<빠른 정답>

1	②	2	⑤	3	⑤	4	②	5	①
6	②	7	①	8	②	9	③	10	③
11	②	12	④	13	⑤	14	③	15	④
16	②	17	②	18	①	19	④	20	③
21	①	22	24	23	16	24	256	25	60
26	420	27	12	28	12	29	4	30	638

<해설>

1. 정답 ②

분자, 분모에 $(1+\cos\theta)$를 곱하여 정리하면

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}(1+\cos\theta)$$
$$=2$$

2. 정답 ⑤

$$\int_0^1 2^{-x}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\right)^x dx$$
$$=\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right]_0^1=\frac{\frac{1}{2}-1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\ln 4}$$

3. 정답 ⑤

$2^x=t\ (t>0)$이라 하면

$4^x-6\cdot 2^x+4=0$이 $t^2-6t+4=0$이 된다. 방정식 $4^x-6\cdot 2^x+4=0$의 두 근이 α,β이므로 이차방정식 $t^2-6t+4=0$의 두 근은 2^α, 2^β가 된다.

한편, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에서

$2^\alpha+2^\beta=6,\ 2^\alpha\times 2^\beta=4$이고

$2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha+2^\beta)^2-2\cdot 2^{\alpha+\beta}$이므로

$2^{2\alpha}+2^{2\beta}=6^2-2\cdot 4=36-8=28$

4. 정답 ②

천의 자리의 숫자에는 0을 제외한 모든 숫자 1, 2, 3, 4가 올 수 있으므로 4가지,

백의 자리에는 천의 자리에 온 1개의 숫자를 제외한 3개의 수에 추가로 0까지 올 수 있으므로 4가지,

십의 자리에는 천의 자리와 백의 자리에 왔던 2개의 수를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있으므로 3가지,

마지막으로 일의 자리의 숫자에는 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 온 2개의 숫자를 제외한 2개의 숫자가 올 수 있으므로 2가지이다.

한편 위의 사건들은 모두 동시에 일어나므로 곱사건이다.

따라서 만들 수 있는 네 자리 자연수는

$4\times4\times3\times2=96$가지

5. 정답 ①

우선 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$이므로

$y=\sin x$를 원점에 대하여 대칭 시키기 위해 x대신 $-x$, y대신 $-y$를 대입하면 $-y=\sin(-x)$

$\therefore y=\sin x$

6. 정답 ②

$x\to0$일 때, (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(2^{x+1}-a)=2-a=0$

$\therefore a=2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2^{x+1}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2(2^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{x}{2^x-1}$$
$$=1\cdot\frac{1}{\ln2}=\frac{1}{\ln2}$$

$\therefore b=1$

$\therefore ab=2$

7. 정답 ①

$f(x)=x\sin\frac{x}{2}+\cos2x$에서

$f'(x)=\sin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin2x$이므로

$f'(2\pi)=\sin\frac{2\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}\cos\frac{2\pi}{2}-2\sin4\pi=-\pi$ 이다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2\pi+2h)-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2\pi+2h)-f(2\pi)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2\pi+2h)-f(2\pi)}{2h}\cdot 2\right\}$$
$$=2\cdot f'(2\pi)=-2\pi$$

8. 정답 ②

$2^{-x^2+50}>2^{-5x}$에서

$-x^2+50>-5x \Rightarrow -5<x<10$이므로

집합 $A=\{x|-5<x<10\}$이고,

$0.2^x \le 1$에서 $0.2^x \le 0.2^0 \Rightarrow x\ge 0$이므로

집합 $B=\{x|x\ge 0\}$이다.

$A\cap B=\{x|0\le x<10\}$이고

$x=0,1,2,\cdots,9$이므로 정수 x의 개수는 10개 이다.

9. 정답 ③

$f(x)=x\ln\dfrac{1}{x}=-x\ln x$이다.

$f'(x)=-\ln x-1$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-1$이므로 $x=\dfrac{1}{e}$이다.

$f(x)$의 증감을 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$\searrow$

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e}$에서 극대이면서 최대이고

최댓값은 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\ln e=\dfrac{1}{e}$이다.

