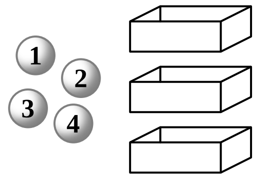
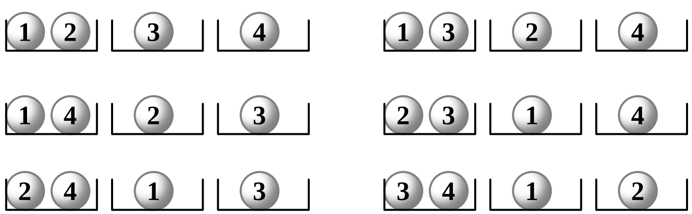
확률과 통계 맛보기

- 이 자료는 고등학교 내신/수능 대비용 수학 교재인 「박수칠 수학 기본서」를 홍보하기 위해 제작되었습니다.
- 이 자료에는 「집합의 분할」, 「자연수의 분할」 두 섹션이 포함되어 있으며, 2016년 9월 출판 예정인 「박수칠 수학 기본서-확률과 통계」에 들어갈 내용과 같습니다.
- 이 자료는 **「PDF 파일 원본 또는 그 인쇄물」**의 형태로 자유롭게 배포할 수 있습니다. 원본이 훼손된 경우, 특히 출처가 삭제되거나 변조된 경우에는 저작권법에 따라 강력하게 대응합니다.
- 「박수칠 수학 기본서」의 구입 또는 문의는 **http://atom.ac/books/1504**에서 할 수 있습니다.

다음 예제를 풀어보자.

> 예제1 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 공 네 개를 같은 규격의 상자 세 개에 나눠 담는 방법의 수를 구하시오. (단, 공을 담은 후에 비어 있는 상자는 없다.)
>
> 
>

네 개의 공을 세 개의 상자에 나눠 담으면서 빈 상자가 생기지 않도록 하려면 한 개의 상자에만 공을 두 개 넣고, 나머지 두 개의 상자에는 공을 하나씩 넣어야 한다.



이때, 한 개의 상자에 넣을 두 개의 공이 정해지면 나머지 상자에 공을 넣는 방법은 한 가지로 정해지며, 모든 방법의 수는 위 그림과 같이 6가지임을 알 수 있다.

예제1의 각 방법에서 상자를 집합으로, 공을 집합의 원소로 바꿔주면 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$를 세 부분집합의 합집합으로 나타내는 방법이 되며,

$$\{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \qquad \{1, 3\} \cup \{2\} \cup \{4\}$$
$$\{1, 4\} \cup \{2\} \cup \{3\} \qquad \{2, 3\} \cup \{1\} \cup \{4\}$$
$$\{2, 4\} \cup \{1\} \cup \{3\} \qquad \{3, 4\} \cup \{1\} \cup \{2\}$$

각각의 방법에 포함된 세 부분집합은 다음을 만족시킨다.

① 공집합이 아님 ② 임의의 두 부분집합은 서로소

따라서 서로 다른 네 개의 공을 세 개의 상자에 빈 상자가 생기지 않도록 나눠 담는 방법은 원소가 네 개인 집합을 공집합이 아니면서 서로소인 세 개의 부분집합의 합집합으로 나타내는 방법과 일대일로 대응된다.

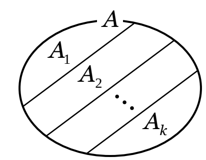
이처럼 유한 개의 원소를 갖는 집합을 공집합이 아니면서 서로소인 부분집합들의 합집합으로 나타내는 것을 「집합의 분할」이라 한다.

집합의 분할

• 「집합의 분할」의 정의

n개의 원소를 갖는 집합 A와 그 부분집합 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k$가

$i)\ A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k\ (1 \le k \le n)$
$ii)\ A_i \neq \emptyset\ \ (1 \le i \le k)$
$iii)\ A_i \cap A_j = \emptyset\ \ (1 \le i \le k,\ 1 \le j \le k,\ i \neq j)$

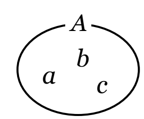


을 모두 만족시키면 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$를 k개의 부분을 갖는 집합 A의 분할(간단히 집합 A의 분할)이라 하고, $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k$를 분할의 부분이라 한다. 그리고 집합 A를 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$로 나타내는 것을 집합 A를 k개의 부분(또는 부분집합)으로 분할한다고 한다.

[예1] 집합 $\{a, b, c\}$를 분할하는 모든 방법은 다음과 같다.

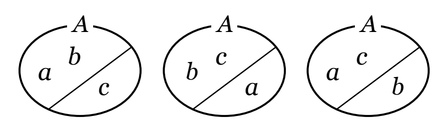
(1) 1개의 부분집합으로 분할

$\{a, b, c\}$



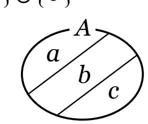
(2) 2개의 부분집합으로 분할

$\{a, b\} \cup \{c\},\ \{b, c\} \cup \{a\},\ \{a, c\} \cup \{b\}$



(3) 3개의 부분집합으로 분할

$\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$



• 「집합의 분할」의 기호

▷ n개의 원소를 갖는 집합을 k개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 오른쪽과 같은 기호로 표현된다. (단, $1 \leq k \leq n$)

$$\boldsymbol{S(n,k)}$$

▷ n개의 원소를 갖는 집합을 분할하는 모든 방법의 수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{S(n,1)+S(n,2)+S(n,3)+\cdots+S(n,n)}$$

[예2] 3개의 원소를 갖는 집합 $\{a,b,c\}$를 분할하는 방법의 수를 $S(n,k)$로 나타내면 다음과 같다.

(1) 1개의 부분집합으로 분할하는 방법은 $\{a,b,c\}$ 1가지
$\therefore S(3,1)=1$

(2) 2개의 부분집합으로 분할하는 방법은
$\{a,b\}\cup\{c\}$, $\{b,c\}\cup\{a\}$, $\{a,c\}\cup\{b\}$ 3가지
$\therefore S(3,2)=3$

(3) 3개의 부분집합으로 분할하는 방법은 $\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}$ 1가지
$\therefore S(3,3)=1$

(1)~(3)으로부터 집합 $\{a,b,c\}$를 분할하는 모든 방법의 수는 다음과 같다.
$S(3,1)+S(3,2)+S(3,3)=1+3+1=5$

★ $S(n,k)$에서 S는 분할의 개념을 처음으로 소개한 수학자 James Striling의 이름에서 따온 것이며, $S(n,k)$를 「제2종 스털링 수」라고 부른다.

★ 일반적으로 $S(n,k)$에서 n, k는 0 또는 자연수이고, 대소에 제약이 없다. (즉, $n>k$, $n=k$, $n<k$ 모두 가능) 하지만 9종 교과서에서는 n, k에 대한 조건이 통일되어 있지 않기 때문에 공부하면서 혼란이 생길 수 있다.

이 책에서는 공집합을 분할하는 경우($n=0$일 때), 0개의 부분집합으로 분할하는 경우($k=0$일 때), 원소 개수보다 더 많은 부분집합으로 분할하는 경우($n<k$일 때)를 제외하고 실제로 분할가능한 문제만 다루기 위해 n, k의 값을 $n \geq k$를 만족시키는 자연수로 제한한다.

예제2 다음의 값을 구하시오.

(1) $S(4,1)$ (2) $S(4,2)$ (3) $S(4,3)$ (4) $S(4,4)$

풀이 (1) $S(4,1)$의 값은 원소가 네 개인 집합 $\{a,b,c,d\}$를 하나의 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같다. 이때, 분할의 방법이 $\{a,b,c,d\}$ 뿐이므로 $S(4,1)=1$이다.

(2) $S(4,2)$의 값은 집합 $\{a,b,c,d\}$를 두 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같다. 이때, 각 부분집합에 속하는 원소 개수는 3개–1개 또는 2개–2개이며, 방법을 하나하나 나열하면 다음과 같다.

$\{b,c,d\}\cup\{a\}$, $\{a,c,d\}\cup\{b\}$, $\{a,b,d\}\cup\{c\}$, $\{a,b,c\}\cup\{d\}$,

☆ 원소가 한 개인 부분집합을 기준으로 하면 빠짐없이 셀 수 있다.

$\{a,b\}\cup\{c,d\}$, $\{a,c\}\cup\{b,d\}$, $\{a,d\}\cup\{b,c\}$

따라서 $S(4,2)=7$이다.

(3) $S(4,3)$의 값은 집합 $\{a,b,c,d\}$를 세 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같다. 이때, 각 부분집합에 속하는 원소 개수는 2개–1개–1개가 되고, 방법을 하나하나 나열하면 다음과 같다.

$\{a,b\}\cup\{c\}\cup\{d\}$, $\{a,c\}\cup\{b\}\cup\{d\}$, $\{a,d\}\cup\{b\}\cup\{c\}$,
$\{b,c\}\cup\{a\}\cup\{d\}$, $\{b,d\}\cup\{a\}\cup\{c\}$, $\{c,d\}\cup\{a\}\cup\{b\}$

따라서 $S(4,3)=6$이다.

☆ 원소가 두 개인 부분집합을 기준으로 하면 빠짐없이 셀 수 있다.

(4) $S(4,4)$의 값은 집합 $\{a,b,c,d\}$를 네 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같다. 이때, 분할의 방법이 $\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}\cup\{d\}$ 하나 뿐이므로 $S(4,4)=1$이다.

$S(n,k)$의 값을 구하는 가장 기초적인 방법은 집합의 분할을 하나하나 나열한 다음, 개수를 세는 것이다. n의 값이 비교적 작을 때는 이 방법을 쉽게 적용할 수 있지만, $S(4,2)$나 $S(5,3)$처럼 n의 값이 조금이라도 커지면 분할의 개수가 많아지면서 적용이 힘들거나 실수할 가능성이 많아진다.

이런 경우를 위해 다음 공식들을 알아두도록 하자.

$S(n,k)$의 성질

n개의 원소를 갖는 집합을 k개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수 $S(n,k)$에 대하여 다음이 성립한다. (단, $1 \le k \le n$)

(1) 1개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수

$$S(n,1)=1$$

$\because$ 집합 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$을 1개의 부분집합으로 분할하는 방법은 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 뿐이다.

(2) 2개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수

$$S(n,2)=2^{n-1}-1 \quad (\text{단, } n \ge 2)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{공집합이 아닌} \\ \text{진부분집합 개수}\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}}$$

$\because$ 집합 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$을 2개의 부분집합으로 분할하면 $A_1 \cup A_2$의 꼴이 되고, 집합 A_1을 집합 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$의 공집합 아닌 진부분집합 2^n-2개 가운데 하나로 두면 집합 A_2는 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}-A_1$로 정해진다.

