‘가’ 형

14. 문제에 등장하는 점들의 좌표를 t에 대한 식으로 나타내면 어렵지 않겠습니다.

점 A의 좌표는 $(t,\ 2^t)$, 점 B의 좌표는 $(t,\ 2^{-t})$,
점 H의 좌표는 $(0, t)$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-2^{-t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-1-(2^{-t}-1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-1}{t}+\lim_{t\to0+}\frac{2^{-t}-1}{-t}$$

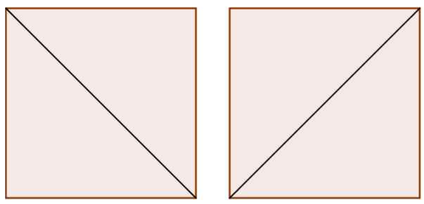
$$=\ln2+\ln2=2\ln2$$

정답: ①

15. 반드시 2개의 창문에는 정사각형 모양의 시트지를 붙이고, 2개의 창문에는 직각이등변삼각형 모양의 시트지를 2개씩 붙여야 합니다. 이를 고려해서 다음과 같이 차근차근 경우의 수를 구하도록 합시다.

$i)$ 정사각형 모양이 들어가는 창문/ 직각삼각형이 들어가는 창문을 고르는 방법의 수: ${}_4C_2=6$

$ii)$ 직각삼각형이 들어가는 창문에는 다음과 같이 두 가지 방법으로 배열이 가능합니다.



따라서 이와 같이 삼각형을 배열하는 방법의 수는
$2\times2=4$

$iii)$ 직각삼각형은 모두 색이 다르므로 직각삼각형의 색을 배열하는 방법의 수는 $4!=24$

$i), ii), iii)$에서 이 집의 창문에 시트지를 붙이는 방법의 수는 $6\times4\times24=576$(가지)

정답: ④

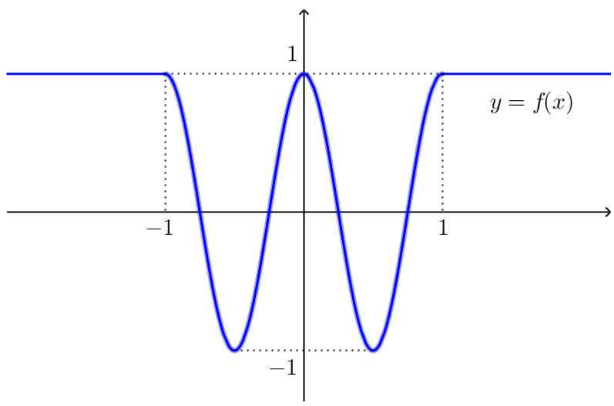
16. $f(x)$를 x의 범위에 따라 나눠서 구해봅시다.
이때 다음을 이용합시다.

$$x^{2n}=\begin{cases}\infty & (x>1)\\ 1 & (x=1)\\ 0 & (-1<x<1)\\ 1 & (x=-1)\\ \infty & (x<-1)\end{cases}$$

이를 토대로 $f(x)$를 구해보면

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x>1)\\ 1 & (x=1)\\ \cos2\pi x & (-1<x<1)\\ 1 & (x=-1)\\ 1 & (x<-1)\end{cases}$$

이고, 이를 그래프로 나타내면 다음과 같습니다.



보다시피 $f(x)$는 우함수(y축 대칭)이므로 적분의 성질을 이용할 수 있겠습니다.

$g(-2)+g(2)$

$$=\int_2^2 f(t)dt+\int_{-2}^2 f(t)dt+\int_2^{-2} tf(t)dt+\int_2^2 tf(t)dt$$

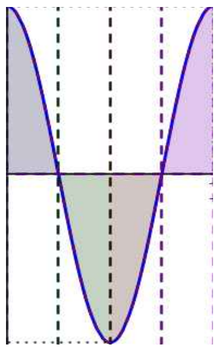
$$=\int_{-2}^2 f(t)dt\ \left(\int_{-2}^2 tf(t)dt=0\quad \because tf(t):\ 기함수\right)$$

$$=2\int_0^2 f(t)dt\ \ (\because f(t):\ 우함수)$$

$$=2\left(\int_0^1\cos2\pi x dx+\int_1^2 1dx\right)=2(0+1)=2$$

정답: ③

오른쪽의 색칠한 네 부분의 넓이가 같다는 것을 이용하면, $\int_0^1 \cos 2\pi x dx = 0$임을 쉽게 확인할 수 있습니다.



17. 간단한 경우 나누기로 해결할 수 있습니다. 5장의 카드 중에 **홀수가 적힌 카드의 개수가 짝수**(0 포함)일 때만 합이 짝수가 됩니다.

i) 홀수 카드가 없는 경우

1~8 사이의 자연수 중 짝수만 5개 고르는 건 불가능하므로 0가지

ii) 홀수 카드가 2개인 경우

홀수 카드: 4개 중 2개 / 짝수 카드: 4개 중 3개 선택

따라서 이 경우 가능한 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_3 = 24$

iii) 홀수 카드가 4개인 경우

홀수 카드: 4개 중 4개 / 짝수 카드: 4개 중 1개 선택

위와 같이 고르면 됩니다.

