수능수학 , 홍현빈

수학 영역 (3월 분석칼럼 -가형)

수학은, 실전이다.
수능수학 홍현빈

성명		수험번호						3				

안녕하세요. 3월 모의고사가 오늘 끝났는데,
여러모로 각자 본인들의 지금까지 학습방향을 점검하는
좋은 기회였을 겁니다.

이 칼럼으로 전체적인 문제를 봤을 때 어떤 생각을 했어야 했는지 등을
다룰겁니다.

해설하는 칼럼은 아니구요.

풀이는 해설지 보시구요.

시간이 없으니 바로바로 봅시다.

6. 자연수 n에 대하여 함수 $y=e^{-x}-\frac{n-1}{e}$의 그래프와 함수 $y=|\ln x|$의 그래프가 만나는 교점의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

교점의 개수를 확인하는 방법 중 두 그래프를 그리는 방법이 있죠?

어느정도 학습을 하신분들은, 첫번째 함수에서 $-\frac{n-1}{e}$이 왜 주어졌는지

아실 수 있을겁니다. 언뜻봐선 식이 좀 길고 무서워보이지만

$f(2)$구하는 과정에서 $n=2$ 대입하면 $y=e^{-x}-\frac{1}{e}$이라는 함수가 나와서
$x=1$일 때 함수값이 0 인것을 알 수 있습니다.

제 말은, $-\frac{n-1}{e}$ 식이 괜히 주어진 것이 아니고, 문제 풀 때 어느정도
짐작가셨으면 좋다. 이말입니다.

교점 개수를 물은 상황이고 $f(1)$과 $f(2)$는

각각 어떤 "상황" 이었겠죠?

그 상황을 만들어주기 위해 함수를 적절히 이동시킬 필요가 있고 그래서

나온 식이 $-\frac{n-1}{e}$ 이것이죠.

15. 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 시트지 2장, 빗변의 길이가 $\sqrt{2}a$인 직각이등변삼각형 모양의 시트지 4장이 있다. 정사각형 모양의 시트지의 색은 모두 노란색이고, 직각이등변삼각형 모양의 시트지의 색은 모두 서로 다르다.

[그림 1]과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 창문 네 개가 있는 집이 있다. [그림 2]는 이 집의 창문 네 개에 6장의 시트지를 빈틈없이 붙인 경우의 예이다.

이 집의 창문 네 개에 시트지 6장을 빈틈없이 붙이는 경우의 수는? (단, 붙이는 순서는 구분하지 않으며, 집의 외부에서만 시트지를 붙일 수 있다.) [4점]

[그림 1]　[그림 2]

① 432　② 480　③ 528　④ 576　⑤ 624

틀리지 않았겠지만, 틀렸다면 기출을 더 학습해주는 것이 좋습니다.

이런 문제는 변수를 체크해줘서 가능한 수를 구하면 됩니다.

변수를 좀 체크해보자면

- 정사각형을 붙일 창문 2개 ${}_4C_2$

- 정사각형을 붙이고 남은 창문 2개는 무조건 직각이등변시트지붙음(즉 변수x)

- 직각이등변시트지 붙이는 방향이 두가지임. (2×2 - 창문 2개이므로)

- 직각이등변시트지를 총 4개를 붙여야함 (4!)

다 곱하면 답은 4번.

어려워질수록 변수는 많고 까다로워지고

쉬울 수록 변수는 적고 상황도 간단합니다.

여기서 더 어렵게 낼려면 상황을 나눠주면 됩니다.

상황 나눠주는게 뭐냐면.. 다른 문제 통해서 보겠습니다.

이번시험에 징하게도 많이 냈더군요.

16. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}+\cos 2\pi x}{x^{2n}+1}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-x}^{2}f(t)\,dt+\int_{2}^{x}tf(t)\,dt$$

라 할 때, $g(-2)+g(2)$의 값은? [4점]

① -2　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 6

$\lim_{n\to\infty}x^n$ 의 꼴은 미적분1 처음 수열의 극한에서 다룹니다.

x의 값에 따라 식이 변하므로 x값의 범위에 따라 $f(x)$를 정의해 **"놓고"** 들어가는 것이 기초적인 풀이의 시작인데,

아마 이게 생소했고 바로바로 안튀어나왔다면 해당부분의 기출을 풀어주시는게 좋습니다.

근데 그냥 미적분1기출은 다시 다 푸세요. 3점짜리만이라도 돌려줘도 이런거에서 막히진 않을겁니다.