10. 정답 ③

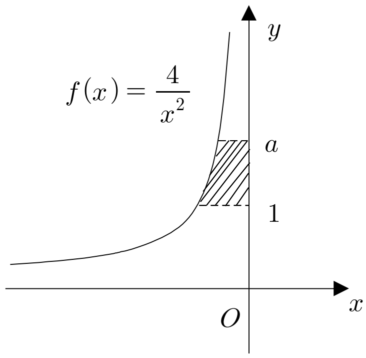
ㄱ. $[2,\ 3]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 증가한다. (참)

ㄴ. $(-2,\ -1)$에서 $f''(x)<0$이다. 따라서 위로 볼록이다. (참)

ㄷ. $b>a$이므로 부등식의 양변을 $b-a$로 나누면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)>1$이어야 하는데 $f'(x)$의

그래프를 보면 $f'(x)>0$이다. (거짓)

11. 정답 ②



$$S(a)=\left|\int_1^a g(x)\,dx\right|=\left|\int_1^a -\frac{2}{\sqrt{y}}\,dy\right|$$
$$=\left|-2\int_1^a\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\right|$$
$$=\left|-2\times2\times\left[\sqrt{y}\,\right]_1^a\right|$$
$$=\left|-4(\sqrt{a}-1)\right|$$
$$=4(\sqrt{a}-1)$$

$\therefore S'(a)=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$

따라서 $S'(1)=2$이므로

$$\lim_{a\to1+}\frac{S(\sqrt{a})}{a-1}=\lim_{a\to1+}\frac{S(\sqrt{a})-S(1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$$
$$=\frac{1}{2}S'(1)=1$$

12. 정답 ④

$\overline{\mathrm{OA}}$와 $\overline{\mathrm{OB}}$은 대칭이기 때문에 $\overline{\mathrm{OA}}$의 최솟값만 구하면 된다.

점 A를 $\left(a,\ \dfrac{4}{a^2}\right)$라고 하자. $d(a)=\overline{\mathrm{OA}}^{\,2}$라고 하면

$d(a)=a^2+\dfrac{16}{a^4}$이다.

$d'(a)=2a-\dfrac{64}{a^5}=\dfrac{2a^6-64}{a^5}=0$

이 되는 $a=2^{\frac{5}{6}}$이다.

따라서 $d\left(2^{\frac{5}{6}}\right)=3\times2^{\frac{2}{3}}$이다.

즉 $\overline{\mathrm{OA}}$의 최솟값은 $2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}$이고

$\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}}=2^{\frac{4}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}$이다.

$\therefore 3p+2q=5$

13. 정답 ⑤

자연수 n을 k개 (단, $1 < k \le n$)의 자연수의 합으로 분할하는 방법의 수 $P(n,\ k)$는 k개의 자연수 중에

㉠ 1이 포함되는 경우

㉡ 1이 포함되지 않는 경우

의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.
이때 ㉠의 경우는 1이상의 자연수
$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1}$에 대하여

$$n = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$$

이라 하면

$$n-1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$$

이 되어 $(n-1)$개를 $(k-1)$개의 자연수의 합으로 나타내는 경우와 같다.
또, ㉡의 경우는 1 이상의 자연수
$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_k$에 대하여

$$n = (1+b_1) + (1+b_2) + \cdots + (1+b_k)$$

의 꼴이므로

$$\boxed{n-k} = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$$

가 되어 $\boxed{}$를 k개의 자연수의 합으로 나타내는 경우와 같다.
따라서 다음이 성립한다.

$$P(n,\ k) = P(\boxed{n-1},\ k-1) + P(\boxed{n-k},\ k)$$

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것의 합은
$3n-2k-1$ 이다.