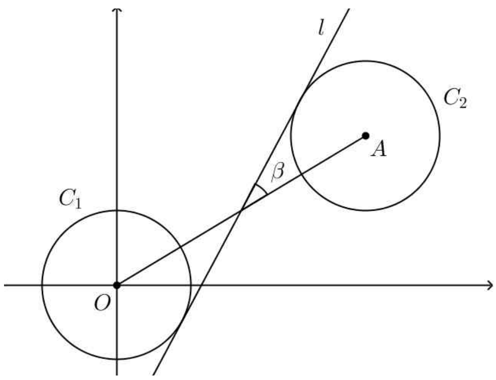
따라서 이 경우 가능한 수는 ${}_4C_4 \times {}_4C_1 = 4$

i), ii), iii)에서 가능한 모든 경우의 수는

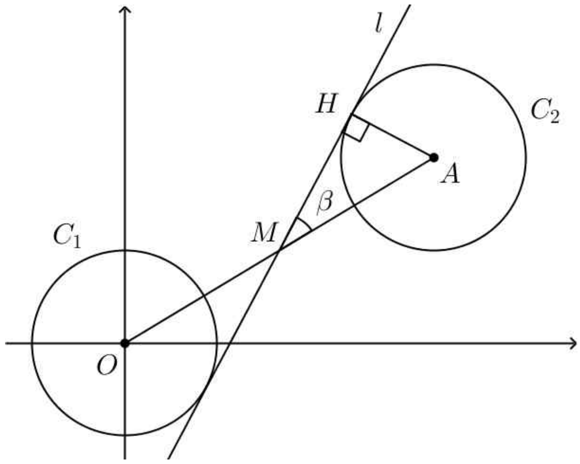
$24 + 4 = 28$

정답: ②

18. β를 표시하면 아래 그림과 같겠습니다.



$\tan\beta$는 아래와 같이 직각삼각형을 이용해서 구할 수 있습니다.



직각삼각형 AHM에서

$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{OA} = \frac{1}{2}\sqrt{t^2+36}$

$\overline{AH} = 3$ (원의 반지름)

$\overline{MH} = \sqrt{\frac{1}{4}(t^2+36) - 3^2} = \frac{t}{2}$

$\therefore \tan\beta = \frac{\overline{AH}}{\overline{MH}} = \frac{6}{t}$ // (가): $\frac{6}{t}$

한편 (나)는

$\tan\theta = \tan(\alpha+\beta)$

$= \frac{\frac{6}{t}+\frac{6}{t}}{1-\left(\frac{6}{t}\right)\left(\frac{6}{t}\right)} = \frac{\frac{12}{t}}{1-\frac{36}{t^2}} = \frac{12t}{t^2-36}$ // (나): $\frac{12t}{t^2-36}$

$\therefore \frac{g(8)}{f(7)} = \frac{\frac{96}{28}}{\frac{6}{7}} = 4$

정답: ⑤

19. 미분의 응용에 등장하는 전형적인 함수 중 하나입니다. 이 함수를 보았을 때 아래 정도 볼 수 있는 실력이 되면 수학 좀 한다고 할 수 있습니다.

1) $f(x)$는 기함수이다.

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$

당연한 것이지만, $f(x)$는 원점도 지납니다. 기함수의 중요한 성질 중 하나죠.

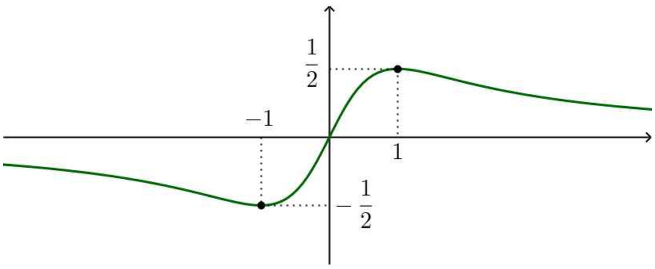
2) $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 에서

$x=1$에서 극대, $x=-1$에서 극소입니다.

또한 극댓값은 $f(1)=\dfrac{1}{2}$, 극솟값은 $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$

3) $x>0$이면 $f(x)>0$이고, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

이를 이용하여 그래프를 그리면 아래와 같습니다.



글로는 이렇게 적어놨지만, 2)번을 제외하면 모두 직관적으로 알아낼 수 있는 내용이라 그래프의 개형을 용이하게 그릴 수 있습니다.

이렇게 그리고 나면 이계도함수를 구하지 않고서라도 구간 $(1,\infty), (-\infty,-1)$에서 각각 하나의 변곡점을 가진다는 것도 알 수 있습니다.

그럼 ㄱ부터 하나씩 보도록 합시다.

ㄱ) 2)에서 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 이므로 $f'(0)=1$ (참)

ㄴ) 그래프 모양에서 자명히 참입니다. (참)

ㄷ) 평균값의 정리를 알고 있느냐 하는 물음인데요, 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이고 미분 가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 실수 c가 구간 (a,b) 사이에 적어도 하나 존재합니다.

$0<c<1$이고,

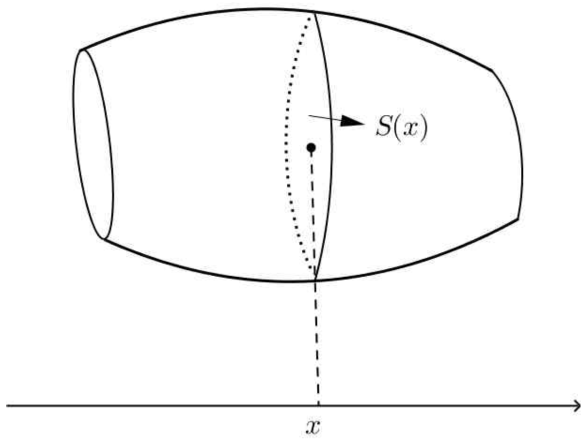
$f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 에서 $0<x<1$에서는 $f'(x)$가 감소하게 됩니다.

따라서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)<f'(0)=1$ (거짓)

정답: ③

20. 적분과 입체에 관한 기본적인 내용입니다. 반드시 숙지하고 있어야 합니다.