그리고, 단순히 적분하라하면 좀 매우 계산복잡한 더러운 문제라 느꼈을 수 있지만 $g(-2), g(2)$를 물어봐서 대칭성을 이용한 정적분으로 깔끔하게 풀리는 문제가 되겠습니다.

다항함수에선 대칭성을 파악하기 쉬웠으나, 초월함수에선 그리 쉽게 파악이 안될겁니다.

항상 정의대로 가세요.

$f(x)$ 에서 x 대신 $-x$를 넣었을 때 나오는 결과에 주목하면 됩니다.
$f(-x)$라면 y축 대칭.
$-f(-x)$라면 원점대칭.

17. 1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 8장의 카드 중에서 동시에 5장의 카드를 선택하려고 한다. 선택한 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우의 수는? [4점]

① 24　② 28　③ 32　④ 36　⑤ 40

동시에 5장을 선택한 후 합구하라는건 저도 처음본 문제입니다만,

어떤 생각을 했어야하는지 정말 중요한 문제니깐 차근차근 짚어드리죠.

경우의 수를 처음배울 때 등장하는,

"합의 법칙 곱의 법칙" 이 있습니다.

얘는 정~말 중요하고 핵심이 되는 법칙인데,

그걸 누가모르냐 하겠지만 그 기본 전제가 더 중요합니다.

합의법칙과 곱의법칙의 대전제!!

바로 정의에서 " 두 사건 ~ m, n " 하고 시작하는 부분이죠.

무슨소리냐.

합의법칙과 곱의법칙을 배웠으므로 문제를 내야할텐데,

그럼 최소 몇개의 사건이 필요하죠?

ㅇㅇ. 두개의 사건이 필요합니다.

즉, 합의법칙과 곱의 법칙을 묻고 싶으면, **사건이 여러개인 경우.**

이런경우를 자주 등장시킬 수 밖에 없는 것이고,

여러분은 역으로,

"문제가 한번에 안풀리는, 복잡한 느낌을 받으면"

아 사건이 여러갠가?

하시면 편합니다.

얘도 문제를 처음에 맞딱뜨릴 때 바로 안풀리죠?

그러면 사건이 여러갠가? 의심 후 **"어떻게 나눌지"**

로 바로 넘어가는 사고과정을 겪으셔야 정상입니다.

풀이를 잠깐보면,

선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수이고 1부터 8까지의 모든 자연수의 합이 36으로 짝수이다. 여기서 선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수인 경우는 선택되지 않는 카드 3장에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수인 경우와 같다.
세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 수가 모두 짝수이거나, 세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우이다.
ⅰ) 세 수가 모두 짝수인 경우의 수는
$${}_4C_3=4$$

ⅱ) 세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우의 수는
$_4C_1 \times {}_4C_2 = 4 \times 6 = 24$
ⅰ), ⅱ)로부터 구하는 경우의 수는
$4 + 24 = 28$

라 했는데, 이렇게 하셔도 되고.

처음에 홀수5개 뽑았다하면 안되고

홀수 4개 짝수1개 뽑으면 되니깐,

"아 홀수가 짝수개면 되는구만" 을 깨닫고

홀수 2 짝수 3 과 홀수4개 짝수 1개

즉 **"두개의 사건이 존재하는 문제"**

임을 인지하고 푸시면 됩니다.

두가지가 중요한 문제였는데,

1. 사건이 여러개임을 항상 의식하고 의심할 것.

2. 해설처럼 이해해서 풀어도 되지만 일단 어떤 상황을 시도 후에
이해하는 것이 더 빠름 (시행착오 → 힌트 →문제이해)
즉 문제안풀리면 구경하지말고 제발 여러가지 시도 좀 해봐라 라는 것.

19. 함수 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f'(0) = 1$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq -\dfrac{1}{2}$ 이다.

ㄷ. $0 < a < b < 1$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

엄.... 기출에 있는데....

$f(x)$ 그래프 그리시고 차례차례 하면 됩니다....

ㄷ에서 평균값정리가 나왔는데, 미적분1을 어떻게든 출제하겠다는

강력한 외침인진 모르겠으나,

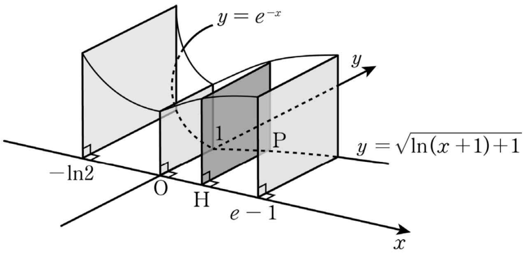
이 기회에 아까 말씀드린것처럼 미적분1기출한번 돌려주세요.