그리고 $A_1=\{a_1\}$일 때의 분할 $\{a_1\}\cup\{a_2, \cdots, a_n\}$과 $A_1=\{a_2, \cdots, a_n\}$일 때의 분할 $\{a_2, \cdots, a_n\}\cup\{a_1\}$이 일치하듯이 집합 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$의 공집합 아닌 진부분집합을 하나씩 A_1에 넣어 분할 $A_1 \cup A_2$를 만들면 같은 분할이 두 번씩 나타나므로 분할의 방법의 수는 다음과 같다.

$$S(n,2)=(2^n-2)\times\frac{1}{2}=2^{n-1}-1$$

(3) $n-1$개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수

$$S(n,n-1)={}_nC_2 \quad (\text{단, } n \ge 2)$$

$\because$ 집합 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$을 $n-1$개의 부분집합으로 분할하면 $\{a_1, a_2\}\cup\{a_3\}\cup\cdots\cup\{a_n\}$처럼 원소가 2개인 부분집합 1개와 원소가 1개인 부분집합 $n-2$개의 합집합이 된다. 그리고 원소가 2개인 부분집합이 정해지면 원소가 1개인 부분집합들은 1가지로 정해진다.

따라서 분할하는 방법의 수는 원소가 2개인 부분집합의 개수와 같다.

$S(n,n-1)={}_nC_2$

(4) n개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수

$$S(n,n)=1$$

$\because$ 집합 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$을 n개의 부분집합으로 분할하는 방법은 $\{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\cdots\cup\{a_n\}$ 뿐이다.

(5) $S(n,k)$에 대한 점화식

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)$$

$\because$ n개의 원소를 갖는 집합 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$을 k개의 부분집합으로 분할하는 모든 방법은 $S(n,k)$가지이며, 다음 두 가지로 분류할 수 있다.

$i)$ a_1이 홀로 부분집합을 만드는 경우 (분할에 $\{a_1\}$이 포함될 때)

이 경우에 해당하는 분할은 $\{a_1\}\cup\boxed{}$의 꼴이며,

□ 안에는 집합 $\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$을 $k-1$개의 부분집합으로 분할하는 방법이 들어간다.

따라서 분할하는 방법의 수는 $S(n-1,k-1)$이다.

$ii)$ a_1이 다른 원소와 함께 부분집합을 만드는 경우 (분할에 $\{a_1\}$이 포함되지 않을 때)

이 경우에 해당하는 분할은

a_1을 제외한 집합 $\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$을 k개의 부분집합으로 분할한 다음,

분할에 포함된 부분집합 중 하나에 a_1을 추가한 것과 같다.

$\{a_2\}\cup\{a_3, a_4\}\cup\cdots\cup\{a_{n-1}, a_n\}$ —— 집합 $\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$을 k개의 부분집합으로 분할하는 방법 1가지에서

⇓ 부분집합 가운데 하나에 a_1 추가

$\{a_1, a_2\}\cup\{a_3, a_4\}\cup\cdots\cup\{a_{n-1}, a_n\}$
$\{a_2\}\cup\{a_1, a_3, a_4\}\cup\cdots\cup\{a_{n-1}, a_n\}$
$\cdots$
$\{a_2\}\cup\{a_3, a_4\}\cup\cdots\cup\{a_1, a_{n-1}, a_n\}$

} 집합 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$을 k개의 부분집합으로 분할하는 방법 k가지가 나타남

a_1을 제외한 집합 $\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$을 k개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 $S(n-1, k)$이고, 각각의 방법에 a_1을 추가하면 위의 설명처럼 집합 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$을 k개의 부분집합으로 분할하는 방법을 k가지씩 만들 수 있다.

따라서 분할하는 방법의 수는 $k\cdot S(n-1, k)$이다.

i), ii)에서 얻은 방법의 수를 더하면 다음의 점화식이 성립한다.

$$S(n, k)=S(n-1, k-1)+k\cdot S(n-1, k)$$

[예1] $S(5, 2)$를 (2)로 계산하면 다음과 같다.

$$S(5, 2)=2^{5-1}-1=15$$

[예2] $S(5, 4)$를 (3)으로 계산하면 다음과 같다.

$$S(5, 4)={}_5C_2=\frac{5\times4}{2}=10$$

[예3] $S(5, 3)$을 (2), (3), (5)로 계산하면 다음과 같다.

$$S(5, 3)=\underline{S(4, 2)}+3\cdot\underline{S(4, 3)}=7+3\times6=25$$

$$S(4, 2)=2^{4-1}-1=7 \qquad S(4, 3)={}_4C_2=\frac{4\times3}{2}=6$$

[예4] $S(6, 4)$를 (2), (3), (5)로 계산하면 다음과 같다.

$$S(6, 4)=\underbrace{S(5, 3)}_{\text{[예3]과 같음}}+4\cdot\underbrace{S(5, 4)}_{\text{[예2]와 같음}}=25+4\times10=65$$

★ [예1]~[예4]와 같이 공식 (1)~(5)를 이용하면 웬만한 $S(n, k)$의 값을 계산할 수 있다. 하지만 [예4]의 $S(6, 4)$처럼 n의 값이 커지면 공식 (5)를 두 번 이상 적용해야 하므로 역시나 계산이 복잡해진다.

이런 경우를 위해 $S(n, k)$의 값을 표로 정리한 「스털링 삼각형」을 알아두면 요긴하게 활용할 수 있다.

스털링 삼각형

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	⋯
1	1 S(1, 1)							
2	1 S(2, 1)	1 S(2, 2)						
3	1 S(3, 1)	3 S(3, 2)	1 S(3, 3)					
4	1	7	6	1				⋯
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
⋮				⋮				

스털링 삼각형을 작성하기 위해서는 공식 (1), (4), (5)를 이용해야 하며, 각각의 공식을 적용하는 방법은 다음과 같다.

(1)로부터 $S(n, 1)=1$이므로 1열을 1로 채운다.

(4)로부터 $S(n, n)=1$이므로 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 향하는 대각선을 1로 채운다.

	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1		1		
4	1			1	
5	1				1

(1) (4)

(5)로부터

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)$$

이므로 n행 k열의 값은 왼쪽 위에 있는 값에 바로 위 값의 k배를 더한 것이다.

	$k-1$	k
$n-1$	a	b
	그대로	$\times k$
n		$a+k\cdot b$

따라서 2열, 3열, 4열, … 은 각각 다음과 같이 계산된다.

2열 (왼쪽 위의 값)$+2\times$(바로 위의 값)

	1	2
1	1	
2	1	1
3	1	$1+2\cdot1=3$
4	1	
5	1	

	1	2
1	1	
2	1	1
3	1	3
4	1	$1+2\cdot3=7$
5	1	

	1	2
1	1	
2	1	1
3	1	3
4	1	7
5	1	$1+2\cdot7=15$

3열 (왼쪽 위의 값)$+3\times$(바로 위의 값)

	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4	1	7	$3+3\cdot1=6$
5	1	15	

	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4	1	7	6
5	1	15	$7+3\cdot6=25$

4열 (왼쪽 위의 값)$+4\times$(바로 위의 값)

	1	2	3	4
1	1			
2	1	1		
3	1	3	1	
4	1	7	6	1
5	1	15	25	$6+4\cdot1=10$

예제3 다음의 값을 구하시오. (단, 스털링 삼각형은 쓰지 말 것)

(1) $S(6,2)$ (2) $S(6,3)$ (3) $S(6,5)$ (4) $S(7,4)$

풀이 (1) 공식 $S(n,2)=2^{n-1}-1$을 적용하면 다음과 같다.

$$S(6,2)=2^{6-1}-1=31$$

(2) 공식 $S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)$를 적용하면 다음과 같다.

$$S(6,3)=\underline{S(5,2)}+3\cdot\underline{S(5,3)}=15+3\times25=90$$

$$S(5,2)=2^{5-1}-1=15$$

$$S(5,3)=S(4,2)+3\cdot S(4,3)=\left(2^{4-1}-1\right)+3\times{}_4C_2=25$$

(3) 공식 $S(n,n-1)={}_nC_2$를 적용하면 다음과 같다.

$$S(6,5)={}_6C_2=\frac{6\times5}{2}=15$$

(4) 공식 $S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)$를 적용하면 다음과 같다.

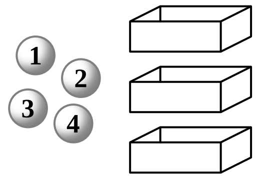
$$S(7,4)=\underline{S(6,3)}+4\cdot\underline{S(6,4)}=90+4\times65=350$$

(2)와 같음

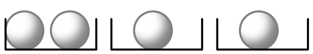
$$\begin{aligned}S(6,4)&=S(5,3)+4\cdot S(5,4)\\&=\{S(4,2)+3\cdot S(4,3)\}+4\times{}_5C_2\\&=\left\{\left(2^{4-1}-1\right)+3\times{}_4C_2\right\}+40\\&=65\end{aligned}$$

p.42의 예제1 을 한 번 더 살펴보자.

예제1 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 공 네 개를 같은 규격의 상자 세 개에 나눠 담는 방법의 수를 구하시오. (단, 공을 담은 후에 비어 있는 상자는 없다.)



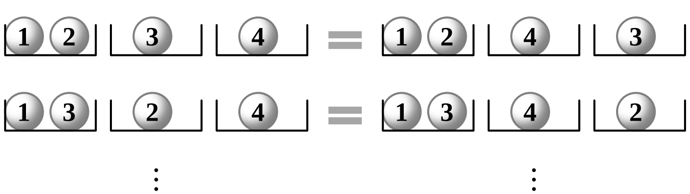
네 개의 공을 세 개의 상자에 나눠 담으면서 빈 상자가 생기지 않도록 하려면 한 개의 상자에만 공을 두 개 넣고, 나머지 두 개의 상자에는 공을 하나씩 넣으면 된다. 따라서 방법의 수는 다음과 같이 조합으로 나타낼 수 있다.



$${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1$$

공 4개 중 2개 뽑기 / 남은 공 2개 중 1개 뽑기 / 남은 공 1개 중 1개 뽑기

그런데 조합으로 표현된 방법의 수는 첫 번째에 두 개, 두 번째에 한 개, 세 번째에 한 개의 공을 뽑는 방법의 수이므로 다음과 같이 한 가지 방법을 두 번씩 세게 된다.



따라서 실제 방법의 수를 구하려면 조합으로 표현된 방법의 수를 2!로 나눠야 한다.

$${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}$$

이 방법의 수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$를 원소 개수가 각각 2개−1개−1개인 세 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같다. 이처럼 집합을 분할하는 방법의 수를 조합으로 표현할 수 있으며, 공식으로 정리하면 다음과 같다.

집합의 분할과 조합

n개의 원소를 갖는 집합을 p개, q개, r개의 원소를 갖는 세 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 조합으로 다음과 같이 표현된다. (단, $p+q+r=n$)

(1) p, q, r의 값이 모두 다를 때

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{n-p-q}C_r$$

원소 n개 중 p개 뽑기 / 남은 원소 n-p개 중 q개 뽑기 / 남은 원소 n-p-q개 중 r개 뽑기

[예1] 9개의 원소를 갖는 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$를 2개, 3개, 4개의 원소를 갖는 세 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 조합으로 다음과 같이 표현된다.

$${}_9C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4$$

원소 9개 중 2개 뽑기 / 남은 원소 7개 중 3개 뽑기 / 남은 원소 4개 중 4개 뽑기

(2) p, q, r 가운데 두 개의 값이 같을 때

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{n-p-q}C_r \times \frac{1}{2!}$$

원소 개수가 같은 부분집합끼리 위치를 바꾸는 경우의 수로 나눔

[예2] 9개의 원소를 갖는 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$를 4개, 4개, 1개의 원소를 갖는 세 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 조합으로 다음과 같이 표현된다.