아래와 같이 입체의 단면을 항상 x에 대한 함수 $(=S(x))$로 나타낼 수 있을 때,



이 $x=a$에서부터 $x=b$까지에 대응되는 이 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$ 입니다.

문제에서는 선분 PH의 길이가 $f(x)$와 같으므로 $S(x)=(f(x))^2$가 됩니다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{-\ln 2}^{e-1} S(x)dx$$

$$=\int_{-\ln 2}^{0}(e^{-x})^2dx+\int_0^{e-1}\left(\sqrt{\ln(x+1)+1}\right)^2dx$$

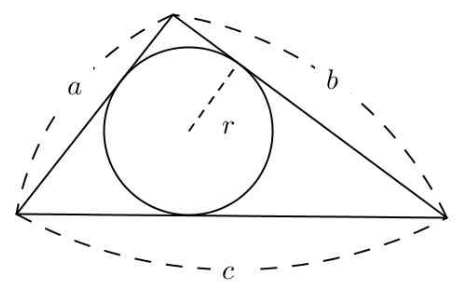
$$=\int_{-\ln 2}^{0}e^{-2x}dx+\int_0^{e-1}(\ln(x+1)+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-\ln 2}^{0}+\left[(x+1)\ln(x+1)-1\right]_0^{e-1}$$

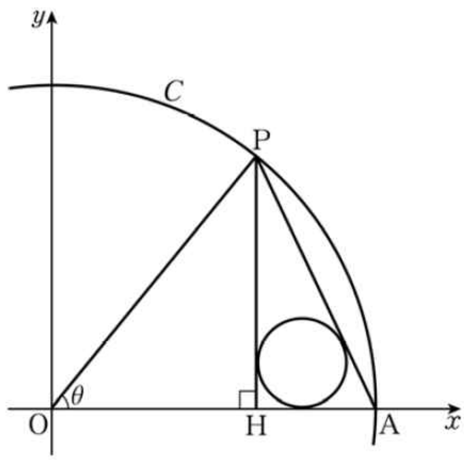
$$=-\frac{1}{2}+2+e=e+\frac{3}{2}$$

정답: ④

21. 내접원의 성질을 이용하도록 합시다.



$\Rightarrow$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}r(a+b+c)$



위 그림에서

$\overline{PH}=\sin\theta,\ \overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=1-\cos\theta$

삼각형 OAP는 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AP로 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{AP}=2\overline{AM}=2\sin\frac{\theta}{2}$

따라서 삼각형 APH의 넓이는 두 가지 방법으로 구할 수 있습니다.

$$\frac{1}{2}r(\theta)\left(\sin\theta-\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow\ r(\theta)=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}+1}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2\sin\frac{\theta}{2}+1}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}+1}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$$

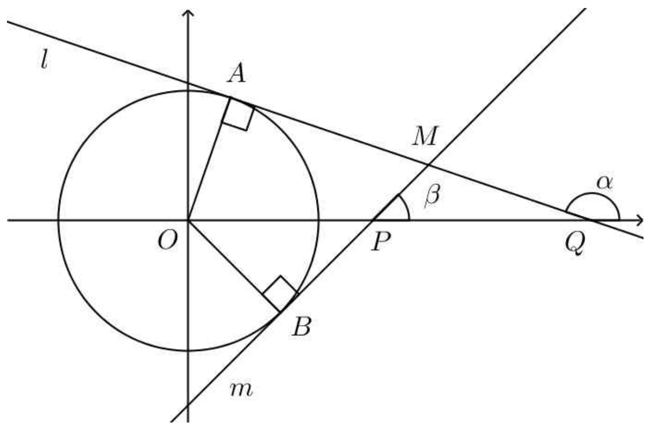
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

정답: ④

26. 각을 하나하나 표시하면서 풀어보도록 합시다.

항상 직선과 x축의 양의 방향이 이루는 각을 이용하여 문제를 해결할 수 있도록 합시다.

아래 그림과 같이 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α, 직선 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β라고 합시다.



그러면 $\tan\alpha=-\frac{1}{3},\ \tan\beta=1\ \ (i)$

여기서 $\angle AOB=\pi-\angle AMB=\angle PMQ$와 같고

$\angle PMQ=\alpha-\beta$

$\Rightarrow\ \tan(\angle AOB)=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}-1}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot1}=-2\ \ (\because (i))$$

$\therefore\ 100\cos^2(\angle AOB)$

$= \dfrac{1}{1+\tan^2(\angle AOB)} = 100\cdot\dfrac{1}{5} = 20$ **정답: 20**

27. 이런 문제는 보통 N의 자릿수에 따라 구별하는 방법을 보통 생각하는데, 그러면 경우의 수가 많아지므로 다음과 같은 방법을 생각해봅시다.

> $N=\overline{abcd}$로 생각하면, a,b,c,d에 적당한 수를 넣어서 N이 결정된다고 할 수 있습니다.
> ex) $a=b=1,\ c=0,\ d=4$이면 $N=1104$,
> $a=0,\ b=1,\ c=2,\ d=3$이면 $N=123$
> 따라서 N을 이렇게 잡아 놓으면 한 자리 수부터 네 자리 수까지 모두 표현할 수 있습니다.

문제의 조건을 만족하는 N의 개수를 구하기 위해 다음과 같이 나눠봅시다.