너무 깊게 들어갈 필욘없구요. 적어도 기출만이라도..

20. 그림과 같이 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x<0) \\ \sqrt{\ln(x+1)+1} & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(x, f(x))$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 PH를 한 변으로 하는 정사각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P의 x좌표가 $x=-\ln 2$에서 $x=e-1$까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피는? [4점]



① $e-\frac{3}{2}$　② $e+\frac{2}{3}$　③ $2e-\frac{3}{2}$　④ $e+\frac{3}{2}$　⑤ $2e-\frac{2}{3}$

너 적분할수 있냐? 하고 낸 문제라서..

딱히 어떤 얘기하지않고 넘어가려 했으나 몇가지 당부의 말씀을 드리자면

본인이 맞았든 틀렸든 **계산에서 헤메지 않았는가**가 훨씬중요합니다.

난이도가 쉬웠으니 망정이지 난이도가 좀만 올라가서 출제되고

근데 여러분들은 20번에서 계산때매 헤메고 있고 이러면

소위말하는 멘붕 + 역대 최하점 찍는 날이 됩니다.

맞았으면, 축하드리구요.

버벅거렸는지만 점검해보고 적분계산연습 열심히 하세요.

어떻게 할지 모르겠다하면 본인이 풀던 문제집에서 적분계산 막힌문제는

모조리 긁어다가 연습장에 옮겨놓고 많이많이 풀어보시구요.

아니면 실력정석- 연습문제에 "계산만"더러운 문제 많습니다.

저는 그걸로 훈련했던 기억이 있네요.

물론 20번이 계산이 까다롭냐 하면 전혀아니다 라고 할테지만

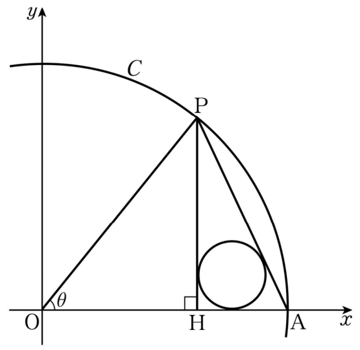
고3 수준을 제가 알거든요 저도 고3이었으니.

대부분 계산 할줄알면 연습잘안합니다.

그러고 좀만 계산 꼬이게 나오면 많이들 버벅대죠.

연습많이하시길.

21. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C가 x축의 양의 방향과 만나는 점을 A, 원 C 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\angle\mathrm{POA}=\theta$라 하자. 삼각형 APH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

교육청 풀이가 두 가지던데, "내접원의 반지름" 구하는 상황이

기출에서 너무나 많이 출제됐었으므로, 그걸로 푸는게 맞습니다.

그럼 삼각형 PHA 의 세변의 길이를 구해야하고,

그 세변의 길이를 **어떻게 θ로 표현할지** 를 구하시면 됩니다.

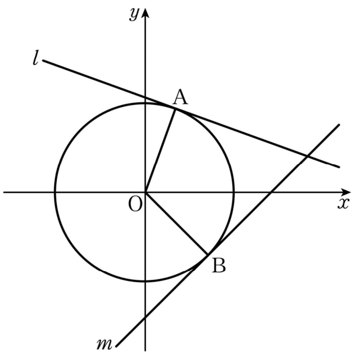
근데 여러분은 제2코싸인, 사인 법칙을 배우지 않았으므로

θ로 표현 하는 과정은 99% 직각삼각형 내에서 해결됩니다.

해서 직각삼각형 내에서 표현하는 연습을 하면 됩니다만

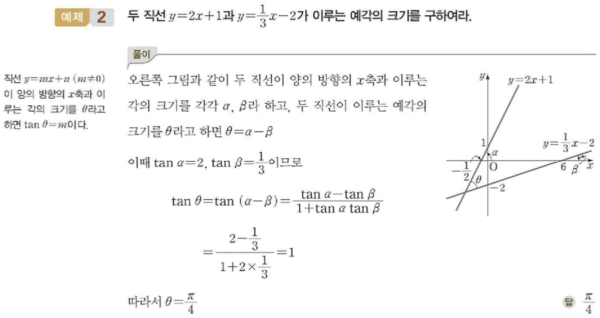
이걸 강조하기에 21번은 너무 쉬웠네요.

26. 그림과 같이 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선 l이 원 $x^2+y^2=1$과 점 A에서 접하고, 기울기가 1인 직선 m이 원 $x^2+y^2=1$과 점 B에서 접한다. $100\cos^2(\angle\mathrm{AOB})$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



이 공식을 따로 배우진 않습니다만, 교과서에 다 예제로 실려있으니
배웠다는 전제하에 출제한 것 같습니다.