(1)을 적용하면 분할하는 방법의 수는 ${}_9C_4 \times {}_5C_4 \times {}_1C_1$이 된다. 이것은 첫 번째에 4개, 두 번째에 4개, 세 번째에 1개의 원소를 뽑는 방법의 수와 같으므로 다음과 같이 한 가지 분할을 두 번씩 세게 된다.

$\{1,2,3,4\} \cup \{5,6,7,8\} \cup \{9\} = \{5,6,7,8\} \cup \{1,2,3,4\} \cup \{9\}$

분할의 관점에서는 세 부분집합 $\{1,2,3,4\}$, $\{5,6,7,8\}$, $\{9\}$의 합집합이므로 같은 경우지만, (1)의 방법을 적용하면 집합 $\{1,2,3,4\}$, $\{5,6,7,8\}$의 순서가 다르기 때문에 다른 경우로 간주된다.

$\{1,3,5,7\} \cup \{2,4,6,8\} \cup \{9\} = \{2,4,6,8\} \cup \{1,3,5,7\} \cup \{9\}$

분할의 관점에서는 세 부분집합 $\{1,3,5,7\}$, $\{2,4,6,8\}$, $\{9\}$의 합집합이므로 같은 경우지만, (1)의 방법을 적용하면 집합 $\{1,3,5,7\}$, $\{2,4,6,8\}$의 순서가 다르기 때문에 다른 경우로 간주된다.

$\vdots$

따라서 원소가 4개인 부분집합끼리 위치가 바뀐 경우를 한 가지로 세야 하며, 분할하는 방법의 수는 (1)로 구한 방법의 수를 2!로 나눈 것이다.

$${}_9C_4 \times {}_5C_4 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}$$

원소가 4개인 부분집합끼리
위치를 바꾸는 경우의 수로 나눔

(3) p, q, r의 값이 모두 같을 때

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{n-p-q}C_r \times \frac{1}{3!}$$

원소 개수가 같은 부분집합끼리
위치를 바꾸는 경우의 수로 나눔

[예3] 9개의 원소를 갖는 집합 $\{1,2,3,\cdots,9\}$를 3개, 3개, 3개의 원소를 갖는 세 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 조합으로 다음과 같이 표현된다.

(1)을 적용하면 분할하는 방법의 수는 ${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3$이 된다. 이것은 첫 번째에 3개, 두 번째에 3개, 세 번째에 3개의 원소를 뽑는 방법의 수와 같으므로 다음과 같이 한 가지 분할을 3!번씩 세게 된다.

$$\left.\begin{array}{c} \{1,2,3\} \cup \{4,5,6\} \cup \{7,8,9\} \\ \{4,5,6\} \cup \{1,2,3\} \cup \{7,8,9\} \\ \{7,8,9\} \cup \{1,2,3\} \cup \{4,5,6\} \\ \vdots \end{array}\right\} 3!\text{ 가지}$$

분할의 관점에서는 세 부분집합 $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$의 합집합이므로 같은 경우지만, (1)의 방법을 적용하면 세 부분집합의 순서가 다르기 때문에 다른 경우로 간주된다.

따라서 원소가 3개인 부분집합끼리 위치가 바뀐 경우를 한 가지로 세야 하며, 분할하는 방법의 수는 (1)로 구한 방법의 수를 3!로 나눈 것이다.

$${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!}$$

원소가 3개인 부분집합끼리
위치를 바꾸는 경우의 수로 나눔

★ $S(n,k)$의 값을 구하기 위해 분할의 정의, $S(n,k)$의 성질, 스털링 삼각형, ${}_nC_r$ 가운데 어떤 방법을 적용할 것인지는 다음 기준을 참고한다.

① $k=1,\ 2,\ n-1,\ n$일 때는 $S(n,k)$의 성질을 적용한다.

② n의 값이 비교적 작을 때($n=1,\ 2,\ 3\ 4$)는 분할의 정의에 따라 방법을 하나하나 나열하거나 $S(n,k)$의 성질을 적용한다.

③ n의 값이 비교적 클 때는 상황에 따라 $S(n,k)$의 성질 또는 ${}_nC_r$을 적용한다.

④ n의 값이 대책 없이 클 때는 스털링 삼각형을 작성한다.

★「원소가 6개인 집합을 원소가 3개−3개인 두 부분집합으로 분할하는 방법의 수」처럼 집합의 분할에서 부분집합의 원소 개수가 정해져 있을 때는 분할하는 방법의 수를 ${}_nC_r$로 계산하는 것이 유리하다.

예제4 집합 $\{a, b, c, \cdots, j\}$를 원소의 개수가 각각 3개, 3개, 2개, 2개인 네 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 ${}_nC_r$을 이용해서 표현하시오.

풀이 10개의 원소 가운데 3개, 3개, 2개, 2개의 원소를 차례로 뽑는 방법의 수는 ${}_{10}C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$이다. 그런데 여기에 포함된 각각의 방법으로 분할을 만들면 다음과 같이 $2! \times 2!$가지씩 중복되는 방법이 나타난다.

$$\left.\begin{array}{c} \{a,b,c\} \cup \{d,e,f\} \cup \{g,h\} \cup \{i,j\} \\ \{d,e,f\} \cup \{a,b,c\} \cup \{g,h\} \cup \{i,j\} \\ \{d,e,f\} \cup \{a,b,c\} \cup \{i,j\} \cup \{g,h\} \\ \vdots \end{array}\right\} 2! \times 2! \text{ 가지}$$

분할의 관점에서는 모두 같은 경우지만, 조합으로 세면 두 집합 $\{a,b,c\}$와 $\{d,e,f\}$, 두 집합 $\{g,h\}$와 $\{i,j\}$의 순서가 다르기 때문에 다른 경우로 간주된다.

따라서 원소가 3개인 부분집합끼리 위치가 바뀐 경우, 원소가 2개인 부분집합끼리 위치가 바뀐 경우를 한 가지로 세야 하며, 분할하는 방법의 수는 ${}_nC_r$로 표현한 방법의 수를 $2! \times 2!$로 나눈 것이다.

$$\boldsymbol{{}_{10}C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2! \times 2!}}$$

(3개, 3개, 2개, 2개의 원소를 차례로 뽑는 방법의 수) ÷ (원소가 3인 부분집합끼리, 또는 원소가 2개인 부분집합끼리 위치를 바꾸는 경우의 수)

예제5 다음의 값을 구하시오. (단, ${}_nC_r$을 이용할 것)
(1) $S(6,2)$ (2) $S(6,3)$ (3) $S(6,5)$ (4) $S(7,4)$

풀이 (1) $S(6,2)$는 원소가 6개인 집합을 2개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같고, 각각의 부분집합에 포함되는 원소 개수는 5개−1개 또는 4개−2개 또는 3개−3개다. 따라서

$${}_6C_5 \times {}_1C_1 + {}_6C_4 \times {}_2C_2 + {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 6+15+10 = 31$$

(2) $S(6,3)$은 원소가 6개인 집합을 3개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같고, 각각의 부분집합에 포함되는 원소 개수는 4개−1개−1개 또는 3개−2개−1개 또는 2개−2개−2개다. 따라서

$${}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} + {}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 + {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!}$$
$$= 15+60+15 = 90$$

(3) $S(6,5)$는 원소가 6개인 집합을 5개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같고, 각각의 부분집합에 포함되는 원소 개수는 2개−1개−1개−1개−1개다. 따라서

$${}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{4!} = 15$$

(4) $S(7,4)$는 원소가 7개인 집합을 4개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같고, 각각의 부분집합에 포함되는 원소 개수는 4개−1개−1개−1개 또는 3개−2개−1개−1개 또는 2개−2개−2개−1개다. 따라서

$${}_7C_4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{3!} + {}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}$$
$$+ {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{3!}$$
$$= 35+210+105 = 350$$

- **집합의 분할 – 유형①**
  문제에 주어진 조건을 집합의 분할로 표현해본다.

예제6 휴가 때 보기 위해 단편 애니메이션 6편을 이동식 저장장치 2개에 넣어두기로 했다. 애니메이션 6편은 크기가 1.5GB인 파일 6개로 이루어져 있고 이동식 저장장치의 용량이 개당 8GB일 때, 파일을 이동식 저장장치에 나눠 담는 방법의 수를 구하시오. (단, 이동식 저장장치 2개는 같은 제품이며, 하나의 파일을 쪼개서 저장하는 방법은 생각하지 않는다.)

풀이 파일 6개의 크기 합이 9GB이고, 이동식 저장장치 1개의 용량이 8GB이므로 파일 6개를 이동식 저장장치 2개에 담으려면 각 저장장치에 적어도 1개 이상의 파일이 담겨야 한다.

따라서 주어진 문제는 원소가 6개인 집합을 2개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수 $S(6,2)$를 구하는 것과 같고, 다음과 같이 계산할 수 있다.

$i)$ $S(n,k)$의 성질을 이용하는 방법

$p.44$의 (2)로부터

$$S(6,2)=2^{6-1}-1=31$$

$ii)$ ${}_nC_r$ 을 이용하는 방법

원소가 6개인 집합을 2개의 부분집합으로 분할할 때, 각각의 부분집합에 속하는 원소의 개수는 5개–1개 또는 4개–2개 또는 3개–3개다. 따라서

$${}_6C_5\times{}_1C_1+{}_6C_4\times{}_2C_2+{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=6+15+10=31$$

예제7 자연수 2310을 1보다 큰, 두 개 이상의 자연수의 곱으로 나타내는 방법의 수를 구하시오.

풀이 $2310=2\times3\times5\times7\times11$이므로 2310을 1보다 큰, 두 개 이상의 자연수의 곱으로 표현하는 방법을 몇 가지 나열하면 다음과 같고,

$$\underbrace{30}_{2\times3\times5}\times\underbrace{77}_{7\times11},\quad \underbrace{14}_{2\times7}\times\underbrace{165}_{3\times5\times11},\quad 5\times\underbrace{6}_{2\times3}\times\underbrace{77}_{7\times11},\quad 5\times\underbrace{6}_{2\times3}\times7\times11,\quad\cdots$$

각각의 방법은 2310의 소인수를 원소로 하는 집합 $\{2,3,5,7,11\}$을 몇 개의 부분집합으로 분할하는 방법에 대응시킬 수 있다.

$$30\times77\rightarrow\{2,3,5\}\cup\{7,11\}\qquad 5\times6\times77\rightarrow\{5\}\cup\{2,3\}\cup\{7,11\}$$
$$14\times165\rightarrow\{2,7\}\cup\{3,5,11\}\qquad 5\times6\times7\times11\rightarrow\{5\}\cup\{2,3\}\cup\{7\}\cup\{11\}$$

따라서 자연수 2310을 1보다 큰, 두 개 이상의 자연수의 곱으로 나타내는 방법의 수는 집합 $\{2,3,5,7,11\}$을 두 개 이상의 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같고, 다음과 같이 계산된다.

$$S(5,2)+S(5,3)+S(5,4)+S(5,5)=15+25+10+1=51$$

$$\left(\begin{array}{l}\because S(5,2)=2^{5-1}-1=15\\ \quad S(5,3)=S(4,2)+3\cdot S(4,3)=\left(2^{4-1}-1\right)+3\times{}_4C_2=25\\ \quad S(5,4)={}_5C_2=10\end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}☆\ S(n,k)=S(n-1,k-1)\\ \qquad\qquad +k\cdot S(n-1,k)\end{array}}$$

★ 위 풀이의 $S(5,2)$, $S(5,3)$, $S(5,4)$는 ${}_nC_r$로 계산할 수도 있다.