$i)$ 일의 자리수가 1일 때

$N=\overline{abc1}$이라 하면 N의 개수는

$a+b+c=6$인 음이 아닌 정수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같습니다. $\Rightarrow {}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$(가지)

$ii)$ 일의 자리수가 3일 때

$N=\overline{abc3}$이라 하면 N의 개수는

$a+b+c=4$인 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a,b,c)의 개수와 같습니다. $\Rightarrow {}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$(가지)

$iii)$ 일의 자리수가 5일 때

$i),\ ii)$와 같은 방법으로 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$(가지)

따라서 문제의 조건을 만족시키는 N의 개수는

$28+15+6=49$ **정답: 49**

28. a는 그냥 대입만 하면 됩니다.

$$a = f(\pi-x)+f(x) = \frac{e^{\cos(\pi-x)}}{1+e^{\cos(\pi-x)}} + \frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$$

$$= \frac{e^{-\cos x}}{1+e^{-\cos x}} + \frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{\cos x}} + \frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}} = \frac{1+e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}} = 1 \quad \therefore\ a=1$$

b가 문제인데, 일반적으로 치환적분이 되는 형태는 아닌 것 같으니, a를 이용해보도록 합시다.

포인트는 $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi f(\pi-x)dx$라는 점입니다.

$f(x)$와 $f(\pi-x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대해 대칭인 함수이기 때문이지요. 실제로 $\pi-x=t$로 치환하여 계산해보면

$$\int_0^\pi f(\pi-x)dx$$

$$= \int_\pi^0 f(t)(-dt) = \int_0^\pi f(t)dt$$

이제 풀 수 있겠습니다.

$$2b = \int_0^\pi f(x)dx + \int_0^\pi f(\pi-x)dx$$

$$= \int_0^\pi \{f(x)+f(\pi-x)\}dx$$

$$= \int_0^\pi 1dx = \pi \qquad \therefore\ b = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $a+\dfrac{100}{\pi}b = 1+50 = 51$ **정답: 51**

29. (나) 조건을 먼저 살펴봅시다.

$x=1$이라고 합시다.

이때 $f(1)$로 가능한 값은 $1,2,3$뿐입니다.

여기서 (가)에 의하여

$i)$ $f(1)=1$이면 $f(-1)=-2$

$ii)$ $f(1)=2$이면 $f(-1)=-1$ 또는 $f(-1)=-3$

$iii)$ $f(1)=3$이면 $f(-1)=-2$

따라서 $x=1$일 때 가능한 가짓수는 4가지.

이는 $x=2,\ 3$일 때도 마찬가지이므로

$f(x)$의 개수는 $4^3=64$ **정답: 64**

30. 직관이 뛰어난 사람은 $t=\frac{16}{e^2}$이 $f(x)$의 극댓값이라는 것을 알 수 있습니다. **함수의 그래프의 개형을 잘 그리는 것이 미분의 목적**이라는 것이 이런 문제에서 잘 드러납니다.

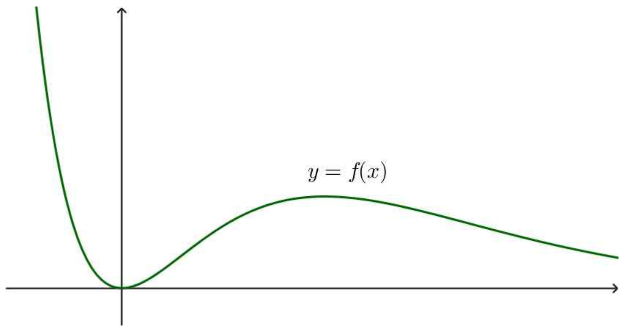
$f(x)=x^2e^{ax}$는 사실 미분을 하지 않고도 대략의 그래프의 모양을 알 수 있습니다. 다음이 함수의 식으로 파악할 수 있는 대략의 그래프입니다.

$i)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$ii)$ $f(0)=0$, $x\neq 0$이면 $f(x)>0$

$f(x)$는 실수 전체에서 미분 가능하므로

위의 두 성질을 참고하면 아래와 같은 개형이 나올 것이라고 쉽게 추측이 가능합니다.



부연 설명을 하자면

$x<0$일 때엔 x^2이나 e^{ax}나 감소하므로 이 둘의 곱인 $f(x)$ 또한 감소함수여야 합니다.

$x>0$일 때엔 x^2는 증가하는 반면 e^{ax}는 감소합니다. 그런데 이 둘을 곱하면 **지수함수인 e^{ax}가 더 영향이 큽니다.**

예를 들어, $p(x)=x^2$, $q(x)=3^{-x}$라고 합시다.

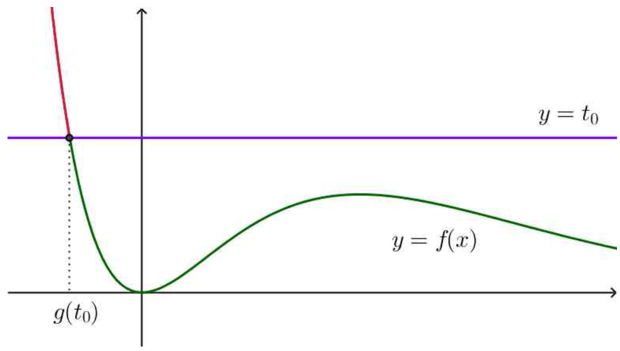
$x=3$에서 $x=4$로 변할 때

$p(x)$의 값은 $\frac{16}{9}$배 증가하지만 $q(x)$는 $\frac{1}{3}$배로 감소합니다. 결론적으로 둘을 곱하면 감소하게 되죠.

$ii)$에서 $x>0$일 때엔 위와 같은 언덕 모양이 나오게 됩니다.

이제 함수 $g(t)$가 어떤 함수인지 보도록 합시다.