바로 다음이죠.


예제 2 두 직선 $y=2x+1$과 $y=\frac{1}{3}x-2$가 이루는 예각의 크기를 구하여라.

풀이

직선 $y=mx+n\ (m\neq0)$이 양의 방향의 x축과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\tan\theta=m$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선이 양의 방향의 x축과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하고, 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 $\theta=\alpha-\beta$

이때 $\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}=1$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$

답 $\frac{\pi}{4}$

출처 : 교과서(동아)

즉, 두 직선이 등장하고 각각의 기울기가 주어져있다면,

출제할 건 그 사잇각을 활용하는, 것 밖에 없다는 겁니다.

그림 요리조리 그리는게 아니라 문제 보자마자

어 두 직선? 기울기? 아 덧셈정리 ㅇㅇ 하시고 사잇각 구하고 넘어가면 되는

문항이었습니다.

쉽네요.

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) N은 10 이상 9999 이하의 홀수이다.
> (나) N의 각 자리 수의 합은 7이다.

얘도 마찬가지입니다.

(가) 조건 마지막에 "홀수이다" 가 얘기해주는 것은,

1의 자리가 1,3,5,7,9 이다. 를 얘기해주고,

여기에 (나) 조건까지 덧붙이면

" 1의 자리가 1,3,5 " 이다 라는 말이 됩니다.

이게 무슨말이라구요??

네 17번에서 얘기한 것과 같습니다.

"사건이 여러개인 문항"

즉, 1의 자리가 1인 사건, 1의자리가 3인사건, 1의자리가 5인 사건

총 세 개의 사건으로 이루어진 문항입니다.

해서,

1번 ~~~

2번~~~

3번~~

해서 각각 구한뒤에 (구하는 과정은 당연히 중복조합이겠죠?)

더해주면 되는 문항이 되겠습니다.

풀이야 쉽지만 보자마자 **사건이 여러개인 것을 인지하고**

연결시켰느냐가 핵심이 되겠네요.

28. 함수 $f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$에 대하여

$$a=f(\pi-x)+f(x), \quad b=\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

일 때, $a+\dfrac{100}{\pi}b$의 값을 구하시오. [4점]

이번 3월 가장 높은 오답률을 기록할 문제일 듯 합니다.

사실 그간 적분문제와 다를게 없는 문제가 확실하다 할 수 있습니다만,

문제 구성자체 때문에 난이도가 올라갔을거라 생각합니다.

만약 문제가 다음같이 구성되었다면 한결 쉬웠겠죠.

> ex) 함수 $f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$ 가
> $1=f(\pi-x)+f(x)$를 만족할 때, $\dfrac{100}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$ 를 구하시오.

즉 어떻게든 주어진 조건으로 적분식을 구하고자 노력했을 겁니다.

그게 그간 풀어왔던 기출문제 대부분의 구성이었을 거구요.

다만 이제 저 $a=1$을 구하는 것과 b를 따로 보는 상황에 직면하니,

$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$를 구하는 과정에서 부분이냐 치환이냐 하는
삽질을 한 것이 아닌가 여겨집니다.

개인적으로 14수능 21번이 생각났는데,

> 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여
> $$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$$
> 이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\displaystyle\int_0^1 xf(x+1)dx$의 값은?
>
> [4점][2014년 수능]
>
> ① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$
> ④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

아무래도 주어진 $f(x)$를 미분한 식을 가지고 구하고자 하는 적분식에 “대입”해서
풀이를 시작하는 도입부분이 비슷해서 떠올랐네요.

하여간 적분에서 배운 치환이나 부분적분이 활용되기 이전에 조건을 활용한 문제! 였고
굳이 따지자면 이미 나왔었다. 정도 얘기해드릴 수 있을 것 같네요.

다만 그 외 문제들에서 시간이 많이 남은 상황에서 까지도 28번을 못풀었다?

그런 사람들은 실전연습이 좀 필요해보입니다.

내가 접근한 풀이가 옳은 풀이가 아닐 때 내가 바로 취해야할 행동은 무엇일까?

를 고민해보는 시간을 오늘 가져보셨으면 합니다.

29. 집합 $X=\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) X의 모든 원소 x에 대하여 $\vert f(x)+f(-x)\vert=1$이다. (나) $x>0$이면 $f(x)>0$이다.