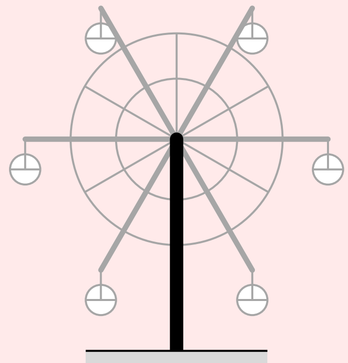
$$S(5,2)=\begin{pmatrix}\text{원소가 4개–1개인}\\\text{부분집합으로 분할}\\\text{하는 방법의 수}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{원소가 3개–2개인}\\\text{부분집합으로 분할}\\\text{하는 방법의 수}\end{pmatrix}$$
$$={}_5C_4\times{}_1C_1+{}_5C_3\times{}_2C_2=15$$

$$S(5,3)=\begin{pmatrix}\text{원소가 3개–1개–1개인}\\\text{부분집합으로 분할하는}\\\text{방법의 수}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{원소가 2개–2개–1개인}\\\text{부분집합으로 분할하는}\\\text{방법의 수}\end{pmatrix}$$
$$={}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}+{}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=25$$

$$S(5,4)=\begin{pmatrix}\text{원소가 2개–1개–1개–1개인}\\\text{부분집합으로 분할}\\\text{하는 방법의 수}\end{pmatrix}={}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{3!}=10$$

예제8 어느 놀이공원에 설치된 관람차에는 6개의 탑승 공간이 있고, 각 탑승 공간에는 최대 4명까지 탑승할 수 있다.

관광객 6명이 관람차에 탑승하기 위해 조를 나누는 방법의 수를 구하시오. (단, 탑승 순서는 고려하지 않으며, 빈 탑승 공간이 생길 수 있다.)



풀이 탑승 공간별 정원이 4명이므로 각 조에 속하는 인원은 4명 이하가 되어야 하고, 조를 나누는 방법의 수는 조의 개수에 따라 다음과 같이 구분해서 셀 수 있다.

i) 2개의 조로 나눌 때

각 조에 속하는 인원은 4명−2명 또는 3명−3명이므로 방법의 수는 다음과 같다.

$${}_6C_4 \times {}_2C_2 + {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 15 + 10 = 25$$

ii) 3개의 조로 나눌 때

원소가 6개인 집합을 3개의 부분집합으로 분할할 때, 각각의 부분집합에 포함되는 원소의 개수는 4개 이하다. 따라서 관광객 6명을 3개의 조로 나누는 방법의 수는 원소가 6개인 집합을 3개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수 $S(6,3)$과 같다.

$$S(6,3) = S(5,2) + 3 \cdot \underline{S(5,3)} = (2^{5-1}-1) + 3 \times 25 = 90$$

$$\begin{aligned} S(5,3) &= S(4,2) + 3 \cdot S(4,3) \\ &= (2^{4-1}-1) + 3 \times {}_4C_2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

iii) 4개의 조로 나눌 때

관광객 6명을 4개의 조로 나누는 방법의 수는 원소가 6개인 집합을 4개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수 $S(6,4)$와 같다.

$$S(6,4) = S(5,3) + 4 \cdot S(5,4) = 25 + 4 \times {}_5C_2 = 65$$

iv) 5개의 조로 나눌 때

관광객 6명을 5개의 조로 나누는 방법의 수는 원소가 6개인 집합을 5개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수 $S(6,5)$와 같다.

$$S(6,5) = {}_6C_2 = 15$$

v) 6개의 조로 나눌 때

관광객 6명을 6개의 조로 나누는 방법의 수는 1가지 뿐이다.

i)~v)로부터 구하는 방법의 수는 다음과 같다.

$$25 + 90 + 65 + 15 + 1 = 196$$

★ 원소가 6개인 집합을 2개의 부분집합으로 분할하면 각각의 부분집합에 포함되는 원소 개수가 5개−1개 또는 4개−2개 또는 3개−3개이다. 따라서 부분집합의 원소 개수가 4보다 큰 분할이 있기 때문에 i)의 방법의 수는 $S(6,2)$와 다르다.

i)의 방법의 수를 $S(6,2)$를 이용해서 세려면 $S(6,2)$로부터 부분집합의 원소 개수가 5개−1개인 분할의 개수를 빼면 된다.

$$S(6,2) - {}_6C_5 \times {}_1C_1 = (2^{6-1}-1) - 6 = 25$$

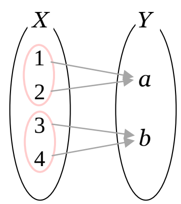
• 집합의 분할 – 유형②
집합을 분할한 다음, 각 부분집합을 새로운 대상에 대응시킨다.

예제9 다음과 같이 정의되는 함수 f 가운데 공역과 치역이 일치하는 것의 개수를 각각 구하시오.

(1) $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{a,b\}$, $f:X\to Y$

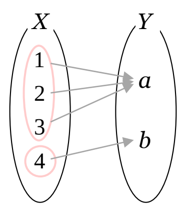
(2) $X=\{1,2,3,4,5\}$, $Y=\{a,b,c\}$, $f:X\to Y$

풀이 (1) 주어진 함수 f의 공역과 치역이 일치하려면 공역 Y의 모든 원소가 함숫값이 되어야 하고, 오른쪽 예와 같이 정의역 X의 원소 가운데 몇 개는 a로, 나머지는 b로 대응되어야 한다.



따라서 공역과 치역이 일치하는 함수 f의 개수는 정의역 X를 2개의 부분집합으로 분할한 다음, 각각의 부분집합을 공역 Y의 원소 a, b로 일대일대응시키는 방법의 수와 같다.

$$S(4,2)\times 2!=\left(2^{4-1}-1\right)\times 2=14$$



정의역 X를 2개의 부분집합으로 분할하는 방법 가운데 하나인 $\{1,2,3\}\cup\{4\}$에 대하여 두 부분집합을 공역의 원소 a, b로 일대일대응시키는 방법의 수

★ $S(4,2)$를 ${}_nC_r$로 계산하면 다음과 같다.

$$S(4,2)=\begin{pmatrix}\text{원소가 3개–1개인}\\\text{부분집합으로 분할}\\\text{하는 방법의 수}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{원소가 2개–2개인}\\\text{부분집합으로 분할}\\\text{하는 방법의 수}\end{pmatrix}$$

$$={}_4C_3\times{}_1C_1+{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=7$$

⟨(1)의 다른 풀이⟩

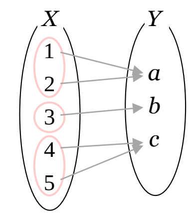
함수 f는 (공역)=(치역)인 것과 (공역)≠(치역)인 것 2가지로 분류할 수 있다. 그리고 공역 Y의 원소가 2개 뿐이므로 (공역)=(치역)인 것의 개수를 세는 것보다는 (공역)≠(치역)인 것의 개수를 세는 것이 쉽다.

함수 f 가운데 (공역)≠(치역)인 것은 정의역 X의 모든 원소가 a로 대응되는 $f(x)=a$와 정의역 X의 모든 원소가 b로 대응되는 $f(x)=b$ 두 가지 뿐이다.

따라서 함수 f 가운데 (공역)=(치역)인 것의 개수는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}\text{함수 } f\text{의}\\\text{개수}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{(공역)≠(치역)인}\\\text{함수 개수}\end{pmatrix}={}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$$

(2) 함수 f의 공역과 치역이 일치하려면 오른쪽 예와 같이 정의역 X의 원소 가운데 몇 개는 a로, 몇 개는 b로, 나머지는 c로 대응되어야 한다.



따라서 공역과 치역이 일치하는 함수 f의 개수는 정의역 X를 3개의 부분집합으로 분할한 다음, 각각의 부분집합을 공역 Y의 원소 a, b, c로 일대일대응시키는 방법의 수와 같다.

$$S(5,3)\times 3!=25\times 6=150$$

$$\begin{aligned}S(5,3)&=S(4,2)+3\cdot S(4,3)\\&=\left(2^{4-1}-1\right)+3\times{}_4C_2\\&=25\end{aligned}$$

정의역 X를 3개의 부분집합으로 분할하는 방법 가운데 하나인 $\{1,2\}\cup\{3\}\cup\{4,5\}$에 대하여 세 부분집합을 공역의 원소 a, b, c로 일대일대응시키는 방법의 수

★ $S(5,3)$을 ${}_nC_r$로 계산하면 다음과 같다.

$$S(5,3)=\begin{pmatrix}\text{원소가 3개–1개–1개인}\\\text{부분집합으로 분할하는}\\\text{방법의 수}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{원소가 2개–2개–1개인}\\\text{부분집합으로 분할하는}\\\text{방법의 수}\end{pmatrix}$$

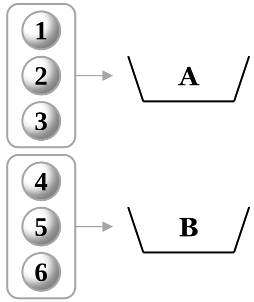
$$={}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}+{}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=25$$

[2011학년도 수능 나형 #20]

예제10 서로 다른 6개의 공을 두 바구니 A, B에 3개씩 담을 때, 그 결과로 나올 수 있는 경우의 수를 구하시오.

풀이 원소가 6개인 집합을 원소가 3개−3개인 두 부분집합으로 분할한 다음, 각각의 부분집합을 바구니 A, B와 일대일대응시키는 방법의 수를 세면 된다.

$$\left({}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}\right)\times 2! = 20$$

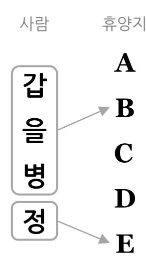


[2006학년도 수능 가형 확통 #30]

예제11 네 사람이 다섯 곳의 휴양지 중에서 각각 하나의 휴양지를 임의로 선택한다고 할 때, 세 사람만 같은 휴양지를 선택하는 경우의 수를 구하시오.

풀이 원소가 4개인 집합을 원소가 3개−1개인 두 부분집합으로 분할한 다음, 각각의 부분집합을 다섯 곳의 휴양지 가운데 두 곳과 일대일대응시키는 방법의 수를 세면 된다.

$$\left({}_4C_3\times{}_1C_1\right)\times\underline{{}_5P_2} = 80$$



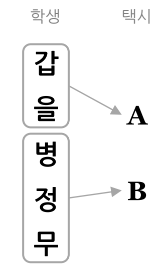
▹ 휴양지 다섯 곳 가운데 두 곳을 뽑아 나열한 다음 첫 번째 휴양지에는 원소가 3개인 부분집합을, 두 번째 휴양지에는 원소가 1개인 부분집합에 대응시키는 방법의 수다.

▹ 집합을 분할한 다음 원소가 3개인 부분집합을 휴양지 5곳 가운데 1곳에, 원소가 1개인 부분집합을 남은 휴양지 4곳 가운데 1곳에 대응시키는 방법의 수 5×4를 대입해도 된다.