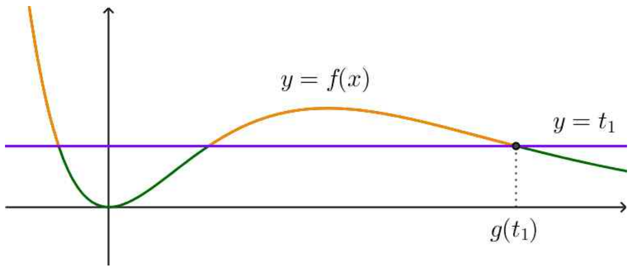
t의 값을 고정하고 그에 따른 $g(t)$의 값을 몇 가지 살펴보도록 합시다.



case 1) $t=t_0$가 위와 같은 경우

$f(x)\geq t$를 만족하는 영역은 위 그래프에서 빨간색으로 표시된 부분입니다.

따라서 $g(t_0)$은 함수 g의 정의에 따라 위 그림의 검정색 점의 x좌표가 됩니다.



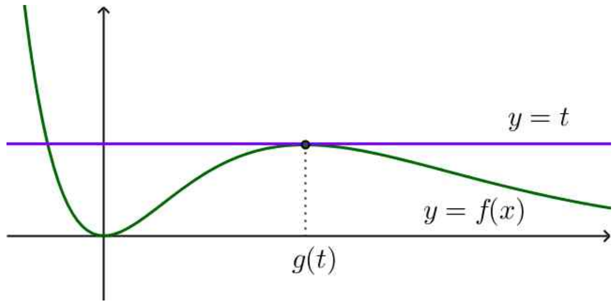
case 2) $t=t_1$이 위와 같은 경우

$f(x)\geq t$를 만족하는 영역은 위 그래프에서 주황색으로 표시된 부분입니다.

$g(t_1)$은 함수 g의 정의에 따라 x값이 가장 큰 포인트가 됩니다.

위 두 경우로 미루어볼 때, $g(t)$의 값이 연속적으로 변하다가 갑자기 급변하는 부분은 어딜까요?

바로 아래와 같이 t가 $f(x)$의 극댓값인 경우이죠.



이 경우 t가 감소하면 $g(t)$는 그래프를 따라 오른쪽으로 이동하지만, t가 증가하게 되면 제2사분면에서 $g(t)$가 생성되게 됩니다.

따라서 $t=\dfrac{16}{e^2}$에서 $g(t)$는 불연속이 됩니다.

$f'(x)=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=xe^{ax}(2+ax)$에서

$x=0$일 때 극소, $x=-\dfrac{2}{a}$에서 극대입니다.

$f(x)$의 극댓값은 $\dfrac{16}{e^2}$이므로

$$f\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{4}{a^2}\cdot e^{-2}=\frac{4}{a^2e^2}=\frac{16}{e^2}$$

$\therefore\ a^2=\dfrac{1}{4},\ \ 100a^2=25$

정답: 25

'나' 형

14. 각 점들의 좌표를 구해봅시다.

P_n의 좌표는 $(0,\ 3n+1)$이므로

Q_n의 좌표는 $\left(\sqrt{3n+1},\ 3n+1\right)$

R_n의 y좌표가 P_n의 y좌표보다 작아야 직선 P_nR_n의 기울기가 음수가 되므로

$\triangle P_nOR_n$의 넓이가 최대가 되려면

R_n의 y좌표는 $3n$이어야 합니다. $\Rightarrow R_n\left(\sqrt{3n},\ 3n\right)$

$\therefore\ S_n=\dfrac{\sqrt{3n+1}\,(3n+1)}{2},\ \ T_n=\dfrac{\sqrt{3n}\cdot(3n+1)}{2}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n-T_n}{\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n}\right)}{2\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2\sqrt{n}\left(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}\right)}$$

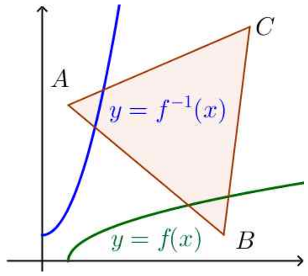
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2\sqrt{3n^2+n}+2\sqrt{3}\,n}=\frac{3}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

정답: ①

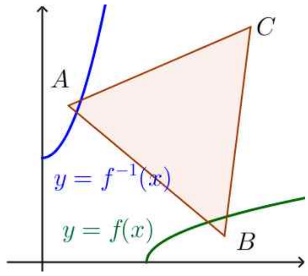
15. k의 값이 변함에 따라 두 그래프가 어떤 방향으로 이동하는지 보도록 합시다.

$f(x)=\sqrt{x-k}$이고, $f^{-1}(x)=x^2+k\ \ (x\geq 0)$이므로

k의 값이 증가하면 $f(x)$는 x축의 양의 방향으로, $f^{-1}(x)$는 y축의 양의 방향으로 이동하게 됩니다.



$k=1$



$k=4$

위 그림과 같이 **k의 값이 증가하면 삼각형과 만나는 부분이 감소**하게 됩니다.

따라서 점 A와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프,

점 B와 $y=f(x)$의 그래프가 만나게 되는 k의 값을 각각 구하여 그 중 작은 값을 택하면 됩니다.

점 A와 $f^{-1}(x)=x^2+k$가 만나면

$f^{-1}(1)=1+k=6 \Rightarrow k=5$

점 B가 $f(x)=\sqrt{x-k}$와 만나는 경우

$f(7)=\sqrt{7-k}=1 \Rightarrow k=6$

따라서 k의 최댓값은 5입니다. **정답: ②**

16. 등호를 기준으로 좌우 식을 비교만 해주면 됩니다. 그리 어렵지 않아요.

(ii)에서 좌변과 우변의 다른 점은

좌변은 $m+1$항까지의 합이고 우변은 m항까지의 합이라는 것이지요. 따라서 (가)는 좌변의 $m+1$항이 됩니다. $\therefore$ (가): $(-1)^{m+2}(m+1)^2$

(나)는 등호 조건으로만 바로 나오지 않습니다. 이럴 땐 문제의 조건을 살펴봅니다.