함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [4점]

풀이를 보면,

함수 f가 집합 $X=\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수라고 하자.
$|f(x)+f(-x)|=1$
$\Leftrightarrow$ $f(x)+f(-x)=1$ 또는 $f(x)+f(-x)=-1$
이므로
$x>0$인 X의 원소 x에 대하여 다음이 성립한다.

i) $f(x)=1$일 때, $f(-x)=-2$ ii) $f(x)=2$일 때 $f(-x)=-3$ 또는 $f(-x)=-1$ iii) $f(x)=3$일 때, $f(-x)=-2$

따라서 $f(1)$과 $f(-1)$을 대응시키는 경우의 수는 4이고, $f(2)$와 $f(-2)$를 대응시키는 경우의 수와 $f(3)$와 $f(-3)$을 대응시키는 경우의 수는 각각 4이므로 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 $4\times4\times4=64$이다.

어차피 또 경우가 나뉘는 문제임을 알 수 있습니다. 너무 적나라하게 콕콕 찝어서 출제한 듯 싶네요. 아무래도 범위가 적다 보니...

또한 아까 문제와 마찬가지로 그냥 멀뚱멀뚱 보고있는게 아니라

x에 1이든 2든 그냥 넣어라도 봤었으면 좀 더 문제이해가 빨랐을 겁니다.

결국 감싸고 있는 틀만 다르고, 본질은 같은 문제가 되겠습니다.

30. 함수 $f(x)=x^2e^{ax}\,(a<0)$에 대하여 부등식 $f(x)\geq t\,(t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t=\dfrac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오.

(단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

풀이는 열심히 수학적으로 써놓은 것 같다만

어느정도 문제를 풀어본 사람은 순삭할 수 있는 전형적인 문제가 되겠습니다.

수식풀이는 풀이보고 하시고, 좀 쉽지만 그래도 짚고 갈점만 하나 언급하고 가겠습니다.

크게 보면 새로운 함수를 정의한 문제고,

함수 $g(t)$가 불연속일 때 ~ 라는 아주 상투적인 것을 묻는 문제입니다만

여기서 불연속에 좀 주목해야 합니다.

즉, 계속 연속이다가 불연속이 되는 어떤 점이 있는 건데,

그걸 어떤 점이아니라

"어떤 상황"이라 보시면 됩니다.

또한 그 "어떤 상황"을 우린 수식으로 구체화하는 과정을 거쳐야만 하는데
(답을 내야하므로)

그런데 우린 수식으로 구체화 할 수 있는 상황을 몇개 안배웠습니다.

1. 접하는 상황

2. 극대와 극소

3. 변곡점

등등

즉, 불연속이 되는 부분, 즉 그 점은

"어떠한 상황" 임이 분명하고,

그 어떠한 상황은 위에 열거한 것들이 될 수 밖에 없습니다.

소위 말하는 특수한 상황이죠.

수식으로 구해낼 수 없는 상황이라면 출제될 수 없습니다.

답을 못내니깐요.

해서, 문제를 풀 때, **"어떤 상황일까?" 라는 생각을 갖고 들어가**면 좋고,

이런 쉬운문제는 "아 극대네" 하고 쉽게 나올겁니다.

기출문제들이나, 여타 다른 사설문제들도 이런 마인드로 다시 한번
접근해보세요.

끝입니다!

전반적인 난이도는, 음 어렵지 않았어요.

본인들한테 어렵다면 그건 분명 이유가 있을 것이고, 제가 몇가지 아까 언급한것들에

속한다면 그부분은 반드시 연습해주세요.

여러분의 점수가 궁금하지 않아요. 등급도 궁금하지 않습니다.

왜 그 점수가 나왔는지 그건 왜틀렸고 그건 맞았지만 왜 시간이 더 걸렸는지를

분석하고, 본인의 지금까지의 공부방향은 왜 그걸 커버못해줬느지를 분개하며

방향을 수정하고 그 방향에 맞는 학습방법을 다시 채택, 수정하여 앞으로 가세요.

넌 3등급이니까 이 인강이 맞아

라는 조언 따위는 듣지 마시고

난 이러이러이러 해서 등급이 이렇지만 이러이러이러 한 것들을 수정해야 한다.

이러이러이러 한 것들을 수정할 수 있는 방법은 ~~ 하다

하는 본인의 분석을 믿고 달리세요.

분석 했는데 어떻게 해야할지 모르면 그 때 질문하세요.

저 몇등급인데 어떻게 해요 좀 하지 마시구요.

열공하시고 고3분들은 100점 못맞아도 됩니다. 오늘만 좀 슬퍼하시고

수능 때 다맞으면 됩니다. 앞으로가 중요한겁니다.

멀리 보시고, 현명하게 행동합시다. 열공