을 주의 깊게 살펴보면서
수학적인 그 무언가를 직접 깨달아 보는 경험을 쌓는 게 우선이겠죠..?
그 과정에서도 수학적 능력이 몇 단계 level-up 하는 것도 무시 못 하거든요.
해서 종종 비행기가 너무 너무 타고 싶은 마음에
아름다운 추억을 만들 기회를 스스로 포기하려는 학생들을 바라보고만 있자니
너무나도 안타까우니까 수많은 분들이 아예 직관적 풀이를 지양하시기도 하구요.

그래도 요번 기회에 제가 충대를 메고
감히 이 부분에 대한 글을 올립니다.
판단은 여러분들께 맡기고 이만 글을 마칠게요.
열심히 공부하셔서 좋은 결과 있으시길..!

혹시나 제 눈에 보이지 않은 극한 문제들도
더 간단하게 푸실 수 있으신 분들의 제보를 받습니다..^^;
제가 3월 초에 군대 가기 전까지는 답변 해드릴 수 있습니다~!