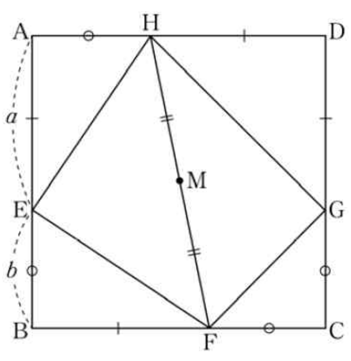
$(*)$을 이용하면 바로 나오지요?

$\therefore$ (나): $(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{m(m+1)}{2}$

$$\therefore \frac{f(5)}{g(2)}=\frac{(-1)^7\cdot 6^2}{(-1)^3\cdot\dfrac{2\cdot 3}{2}}=12$$

정답: ③

17. 그림을 보면서 천천히 풀어봅시다.



ㄱ. 삼각형 AHM과 CFM에서

$\overline{AH}=\overline{CF}$, $\overline{HM}=\overline{FM}$, $\angle AHM=\angle CFM$(엇각)

이므로 $\triangle AHM \equiv \triangle CFM$ (SAS 합동)

$\Rightarrow \overline{AM}=\overline{CM}$

따라서 M은 사각형 $ABCD$의 두 대각선의 교점입니다. (i)

삼각형 CFM과 CGM에서

$\overline{CF}=\overline{CG}$, $\angle FCM=\angle GCM$($\because$ (i)), $\overline{CM}$은 공통

이므로 $\triangle CFM \equiv \triangle CGM$ (SAS 합동)

$\therefore$ $\overline{FM}=\overline{GM}$ (참)

ㄴ. 삼각형 EMH와 EMF에서

$\overline{HM}=\overline{FM}$, $\overline{EH}=\overline{EF}=\sqrt{a^2+b^2}$, $\overline{EM}$은 공통

이므로 $\triangle EMH \equiv \triangle EMF$ (SSS 합동)

따라서 $\angle EMF=90^\circ$ (i)

또한 $\triangle AEH \equiv \triangle BFE$ (SAS 합동)이고

이 둘은 직각삼각형이므로 $\angle FEH=90^\circ$

따라서 $\triangle EFM$은 직각이등변삼각형입니다. (ii)

$\triangle EFM=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{EM}\cdot\overline{FM}\sin\angle EMF$

$=\dfrac{1}{2}(\overline{FM})^2\sin\angle EMF$ ($\because$ (ii))

$\triangle FGM=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{FM}\cdot\overline{GM}\sin\angle GMF$

$=\dfrac{1}{2}(\overline{FM})^2\sin\angle GMF$

한편 (i)에서 $\sin\angle EMF \ge \sin\angle GMF$이므로

$\therefore \triangle EFM \ge \triangle FGM$ (참)

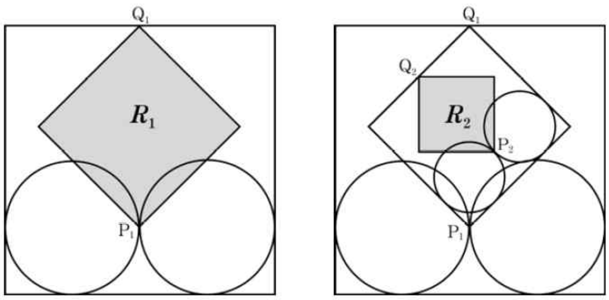
ㄷ. ㄴ을 곧바로 이용하면 되겠습니다.

$\overline{FH}=6\sqrt{2} \Rightarrow \overline{FM}=3\sqrt{2}$,

ㄴ에서 $\triangle FGM \le \triangle EFM=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{2})^2=9$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 모두 참입니다. **정답: ⑤**

18. 무한등비급수의 핵심은 **초항과 공비**입니다.



보통은 l_1과 l_2를 이용하여 구하는데, 사실 이 그림에서는 l_1만 구해도 충분합니다. 가장 큰 정사각형과 R_1을 이용하여 공비를 구할 수 있기 때문이죠.

위의 좌측 그림에서 $\overline{P_1Q_1}$과 원의 반지름의 합이 큰 정사각형의 한 변의 길이와 같으므로

$\overline{P_1Q_1}+1=4 \Rightarrow \overline{P_1Q_1}=3$

$\therefore\ l_1=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

한편 **공비는 가장 큰 사각형의 길이에 대한 l_1의 비**와 같으므로 $\dfrac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{4}=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{1-\frac{3}{4\sqrt{2}}}=\frac{12}{4\sqrt{2}-3}=\frac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$$

정답: ①

19. (가)에서 인수정리에 의하여

$f(x)=ax(x-2)$로 놓을 수 있습니다. (a는 실수)

(나)에서는, 판별식의 값이 0이라는 사실을 이용할 수도 있지만, **(나)의 방정식의 한 근이 $x=2$라는 사실을 알 수 있다면** 더 쉽게 풀 수 있죠. 직관과 눈썰미의 힘!

(나)에서 $x=2$가 한 근이고, 이 방정식의 실근의 개수는 1이므로 $f(x)=a(x-2)^2$이어야 합니다.

$\Rightarrow\ ax(x-2)-6(x-2)=a(x-2)^2$

$\Rightarrow\ (x-2)(ax-6)=a(x-2)^2$

$\Rightarrow\ ax-6=a(x-2)\ \ \therefore\ a=3,\ f(x)=3x(x-2)$

$f(f(x))=-3$을 풀어봅시다.

$f(x)=t$라 하면

$f(t)=-3$

$\Rightarrow\ 3t(t-2)=-3$

$\Rightarrow\ t^2-2t+1=0\ \ \therefore\ t=1$

따라서 $f(f(x))=-3$은

$t=1 \Leftrightarrow f(x)=1$을 푸는 것과 같습니다.