예제12 5명의 학생이 2대의 택시에 나눠타는 방법의 수를 구하시오. (단, 두 택시는 서로 다른 모델이고, 각각 승객을 4명까지 태울 수 있다.)

풀이 원소가 5개인 집합을 2개의 부분집합으로 분할한 다음, 각각의 부분집합을 두 대의 택시와 일대일대응시키는 방법의 수를 세면 된다.

$$S(5,2)\times 2! = \left(2^{5-1}-1\right)\times 2 = 30$$



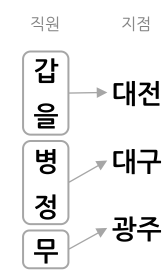
[2005학년도 수능 6월 모평 가형 이산수학 #30]

예제13 어떤 회사에서 신입 직원 5명을 3개의 팀으로 나눈 후 대전, 대구, 광주의 세 지점에 각각 한 팀씩 배치하려고 한다. 이들 신입 직원 5명을 이와 같은 방법으로 배치하는 방법의 수를 구하시오.

풀이 원소가 5개인 집합을 3개의 부분집합으로 분할한 다음, 각각의 부분집합을 세 지점과 일대일대응시키는 방법의 수를 세면 된다.

$$\underline{S(5,3)}\times 3! = 25\times 6 = 150$$

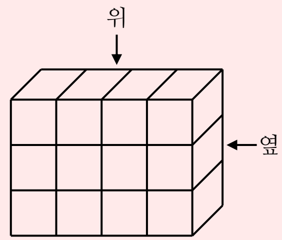
$$\begin{aligned} S(5,3) &= S(4,2)+3\cdot S(4,3) \\ &= \left(2^{4-1}-1\right)+3\times{}_4C_2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

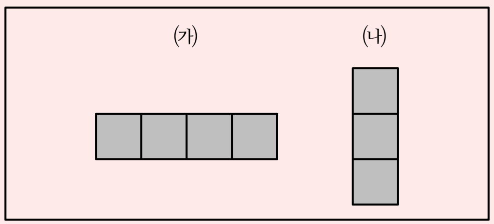


[2006학년도 수능 공통 #17]

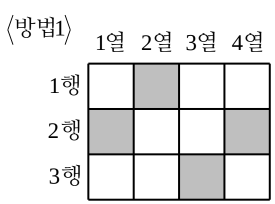
예제14 다음 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.

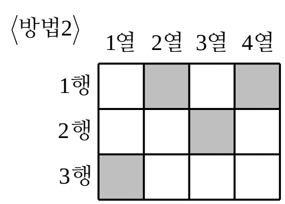
이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오.



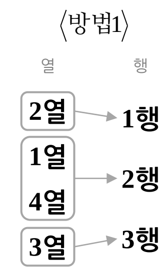


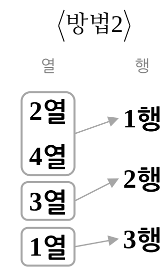
풀이 위에서 본 모양이 (가)와 같으려면 검은 상자가 각 열마다 1개씩 존재해야 하고, 옆에서 본 모양이 (나)와 같으려면 검은 상자가 각 행에 적어도 1개씩 존재해야 한다. 이를 만족시키는 방법 가운데 두 가지를 그림으로 나타내면 다음과 같다.





첫 번째 방법에서 검은 상자의 위치는 1행의 2열, 2행의 1열과 4열, 3행의 3열이다. 두 번째 방법에서 검은 상자의 위치는 1행의 2열과 4열, 2행의 3열, 3행의 1열이다. 각각의 방법에서 열과 행의 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

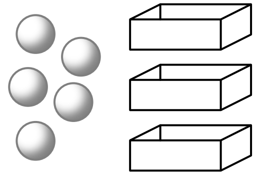




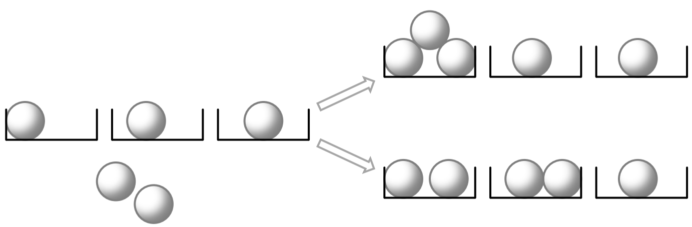
따라서 1열~4열 가운데 몇 개는 1행과, 몇 개는 2행과, 나머지는 3행과 대응되어야 한다. 그리고 구하는 방법의 수는 원소가 4개인 집합을 원소가 2개–1개–1개인 세 부분집합으로 분할한 후, 각각의 부분집합을 1행~3행과 일대일대응시키는 방법의 수와 같다.

$$\left({}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3! = 36$$

다음 예제를 풀어보자.

> 예제1 똑같이 생긴 공 다섯 개를 같은 규격의 상자 세 개에 나눠 담는 방법의 수를 구하시오. (단, 공을 담은 후에 비어 있는 상자는 없다.)
>
> 

$p.42$의 예제1과 다르게 공들이 똑같이 생겼기 때문에 각각의 방법은 상자에 담긴 공의 개수에 의해 구별된다. 또한 각 상자에 공이 적어도 하나씩 담겨야 하므로 구하는 방법의 수는 각 상자에 공이 하나씩 담겨 있을 때, 나머지 두 개의 공을 상자에 나눠 담는 방법의 수와 같다.



나머지 두 개의 공을 같은 상자에 넣으면 각 상자에 담긴 공은 3개, 1개, 1개가 되고, 다른 상자에 넣으면 각 상자에 담긴 공은 2개, 2개, 1개가 된다. 따라서 모든 방법의 수는 2가지임을 알 수 있다.

예제1의 각 방법을 상자에 들어 있는 공의 개수 합으로 나타내면 자연수 5를 세 자연수의 합으로 나타내는 방법이 되며,

$$\mathbf{3+1+1} \qquad\qquad \mathbf{2+2+1}$$

각 상자의 공이 3개–1개–1개일 때, 1개–3개–1개일 때, 1개–1개–3개일 때가 같은 경우인 것처럼 세 자연수의 합 3+1+1, 1+3+1, 1+1+3을 같은 경우로 볼 수 있다.

따라서 똑같이 생긴 다섯 개의 공을 세 개의 상자에 빈 상자가 생기지 않도록 담는 방법은 자연수 5를 세 자연수의 합으로 나타내는 방법과 일대일로 대응된다.

이처럼 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 「자연수의 분할」이라 한다.

자연수의 분할

- 「자연수의 분할」의 정의

자연수 n과 n 이하의 자연수 $n_1, n_2, \cdots, n_k$가

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\ n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \ (1 \le k \le n) \\ ii)\ n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_k \end{array}}$$

를 모두 만족시키면 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$를 자연수 n의 분할이라 하고, n_1, n_2, $\cdots$, n_k를 분할의 부분이라 한다. 그리고 자연수 n을 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$로 나타내는 것을 자연수 n을 k개의 부분(또는 자연수)로 분할한다고 한다.

[예1] 자연수 6을 분할하는 모든 방법을 분할에 포함된 가장 큰 자연수를 기준으로 나열하면 다음과 같다.

(1) 가장 큰 자연수가 6인 분할 : 6

(2) 가장 큰 자연수가 5인 분할 : 5+1

(3) 가장 큰 자연수가 4인 분할 : 4+2, 4+1+1

(4) 가장 큰 자연수가 3인 분할 : 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1

(5) 가장 큰 자연수가 2인 분할 : 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1

(6) 가장 큰 자연수가 1인 분할 : 1+1+1+1+1+1

★ 위 정의의 ii)에 따라 각각의 방법에 포함된 자연수는 큰 것부터 나열한다. 즉, 3+2+1을 2+3+1이나 1+2+3으로 쓰지 않는다.

• 「자연수의 분할」의 기호

▹ 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 오른쪽과 같은 기호로 표현된다. (단, $1 \le k \le n$)

$$\boldsymbol{P(n,\, k)}$$

▹ 자연수 n을 분할하는 모든 방법의 수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{P(n,\,1)+P(n,\,2)+P(n,\,3)+\,\cdots\,+P(n,\,n)}$$

[예2] 자연수 6을 분할하는 방법의 수를 $P(n,k)$로 나타내면 다음과 같다.

(1) 한 개의 자연수로 분할하는 방법

6 한 가지 $\Rightarrow$ $P(6,1)=1$

(2) 두 개의 자연수로 분할하는 방법

$5+1,\ 4+2,\ 3+3$ 세 가지 $\Rightarrow$ $P(6,2)=3$

(3) 세 개의 자연수로 분할하는 방법

$4+1+1,\ 3+2+1,\ 2+2+2$ 세 가지 $\Rightarrow$ $P(6,3)=3$

(4) 네 개의 자연수로 분할하는 방법

$3+1+1+1,\ 2+2+1+1$ 두 가지 $\Rightarrow$ $P(6,4)=2$

(5) 다섯 개의 자연수로 분할하는 방법

$2+1+1+1+1$ 한 가지 $\Rightarrow$ $P(6,5)=1$

(6) 여섯 개의 자연수로 분할하는 방법

$1+1+1+1+1+1$ 한 가지 $\Rightarrow$ $P(6,6)=1$

(1)~(6)으로부터 자연수 6을 분할하는 모든 방법의 수는 다음과 같다.

$P(6,1)+P(6,2)+\cdots+P(6,6)=1+3+3+2+1+1=11$

★ $P(n,k)$에서 P는 분할을 의미하는 Partition에서 따온 것이다.

★ 일반적으로 $P(n,k)$에서 $n,\ k$는 자연수이고, 대소에 제약이 없다. (즉, $n>k,\ n=k,\ n<k$ 모두 가능) 하지만 9종 교과서에서는 $n,\ k$에 대한 조건이 통일되어 있지 않기 때문에 공부하면서 혼란이 생길 수 있다.

이 책에서는 자연수 n을 n개보다 많은 자연수의 합으로 분할할 때($n<k$일 때)를 제외하고 실제로 분할가능한 문제만 다루기 위해 $n,\ k$의 값을 $n \ge k$를 만족시키는 자연수로 제한한다.

예제2 다음의 값을 구하시오.

(1) $P(7,3)$ (2) $P(7,4)$ (3) $P(7,5)$ (4) $P(7,6)$

풀이 (1) $P(7,3)$의 값은 자연수 7을 세 개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다. 이때, 분할의 방법이 $5+1+1,\ 4+2+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2$ 네 가지이므로 $P(7,3)=4$이다.

(2) $P(7,4)$의 값은 자연수 7을 네 개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다. 이때, 분할의 방법이 $4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1$ 세 가지이므로 $P(7,4)=3$이다.

(3) $P(7,5)$의 값은 자연수 7을 다섯 개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다. 이때, 분할의 방법이 $3+1+1+1+1,\ 2+2+1+1+1$ 두 가지이므로 $P(7,5)=2$이다.

(4) $P(7,6)$의 값은 자연수 7을 여섯 개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다. 이때, 분할의 방법이 $2+1+1+1+1+1$ 뿐이므로 $P(7,6)=1$이다.

$S(n,k)$와 마찬가지로 $P(n,k)$ 또한 값을 구하는 가장 기초적인 방법은 자연수의 분할을 하나하나 나열한 다음, 개수를 세는 것이다. 하지만 n의 값이 조금이라도 커지면 실수할 가능성이 많아지므로 다음 공식들도 함께 익혀서 이용할 수 있도록 하자.