14. 정답 ③

i) $f(1)=f(3)$ 인 경우 $\Rightarrow$ 4개

ii) $f(2)=f(4)$ 인 경우 $\Rightarrow$ 4개

$f(2)<f(4)$ 인 경우 $\Rightarrow {}_4C_2 = 6$개

총 $4+6 \Rightarrow 10$ 개

iii) $f(5)$는 $\Rightarrow$ 4개

$\therefore 4\times 10\times 4 = 160$개

15. 정답 ④

i) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2+} be^{x-2} = \lim_{x\to 2-} \ln ax = f(2) \text{ 이다.}$$

따라서 $b=\ln 2a$이므로 $\Rightarrow \dfrac{e^b}{2} = a$ ⋯㉠

ii) $f(x)$가 $x=2$에서 미분 가능하므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{be^{x-2}-b}{x-2} = \lim_{x\to 2-} b\cdot\frac{(e^{x-2}-1)}{x-2}$$

$$=b$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{\ln ax-\ln 2a}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}$$

$x-2=t$로 치환하면

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ b = \frac{1}{2}$$

㉠에 의해 $a = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$

$$\therefore\ a+b = \frac{1}{2}(\sqrt{e}+1)$$

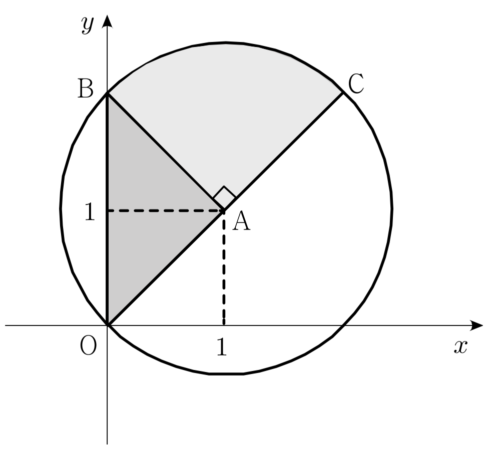
16. 정답 ②

$S_1 + S_3 = S_2$이므로 $\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin x - a)dx = 0$

$$[-\cos x - ax]_0^{\pi} = (-\cos\pi - a\pi) - (-1)$$
$$= 2 - a\pi = 0$$

$$\therefore a = \frac{2}{\pi}$$

17. 정답 ②



i) $x>0,\ y>0$ ($\because$ 로그의 성립 조건)

ii) $\log_x(\log_x y) \ge 0$

(a) $0<x<1$일 때, $0<\log_x y \le 1$

$\therefore y \ge x$

(b) $x>1$일 때, $\log_x y \ge 1$

$\therefore y \ge x$

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}$

부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$

따라서 영역의 넓이는 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\pi+2}{4}$이다.

18. 정답 ①

반원의 반지름 길이가 $\frac{1}{2}\ln x$이므로 넓이는 $\frac{1}{8}(\ln x)^2\pi$이다. 반원이 $x=1$에서 $x=e$까지 움직일 때 이 반원이 그리는 입체의 부피는

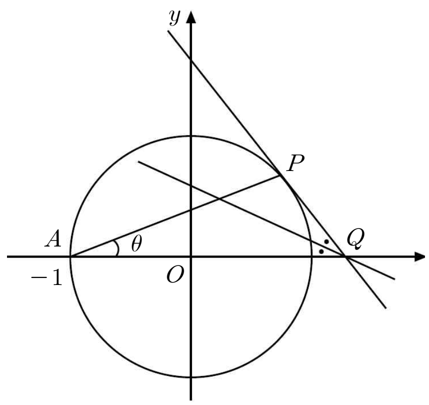
$$\pi\int_1^e \frac{1}{8}(\ln x)^2 dx$$
$$=\frac{\pi}{8}\times\int_1^e (\ln x)^2 dx$$
$$=\frac{\pi}{8}\times\left([x(\ln x)]_1^e-2\int_1^e \ln x dx\right)$$
$$=\frac{\pi}{8}\times(e-2[x\ln x-x]_1^e)$$
$$=\frac{\pi}{8}\times(e-2)$$
$$=\frac{e-2}{8}\pi$$

19. 정답 ④

$1+1+1+\cdots+1=10$이므로 $a_n={}_9C_{n-1}$ 이다. 따라서

$$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_9={}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_8$$
$$=2^9-1-1=510$$

20. 정답 ④



$\angle POQ=2\theta$이므로 $\angle PQO=\frac{\pi}{2}-2\theta$이다.