$3x(x-2)=1$

$\Rightarrow 3x^2-6x-1=0$

따라서 $f(f(x))=-3$의 서로 다른 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{1}{3}$입니다.

정답: ①

20. 문제 보면 도대체 무슨 소린가 할 수도 있지만, $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2$ 꼴의 수가 가지는 성질을 보면 쉽게 풀 수 있는 문제입니다.

$\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2=n^2+n+\dfrac{1}{4}$이고 n은 자연수이므로

$m=n^2+n$이어야 두 수의 차가 $\dfrac{1}{2}$ 미만이 됩니다.

$\therefore\ a_n=n^2+n$

$\Rightarrow\ \displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k=2+6+12+20+30=70$

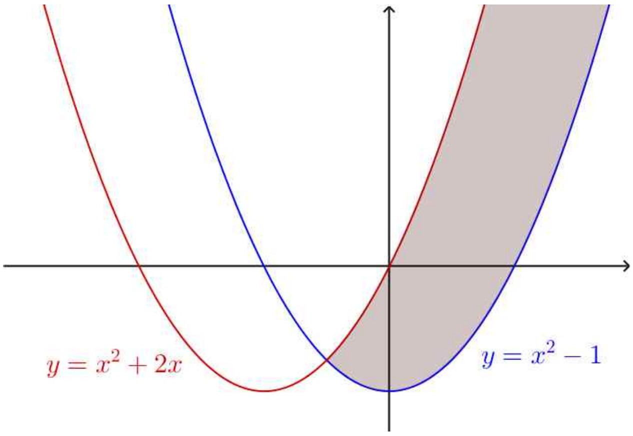
정답: ②

21. 부등식에 등장하는 두 이차식을 식으로 가지는 이차함수를 먼저 그려봐야겠습니다.

$f(x)=x^2-1,\ g(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$이라 하면

$x^2-1<a<x^2+2x$를 푸는 것은

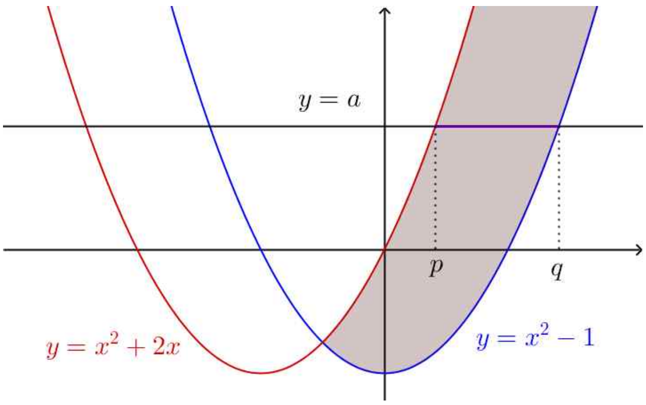
$f(x)<h(x)<g(x)$를 만족하는 상수함수 $h(x)$를 찾는 것과 같습니다.



위에서 색칠된 영역이 바로

$x^2+2x<y<x^2-1$을 나타낸 것입니다.

따라서 상수함수 $h(x)=a$가 저 색칠된 영역에 속하는 부분이 바로 $x^2+2x<a<x^2-1$의 해가 됩니다.



위 그림에서 나타낸 것처럼, $y=a$가 색칠된 영역에 속하는 부분(보라색)이 $x^2+2x<a<x^2-1$을 만족하는 해이고, 그림에서는 $p<x<q$로 나타내집니다.

여기서 중요한 것은, 항상 $q=p+1$이라는 것입니다.

$f(x)=x^2-1$과 $g(x)=(x+1)^2-1$은 서로 x축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 함수와 같기 때문입니다.

즉, 부등식의 해의 구간의 길이가 1이므로 **저 안에 자연수가 속하지 않으려면 반드시 p, q가 모두 자연수**여야 합니다.

따라서 a는 x가 자연수일 때의 $g(x)$의 값이므로

$a_n=n^2+2n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

정답: ②

26. 삼각형의 무게중심의 좌표는 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표의 평균을 계산하면 된다는 것은 알고 계실 것입니다.

문제에서 주어진 곡선과 직선을 연립하면,

$$x^2-\left(4+\frac{1}{n}\right)x+\frac{4}{n}=\frac{1}{n}x+1$$

$$\Rightarrow\ x^2-\left(4+\frac{2}{n}\right)x+\frac{4}{n}-1=0$$

P_n과 Q_n의 x좌표가 위 이차방정식의 두 근이므로

P_n과 Q_n의 x좌표를 각각 p, q라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$$p+q=4+\frac{2}{n}$$

한편 P_n과 Q_n의 y좌표는 각각 $\frac{1}{n}p+1,\ \frac{1}{n}q+1$

(직선의 방정식에 대입한 결과)이므로

$$\left(\frac{1}{n}p+1\right)+\left(\frac{1}{n}q+1\right)$$

$$=\frac{1}{n}(p+q)+2=\frac{1}{n}\left(4+\frac{2}{n}\right)+2=\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+2\quad(i)$$

삼각형 OP_nQ_n의 무게중심의 y좌표는

O, P_n, Q_n의 y좌표들의 평균이므로

$$a_n=\frac{\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+2}{3}\quad(\because\ (i))$$

$$\therefore\ 30\lim_{n\to\infty}a_n=30\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)=20$$

정답: 20

27. 올해 수능부터는 『명제와 집합』 단원이 수능 출제 범위에 들어가게 되었습니다.

이게 왜 4점짜리인지는 모르겠지만...

말이 조금 애매하게 나오긴 했지만, P, Q, R이 U의 부분집합이라고 보는 게 맞겠죠?