$P(n,k)$의 계산

자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(n,k)$에 대하여 다음이 성립한다. (단, $1 \le k \le n$)

(1) 1개의 자연수로 분할하는 방법의 수

$$\boldsymbol{P(n,1)=1}$$

$\because$ 자연수 n을 1개의 자연수로 분할하는 방법은 n 뿐이다.

(2) 2개의 자연수로 분할하는 방법의 수

$$\boldsymbol{P(n,2)=\left[\frac{n}{2}\right]}$$

(단, $n \ge 2$이고, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 의미한다.)

$\because$ 자연수 n을 2개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 다음과 같이 n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나눠서 셀 수 있다.

i) $n=2k$일 때 (단, $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

자연수 $2k$를 두 개의 자연수로 분할하는 방법은 다음과 같다.

$\boxed{2k-1}+\boxed{1},\ \boxed{2k-2}+\boxed{2},\ \cdots,\ \boxed{k+1}+\boxed{k-1},\ \boxed{k}+\boxed{k}$

따라서 방법은 k가지이며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k=\frac{n}{2}=\left[\frac{n}{2}\right]$$

ii) $n=2k+1$일 때 (단, $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

자연수 $2k+1$을 두 개의 자연수로 분할하는 방법은 다음과 같다.

$\boxed{2k}+\boxed{1},\ \boxed{2k-1}+\boxed{2},\ \cdots,\ \boxed{k+2}+\boxed{k-1},\ \boxed{k+1}+\boxed{k}$

따라서 방법은 k가지이며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k=\frac{n-1}{2}=\left[\frac{n}{2}\right]$$

(3) $n-1$개의 자연수로 분할하는 방법의 수

$$\boldsymbol{P(n,n-1)=1} \quad (\text{단, } n \ge 2)$$

$\because$ 자연수 n을 $n-1$개의 자연수로 분할하는 방법은 $2+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2\text{개}}$ 뿐이다.

(4) n개의 자연수로 분할하는 방법의 수

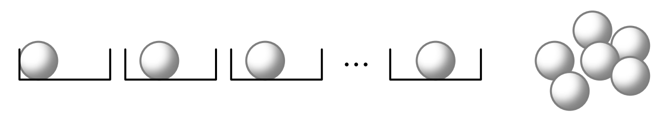
$$\boldsymbol{P(n,n)=1}$$

$\because$ 자연수 n을 n개의 자연수로 분할하는 방법은 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}$ 뿐이다.

(5) $P(n,k)$에 대한 첫 번째 점화식

$$\boldsymbol{P(n,k)=P(n-k,1)+P(n-k,2)+\cdots+P(n-k,k)}$$

$\because$ 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 똑같이 생긴 공 n개를 같은 규격의 상자 k개에 빈 상자가 생기지 않도록 나눠 담는 방법의 수와 같다. 이때, 각 상자에 공이 적어도 하나씩 담겨야 하므로 방법의 수는 각 상자에 공이 하나씩 담겨 있을 때, 나머지 $n-k$의 공을 상자에 나눠 담는 방법의 수와 같다.



k개의 상자에 공이 1개씩 담겨 있음 　　 남은 공 $n-k$개

그리고 나머지 $n-k$의 공은 1개의 상자에 모두 들어갈 수도 있고, 몇 개의 상자에 나눠서 들어갈 수도 있으므로 방법의 수는 다음과 같다.

$n-k$의 공을 1개의 상자에 담는 방법의 수 $P(n-k,1)$
$n-k$의 공을 2개의 상자에 담는 방법의 수 $P(n-k,2)$
$\vdots$
$n-k$의 공을 k개의 상자에 담는 방법의 수 $P(n-k,k)$

이 방법의 수를 모두 더하면 다음이 성립한다.

$$P(n,k)=P(n-k,1)+P(n-k,2)+\cdots+P(n-k,k)$$

(6) $P(n,k)$에 대한 두 번째 점화식

$$\boldsymbol{P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k)}$$

∵자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법은 다음 두 가지로 분류된다.

i)분할에 1이 포함된 경우

이 경우에 해당하는 분할은 $\boxed{}+1$의 꼴이며,

□ 안에는 자연수 $n-1$을 $k-1$개의 자연수로 분할하는 방법이 들어간다.

따라서 분할하는 방법의 수는 $P(n-1,k-1)$이다.

ii)분할에 1이 포함되지 않은 경우

이 경우에 해당하는 분할은 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ (단, n_1, n_2, $\cdots$, n_k는 모두 2 이상의 자연수)의 꼴이다. 따라서 n_1-1, n_2-1, $\cdots$, n_k-1은 모두 1 이상의 자연수가 되고, 이들의 합 $(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)$은 자연수 $n-k$를 k개의 자연수로 분할한 것과 같다.

☆ $(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)$
$=(n_1+n_2+\cdots+n_k)-k$
$=n-k$

따라서 분할하는 방법의 수는 $P(n-k,k)$이다.

i), ii)에서 얻은 방법의 수를 더하면 다음의 점화식이 성립한다.

$$P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k)$$

[예1] $P(5,2)$를 (2)로 계산하면 다음과 같다.

$$P(5,2)=\left[\frac{5}{2}\right]=2$$

[예2] $P(5,3)$을 (1), (4), (5)로 계산하면 다음과 같다.

$$P(5,3)=P(2,1)+P(2,2)+P(2,3)=1+1+0=2$$

[예3] $P(7,4)$를 (1), (3), (4), (5)로 계산하면 다음과 같다.

$$P(7,4)=P(3,1)+P(3,2)+P(3,3)+P(3,4)=1+1+1+0=3$$

★ 공식 (5)를 이용하다 보면 [예2]의 $P(2,3)$, [예3]의 $P(3,4)$처럼 $P(n,k)$에서 $n<k$인 경우가 나타날 수 있다. 그런데 자연수 n을 n개보다 많은 자연수의 합으로 분할할 수 없으므로 이때의 값은 0이 된다.

$$\boldsymbol{n<k}\text{일 때 } \boldsymbol{P(n,k)=0}$$

★ [예1]~[예3]과 같이 공식 (1)~(5)를 이용하면 웬만한 $P(n,k)$의 값을 계산할 수 있다. 그리고 굳이 알 필요는 없지만, p.45에서 설명했던 「스털링 삼각형」처럼 $P(n,k)$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	⋯
1	1 $P(1,1)$							
2	1 $P(2,1)$	1 $P(2,2)$						
3	1 $P(3,1)$	1 $P(3,2)$	1 $P(3,3)$					
4	1	2	1	1				⋯
5	1	2	2	1	1			
6	1	3	3	2	1	1		
7	1	3	4	3	2	1	1	
⋮				⋮				

위 표는 공식 (1), (3), (4), (5)를 이용해서 작성할 수 있으며, 각각의 공식을 적용하는 방법은 다음과 같다.

(1)로부터 $P(n,1)=1$이므로 1열을 1로 채운다.

(4)로부터 $P(n,n)=1$이므로 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 향하는 대각선을 1로 채운다.

(3)으로부터 $P(n,\ n-1)=1$이므로 (4) 아래의 대각선을 1로 채운다.

	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	1	1		
4	1		1	1	
5	1			1	1

(1) (3) (4)

(5)로부터

$$P(n,k)=P(n-k,1)+P(n-k,2)+\cdots+P(n-k,k)$$

이므로 n행 k열의 값은 $n-k$행의 첫 번째부터 k번째까지의 합이다.

	1	2	$\cdots$	k
$n-k$	a_1	a_2	$\cdots$	a_k
				합
n				$a_1+a_2+\cdots+a_k$

따라서 2열, 3열, ⋯ 은 각각 다음과 같이 계산된다.

$\boxed{\text{2열}}$ $n-2$행의 첫 번째부터 2번째까지의 합

	1	2
1	1	
2	1	1
3	1	1
4	1	$1+1=2$
5	1	
6	1	

	1	2
1	1	
2	1	1
3	1	1
4	1	2
5	1	$1+1=2$
6	1	

	1	2
1	1	
2	1	1
3	1	1
4	1	2
5	1	2
6	1	$1+2=3$

$\boxed{\text{3열}}$ $n-3$행의 첫 번째부터 3번째까지의 합

	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	1	1
4	1	2	1
5	1	2	$1+1+0=2$
6	1	3	

	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	1	1
4	1	2	1
5	1	2	2
6	1	3	$1+1+1=3$

예제3 다음의 값을 구하시오. (단, p.58의 표는 쓰지 말 것)

(1) $P(8,2)$ (2) $P(8,3)$ (3) $P(8,4)$ (4) $P(9,4)$

풀이 (1) 공식 $P(n,2)=\left[\frac{n}{2}\right]$을 적용하면 다음과 같다.

$$P(8,2)=\left[\frac{8}{2}\right]=4$$

(2) 공식 $P(n,k)=P(n-k,1)+P(n-k,2)+\cdots+P(n-k,k)$를 적용하면 다음과 같다.

$$P(8,3)=P(5,1)+P(5,2)+\underline{P(5,3)}=1+\left[\frac{5}{2}\right]+2=5$$

$$P(5,3)=P(2,1)+P(2,2)+P(2,3)$$
$$=1+1+0=2$$

(3) 공식 $P(n,k)=P(n-k,1)+P(n-k,2)+\cdots+P(n-k,k)$를 적용하면 다음과 같다.

$$P(8,4)=P(4,1)+P(4,2)+P(4,3)+P(4,4)=1+\left[\frac{4}{2}\right]+1+1=5$$

(4) 공식 $P(n,k)=P(n-k,1)+P(n-k,2)+\cdots+P(n-k,k)$를 적용하면 다음과 같다.

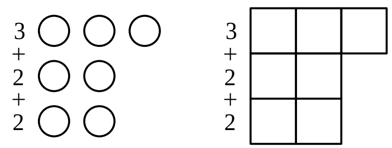
$$P(9,4)=P(5,1)+P(5,2)+\underbrace{P(5,3)}_{\text{(2)와 같음}}+P(5,4)=1+\left[\frac{5}{2}\right]+2+1=6$$

페러스 다이어그램(Ferrers Diagram)은 합동인 원 또는 정사각형으로 자연수의 분할을 표현하는 그림이며, 분할의 방법을 찾거나 분할하는 방법 사이의 관계를 파악할 때 활용할 수 있다.

심화 페러스 다이어그램

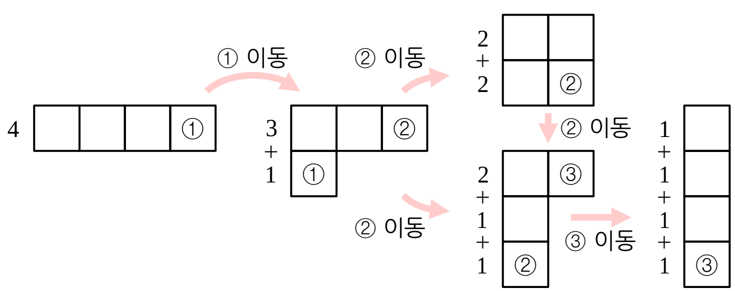
- 자연수 n의 분할 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ (단, $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$)를 표현하기 위해 합동인 원 또는 정사각형을 1행에 n_1개, 2행에 n_2개, $\cdots$, k행에 n_k개 그리면서 왼쪽으로 정렬한 형태의 그림을 「페러스 다이어그램」이라 한다.