$x^2 \le 2x+8$

$\Rightarrow x^2-2x-8 \le 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-4) \le 0 \quad \therefore -2 \le x \le 4$

따라서 $P=\{x \in N \mid -2 \le x \le 4\}=\{1,2,3,4\}$

우선 $p \Rightarrow q \Leftrightarrow P \subset Q$ 이므로

가능한 Q의 개수는 $\{5,6,7,8\}$의 부분집합의 개수와 같습니다. **$\{5,6,7,8\}$의 부분집합에 $\{1,2,3,4\}$를 추가한다고 생각**하면 되는 것이지요.

따라서 가능한 Q의 개수는 16 (i)

한편 $\sim p \rightarrow r \Leftrightarrow P^c \subset R$이고

$P^c=\{5,6,7,8\}$이므로

가능한 R의 개수는 위와 같은 방법으로 16 (ii)

(i), (ii)에서 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $16^2=256$

정답: 256

28. 약간 어려워 보일 수 있는 문제인데, 문제가 되는 부분은 결국 a가 들어간 식뿐이라는 것에 주목합시다.

구간이 나눠져 있어 어려워 보일 수 있는데 그냥 한번 넣어봅시다.

$i)$ $x \ge 0$

$g(f(x))=g(x+6)=x+16 \ge 16$

따라서 이 경우 항상 치역은 $\{y \mid y \ge 0\}$의 부분집합이 됩니다.

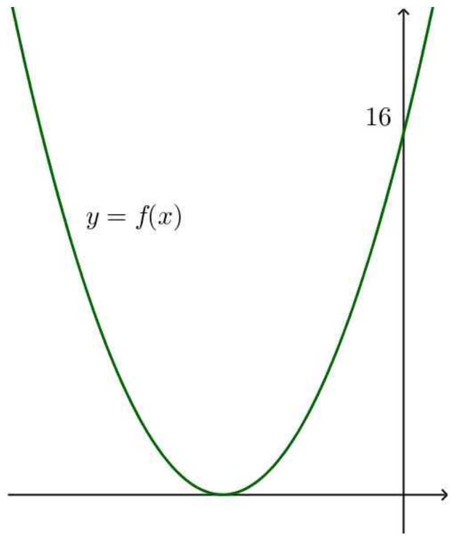
$ii)$ $x<0$

$g(f(x))=g(x^2+2ax+6)=x^2+2ax+16$

모든 음의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+16 \ge 0$ 이어야 치역이 $\{y \mid y \ge 0\}$이 되겠죠?

$f(x)=x^2+2ax+16$이라 하면

함수 $f(x)$의 y절편은 16이고 $f(x)$는 아래로 볼록한 이차함수이므로 $x<0$에서 $f(x) \ge 0$이려면 반드시 아래와 같은 모양이어야 합니다.



즉, 방정식 $f(x)=0$의 판별식의 값은 0이고, 축은 y축 왼쪽에 있어야 합니다.

$x^2+2ax+16=0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-16=0 \Rightarrow a=\pm 4$

여기서 축이 y축 왼쪽에 있어야하므로 $a>0$이어야 합니다. $\therefore a=4$

정답: 4

29. 세 조건 (가), (나), (다)를 만족하는 집합 P를 말로 설명해볼까요?

(가) P는 집합 A의 원소 중 2개를 원소로 갖는다.

(나) P는 B의 부분집합이다.

(가)+(나)+(다): P는 집합 A의 원소 중 2개를 원소로 가지고, 집합 $\{5,6,7,8\}$에서 몇 개를 원소로 가져서 원소의 합이 28이 되는 집합이다.

우선 집합 P는 $\{5,6,7,8\}$의 원소 중 적어도 3개 이상을 원소로 가져야 합니다.

P가 만약 $\{5,6,7,8\}$중 2개를 원소로 가진다고 하면, 가장 큰 값으로 원소를 고른다 하더라도 P의 원소의 합은 $3+4+7+8=22<28$이기 때문입니다.

이렇게 되면 경우의 수가 몇 개 없으니 그냥 적당히

느낌 따라 고르면 됩니다.

$P=\{3,4,6,7,8\}$이라 하면 (가), (나), (다)를 모두 만족시키네요.

따라서 $P-A$의 모든 원소의 곱은 $6\cdot7\cdot8=336$

정답: 336

30. 생뚱맞은 노가다 문제 같은데, 저런 유리함수 형태는 일반적인 합을 구하는 방법이 알려져 있지 않으므로 아마 이 문제는 그냥 **얼마나 효율적으로 계산을 할 수 있는지** 테스트하는 문제인 것 같네요!

$f(x)=\dfrac{8x}{2x-15}=\dfrac{8x-60}{2x-15}+\dfrac{60}{2x-15}=4+\dfrac{60}{2x-15}$

여기서 주목해야할 것이 분모의 값인데요,

$\sum_{n=1}^{14}a_n$의 값을 계산해보면, $\dfrac{60}{2x-15}$에 해당하는 항이 모두 소거되어 없어지는 것을 알 수 있습니다.

1항에서 14항까지 분모인 $2n-15$의 값을 보면,

$-13,\ -11,\ -9,\ \cdots,9,11,13$으로 합하면 소거되게 됩니다. 따라서 $\sum_{n=1}^{14}a_n=4\cdot14=56$

이것을 가지고 m의 값을 구하면 될 것입니다.

$a_{15}=4+\dfrac{60}{15}=8$

$a_{16}=4+\dfrac{60}{17}=7.xxx$

$a_{17}=4+\dfrac{60}{18}>4$이므로 $\sum_{n=1}^{17}a_n>75$입니다.

따라서 $\sum_{n=1}^{m}a_n\le73$을 만족하는 자연수 m의 최댓값은 16입니다.

정답: 16