[예1] 자연수 7의 분할 가운데
$3+2+2$
를 페러스 다이어그램으로 나타내면 오른쪽과 같다.

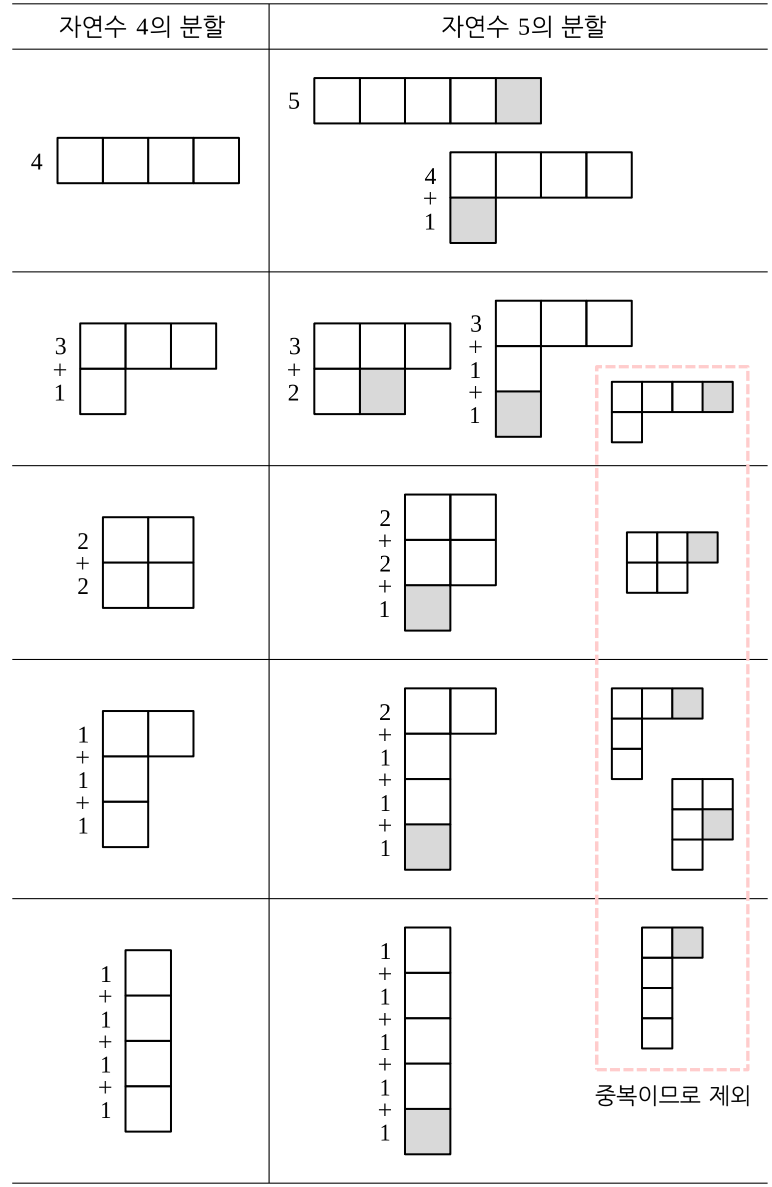


- 페러스 다이어그램을 이용하면 정사각형을 하나씩 옮기면서 모든 분할의 방법을 빠짐없이 찾을 수 있다.

[예2] 페러스 다이어그램으로 자연수 4의 모든 분할을 찾으면 다음과 같다.



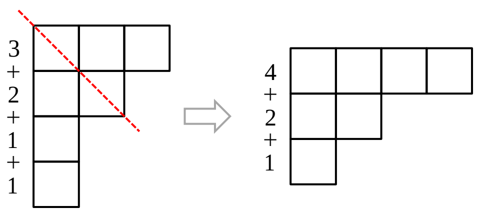
- 페러스 다이어그램을 이용하면 자연수 n의 분할에 정사각형 한 개를 추가하는 것만으로 자연수 $n+1$의 분할을 쉽게 찾을 수 있다.



심화 켤레 분할

• 자연수 n의 분할 $n_1+n_2+\cdots+n_k$의 페러스 다이어그램은 모든 정사각형을 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 향하는 대각선에 대해 대칭이동시켜도 페러스 다이어그램이 된다. 이때, 대칭이동 후의 페러스 다이어그램이 나타내는 분할을 「분할 $n_1+n_2+\cdots+n_k$의 켤레 분할」이라고 부른다.

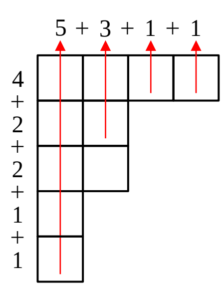
[예3] 자연수 7의 분할 3+2+1+1을 페러스 다이어그램으로 표현하면 아래 왼쪽과 같고, 여기에 포함된 모든 정사각형을 점선에 대해 대칭이동시키면 아래 오른쪽 그림이 나타난다.



이때, 오른쪽 그림은 자연수 7의 분할 4+2+1의 페러스 다이어그램이며, 분할 4+2+1은 분할 3+2+1+1의 켤레 분할이다.

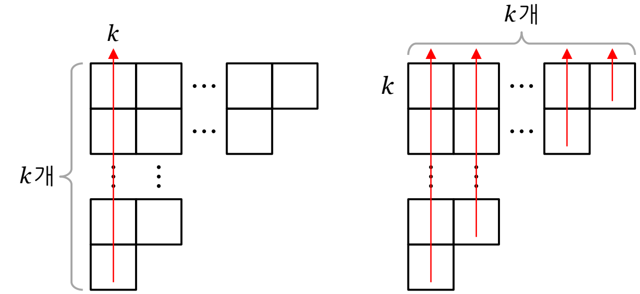
★ 켤레 분할은 페러스 다이어그램에 포함된 정사각형을 대칭이동시키지 않고, 정사각형 개수를 세로 방향으로 세는 것만으로도 쉽게 알아낼 수 있다.

예를 들어 자연수 10의 분할 4+2+2+1+1의 페러스 다이어그램은 오른쪽과 같고, 켤레 분할은 5+3+1+1이다.



• 아래 왼쪽의 페러스 다이어그램에서 알 수 있듯이 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하면 켤레 분할에 포함된 가장 큰 자연수는 k가 된다.

아래 오른쪽의 페러스 다이어그램에서 알 수 있듯이 자연수 n의 분할에 포함된 가장 큰 자연수가 k라면 켤레 분할에는 k개의 자연수가 포함된다.



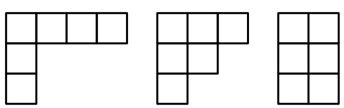
이처럼 k개의 자연수를 포함하는 분할과 가장 큰 자연수가 k인 분할이 서로 켤레 분할의 관계이므로 다음이 성립한다.

(자연수 n의 분할 가운데 k개의 자연수가 포함된 것의 개수) = (자연수 n의 분할 가운데 가장 큰 자연수가 k인 것의 개수)

[예4] 자연수 6을 3개의 자연수로 분할하는 방법은

4+1+1, 3+2+1, 2+2+2 …①

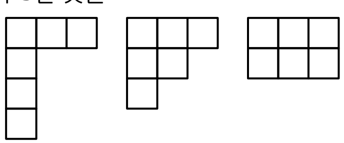
세 가지이며, 각각의 페러스 다이어그램은 오른쪽과 같다.



자연수 6의 분할 가운데 가장 큰 자연수가 3인 것은

3+1+1+1, 3+2+1, 3+3 …②

세 가지이며, 각각의 페러스 다이어그램은 오른쪽과 같다.



이때, ①, ②에 포함된 분할의 개수가 같고, ①, ②의 첫 번째 분할, ①, ②의 두 번째 분할, ①, ②의 세 번째 분할은 서로 켤레 분할이다.

[2005학년도 수능 9월 모평 가형 이산수학 #30]

실력 **예제4** 방정식

$$2A+B+C+D+E=130\ \begin{pmatrix}\text{단, } A\ge B\ge C\ge D\ge E\ge 0\text{이고,}\\ A,\ B,\ C,\ D,\ E\text{는 정수}\end{pmatrix}$$

을 만족하는 A의 최솟값을 구하시오.

풀이1 주어진 등식 $A+A+B+C+D+E=130$은 자연수 130을 6개의 자연수로 분할하는 방법 가운데 일부를 나타낸다. 여기서 $A\ge B\ge C\ge D\ge E$이므로 A의 값이 최소이려면 $B,\ C,\ D,\ E$의 값이 A를 넘지 않으면서 A에 가까워야 함을 예상할 수 있다.

만일 $A=B=C=D=E$라면

$$6A=130\ \Rightarrow\ A=\frac{130}{6}=21.6\cdots$$

이 되고, 여기에 가장 가까운 두 정수 21과 22에 대하여

$A=B=C=D=E=21$일 때 $A+A+B+C+D+E=126$

$A=B=C=D=E=22$일 때 $A+A+B+C+D+E=132$

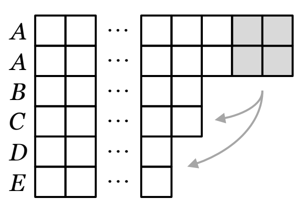
가 성립한다.

따라서 $A+A+B+C+D+E=130$이 성립하면서 $A\sim E$의 값이 비슷해지려면 $A=22,\ E=21$이 되어야 하고, $B+C+D=65,\ 22\ge B\ge C\ge D\ge 21$이 성립하도록 $B,\ C,\ D$의 값을 정하면 $B=C=22,\ D=21$이다.

그러므로 A의 최솟값은 22이다.

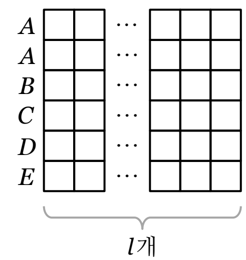
풀이2 페러스 다이어그램을 이용하면 직관적이면서도 이해하기 쉽게 풀 수 있다.

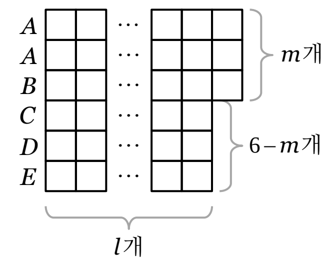
주어진 등식 $A+A+B+C+D+E=130$은 자연수 130을 6개의 자연수로 분할하는 방법 가운데 일부이며, 오른쪽 그림과 같이 6개의 행을 갖는 페러스 다이어그램으로 표현할 수 있다.



여기서 A의 값을 줄이려면 1행, 2행의 정사각형 가운데 오른쪽 끝에 있는 것들을 3행~6행으로 옮겨야 한다.

부등식 $A\ge B\ge C\ge D\ge E$가 성립하도록 하면서 정사각형들을 최대한 아래쪽으로 옮기면 아래 왼쪽 그림처럼 $A\sim E$의 값이 일치할 수도 있고, 아래 오른쪽 그림처럼 $A\sim E$의 값이 $l,\ l+1$두 가지로 나타날 수도 있다.





$i)$ $A\sim E$의 값이 일치할 때

각 행에 l개의 정사각형이 있다면

$$\begin{pmatrix}\text{정사각형의}\\ \text{개수 합}\end{pmatrix}=6l=130\ \Rightarrow\ l=\frac{130}{6}=21.6\cdots$$

l의 값이 정수가 아니므로 모순

$ii)$ $A\sim E$의 값이 두 가지일 때

$l+1$개의 정사각형을 포함한 행이 m개, l개의 정사각형을 포함한 행이 $6-m$개 있다면

$$\begin{pmatrix}\text{정사각형의}\\ \text{개수 합}\end{pmatrix}=(l+1)\times m+l\times(6-m)=130\ \Rightarrow\ 6l+m=130$$

$$\Rightarrow\ l=21,\ m=4\ (\because 1\le m\le 5)$$

$i),\ ii)$로부터 A의 최솟값은 $l+1=22$가 된다.

[2011학년도 수능 가형 이산수학 #26]

예제5 자연수 7의 분할 중에서, 3 이하의 자연수의 합으로 나타내어지는 서로 다른 분할의 수를 구하시오.

풀이1 분할에 포함된 가장 큰 자연수를 기준으로 하나하나 나열하면 다음과 같다.

i)가장 큰 자연수가 3일 때

$3+1+1+1+1$, $3+2+1+1$, $3+2+2$, $3+3+1$ 네 가지

ii)가장 큰 자연수가 2일 때

$2+1+1+1+1+1$, $2+2+1+1+1$, $2+2+2+1$ 세 가지

iii)가장 큰 자연수가 1일 때

$1+1+1+1+1+1+1$ 한 가지

i)~iii)으로부터 분할의 수는 $4+3+1=8$개다.

풀이2 p.61에서 설명했듯이 자연수 n의 분할 가운데

$$\begin{pmatrix}\text{가장 큰 자연수가}\\ k\text{인 것의 개수}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\text{개의 자연수가}\\ \text{포함된 것의 개수}\end{pmatrix}$$

가 성립하므로 자연수 7의 분할 가운데 3 이하의 자연수의 합으로 표현되는 것의 개수는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\text{가장 큰 자연수가}\\ 3\text{인 것의 개수}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\text{개의 자연수가}\\ \text{포함된 것의 개수}\end{pmatrix}=P(7,3)$$

$$=P(4,1)+P(4,2)+P(4,3)=1+\left[\frac{4}{2}\right]+1=4$$

$$\begin{pmatrix}\text{가장 큰 자연수가}\\ 2\text{인 것의 개수}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\text{개의 자연수가}\\ \text{포함된 것의 개수}\end{pmatrix}=P(7,2)$$

$$=P(5,1)+P(5,2)=1+\left[\frac{5}{2}\right]=3$$

$$\begin{pmatrix}\text{가장 큰 자연수가}\\ 1\text{인 것의 개수}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\text{개의 자연수가}\\ \text{포함된 것의 개수}\end{pmatrix}=1$$

따라서 분할의 수는 $4+3+1=8$개다.

• 자연수의 분할 – 유형①
자연수의 분할 가운데 특정 조건을 만족시키는 것의 개수

[2008학년도 수능 가형 이산수학 #26]

예제6 9의 분할 중에서 홀수의 합으로만 만들어지는 서로 다른 분할의 개수를 구하시오.

풀이 홀수를 홀수 개 더하면 홀수이고, 홀수를 짝수 개 더하면 짝수이므로 9를 홀수의 합으로 분할하면 분할에 포함된 자연수는 홀수 개다. 따라서 분할에 포함된 자연수 개수를 기준으로 다음과 같이 셀 수 있다.

i)1개의 홀수로 분할하는 방법: 9 한 가지

ii)3개의 홀수로 분할하는 방법: $7+1+1$, $5+3+1$, $3+3+3$ 세 가지

iii)5개의 홀수로 분할하는 방법: $5+1+1+1+1$, $3+3+1+1+1$ 두 가지

iv)7개의 홀수로 분할하는 방법: $3+1+1+1+1+1+1$ 한 가지

v)9개의 홀수로 분할하는 방법: $\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{9\text{개}}$ 한 가지

i)~ v)로부터 분할의 수는 $1+3+2+1+1=8$개다.

[2008학년도 수능 6월 모평 가형 이산수학 #26]

예제7 자연수 11의 분할 중 같은 수가 5개 이상 포함된 분할의 서로 다른 형태의 개수를 구하시오.

풀이 11의 분할에 어떤 수가 5개 이상 포함되면 다른 수가 5개 이상 포함될 수 없다. 따라서 분할에 5개 이상 포함되는 수를 기준으로 다음과 같이 셀 수 있다.

i)1이 다섯 개 이상 포함될 때

분할은 $1+1+1+1+1+\square$의 꼴이며, □ 안에는 자연수 6의 분할이 들어간다. 따라서 분할의 개수는

$$P(6,1)+P(6,2)+P(6,3)+P(6,4)+P(6,5)+P(6,6)$$

$$=1+\left[\frac{6}{2}\right]+\{P(3,1)+P(3,2)+P(3,3)\}$$
$$+\{P(2,1)+P(2,2)+P(2,3)+P(2,4)\}+1+1$$
$$=1+3+(1+1+1)+(1+1+0+0)+1+1=11$$

$ii)$ 2가 다섯 개 이상 포함될 때

분할은 $2+2+2+2+2+\square$의 꼴이며, □ 안에는 1만 들어갈 수 있다.

따라서 분할의 개수는 1가지

$i)$, $ii)$로부터 분할의 수는 $11+1=12$개다.

★ $i)$에서 자연수 6의 모든 분할의 개수는 $p.56$의 [예2]와 같이 하나하나 나열해서 셀 수도 있다.

• 자연수의 분할 – 유형②

문제에 주어진 조건을 자연수의 분할로 표현해본다.

예제8 같은 종류의 사탕 9개를 같은 종류의 봉지 4개에 나누어 넣는 방법의 수를 구하시오. (단, 빈 봉지가 있을 수도 있다.)

풀이 같은 종류의 사탕을 같은 종류의 봉지에 담기 때문에 p.55의 예제1과 같은 상황이며, 모든 방법을 자연수 9의 분할로 나타낼 수 있다. 따라서 방법의 수는 사탕이 담긴 봉지 개수(= 분할에 포함된 자연수 개수)를 기준으로 다음과 같이 셀 수 있다.

$i)$ 사탕을 1개의 봉지에 담는 방법의 수: $P(9,1)=1$

$ii)$ 사탕을 2개의 봉지에 담는 방법의 수: $P(9,2)=\left[\frac{9}{2}\right]=4$

$iii)$ 사탕을 3개의 봉지에 담는 방법의 수

$$P(9,3)=P(6,1)+P(6,2)+\underline{P(6,3)}=1+\left[\frac{6}{2}\right]+3=7$$
$$P(6,3)=P(3,1)+P(3,2)+P(3,3)$$
$$=1+1+1=3$$

$iv)$ 사탕을 4개의 봉지에 담는 방법의 수

$$P(9,4)=P(5,1)+P(5,2)+\underline{P(5,3)}+P(5,4)=1+\left[\frac{5}{2}\right]+2+1=6$$
$$P(5,3)=P(2,1)+P(2,2)+P(2,3)$$
$$=1+1+0=2$$

$i)\sim iv)$로부터 모든 방법의 수는 $1+4+7+6=18$개다.

실력 예제9 쌀 10kg을 포장지에 담으려고 한다. 포장지 용량은 2kg, 3kg, ⋯, 10kg짜리가 있고, 각 용량마다 5장씩 준비되어 있다. 모든 포장지의 디자인이 같을 때, 쌀을 포장지에 나눠 담는 방법의 수를 구하시오.

풀이 쌀을 포장지에 담은 결과는 포장지에 담긴 쌀의 무게로 표현되며, 자연수 10의 분할과 같다. 또한 포장지의 최소 용량이 2kg이므로 분할에 포함되는 자연수의 최솟값은 2가 된다.

분할이 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 의 꼴이면 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k$가 2 이상의 자연수이므로 $n_1-1,\ n_2-1,\ \cdots,\ n_k-1$은 1 이상의 자연수가 된다. 그리고 이들의 합 $(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)$은 자연수 $10-k$를 k개의 자연수로 분할한 것과 같다.

$$\begin{aligned}&(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)\\&=(n_1+n_2+\cdots+n_k)-k\\&=10-k\end{aligned}$$

자연수 $10-k$를 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 $P(10-k,k)$이고, $10-k\geq k\ \Rightarrow\ k\leq 5$로부터 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 모든 방법의 수는 다음과 같이 셀 수 있다.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{5}P(10-k,k)\\&=P(9,1)+P(8,2)+\underline{P(7,3)}+\underline{P(6,4)}+P(5,5)\\&=1+\left[\frac{8}{2}\right]+4+2+1=12\end{aligned}$$

$$P(7,3)=P(4,1)+P(4,2)+P(4,3)=1+\left[\frac{4}{2}\right]+1=4$$

$$P(6,4)=P(2,1)+P(2,2)+P(2,3)+P(2,4)=1+1+0+0=2$$

★ 위 풀이는 p.58 (6)의 증명에서 ii)의 경우를 이용한 것이다.

실력 예제10 음 아닌 정수 $x,\ y,\ z$에 대한 방정식 $x+2y+3z=8$의 근의 개수를 구하시오.

풀이 근의 개수를 어떻게 셀지 조사하기 위해 방정식의 근 몇 개를 나열하면 아래 왼쪽의 표와 같다.

x	y	z		자연수 8의 분할
4	2	0	⟶	1+1+1+1+2+2
1	2	1	⟶	1+2+2+3
0	1	2	⟶	2+3+3
0	4	0	⟶	2+2+2+2
	⋮			

이해를 돕기 위해
일반적인 분할의
역순으로 나열

그리고 방정식의 좌변 $x+2y+3z$에서

$$x=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1\text{이 } x\text{개}}\qquad 2y=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{2\text{가 } y\text{개}}\qquad 3z=\underbrace{3+3+\cdots+3}_{3\text{이 } z\text{개}}$$

로 보면, 위 오른쪽과 같이 각각의 근을 자연수 8을 3 이하의 자연수로 분할하는 방법에 대응시킬 수 있다. 반대로 자연수 8을 3 이하의 자연수로 분할하는 방법을 방정식 $x+2y+3z=8$의 음 아닌 정수근으로 대응시킬 수도 있다.

그러므로 방정식의 근의 개수는 자연수 8을 3 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같고, 다음과 같이 셀 수 있다. (p.63 예제5 의 풀이2 참고)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\text{가장 큰 자연수가}\\\text{3인 것의 개수}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{가장 큰 자연수가}\\\text{2인 것의 개수}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{가장 큰 자연수가}\\\text{1인 것의 개수}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\text{3개의 자연수가}\\\text{포함된 것의 개수}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{2개의 자연수가}\\\text{포함된 것의 개수}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{1개의 자연수가}\\\text{포함된 것의 개수}\end{pmatrix}\\&=\underline{P(8,3)}+P(8,2)+P(8,1)=5+\left[\frac{8}{2}\right]+1=10\end{aligned}$$

$$P(8,3)=P(5,1)+P(5,2)+\underline{P(5,3)}=1+2+2=5$$

$$P(5,3)=P(2,1)+P(2,2)+P(2,3)=1+1+0=2$$