$L(\theta)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$, $\overline{PQ}=\tan 2\theta$

따라서

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-} L(\theta)\overline{PQ}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\left\{-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}\times\tan 2\theta$$

$\frac{\pi}{4}-\theta=t$로 치환하면 $\theta\to\frac{\pi}{4}-$일 때 $t\to 0+$이다.

$$\lim_{t\to 0+}\left\{-\tan t\times\tan 2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0+}(-\tan t)\times\cot 2t$$
$$=\lim_{t\to 0+}-\frac{\tan t}{\tan 2t}=-\frac{1}{2}$$

21. 정답 ①

$f_{2k-1}(a)=a\ln a-a$, $f_{2k}(a)=e^a$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f_k\left(1+\frac{k}{2n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{2k-1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{2k-1}{2n}\right)-\left(1+\frac{2k-1}{2n}\right)\right\}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{1+\frac{2k}{2n}}$$
$$=\int_1^2 (x\ln x-x)dx+\int_1^2 e^x dx$$
$$=2\ln 2+e^2-e-\frac{9}{4}$$

22. 정답 24

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\quad(\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$이다.

한편,

$(4\sin\theta-4\cos\theta)^2=16(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=16(1-2\sin\theta\cos\theta)$이고

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$이므로

$\therefore\ (4\sin\theta-4\cos\theta)^2=16\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=24$

23. 정답 16

$\log_2 x=t$라 하자.

그러면

$f(x)=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^6-1$

$=-t^2+6t-1$

$=-(t^2-6t+9-9)-1$

$=-(t-3)^2+8$

따라서 $f(x)$는 $t=3$일 때,

즉 $x=8$일 때 최댓값 8을 갖는다.

$\therefore a+M=8+8=16$

24. 정답 256

$f'(x)=1\cdot ae^{ax+b}+ax\cdot e^{ax+b}$

$=(ax+1)e^{ax+b}$

$f''(x)=ae^{ax+b}+a(ax+1)e^{ax+b}$

$f'(0)=e^b=1\quad\therefore\ b=0$

$f''(0)=a+a=2a=6\quad\therefore\ a=3$

그러므로 $f(x)=xe^{3x}$

$\therefore\ f(\ln 2)=(\ln 2)^{3\ln 2}=(\ln 2)e^{\ln 8}=\ln 2^8$

$\therefore k=2^8=256$

25. 60

$f(t)=\ln t^2$이라 하고 $f(t)$의 임의의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $\displaystyle\int_e^x f(t)dt=F(x)-F(e)$이다.

따라서

$\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{30}{x-e}\int_e^x \ln t^2 dt=\lim_{x\to e}30\left(\frac{F(x)-F(e)}{x-e}\right)$

$=30F'(e)=30f(e)$

한편 $f(t)=\ln t^2$에 $t=e$를 대입하면

$f(e)=2$

$\therefore\ 30f(e)=60$

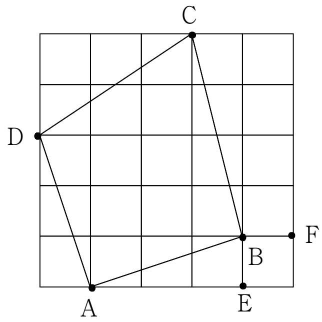
26. 정답 420

같은 종류의 연필 9개를 세 사람에게 1개 이상 나누어주는 방법의 수는 ${}_3H_6$

같은 종류의 공책 7권을 세 사람에게 한 개 이상 나누어주는 방법의 수는 ${}_3H_4$

따라서 연필과 공책을 나누어 주는 방법의 수는 ${}_3H_6\times{}_3H_4=420$

27. 정답 12



$\tan(\angle CAE)=\dfrac{5}{2}$

$\tan(\angle DBF)=-\dfrac{1}{2}$

$\tan\theta=\left|\dfrac{\frac{5}{2}-(-\frac{1}{2})}{1+\frac{5}{2}\times(-\frac{1}{2})}\right|=|-12|=12$

$\therefore\ \tan\theta=12$

28. 정답 12

$\mathrm{P}(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$, $\mathrm{Q}(2\cos 3\theta,\ 2\sin 3\theta)$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$

$=\sqrt{(3\cos\theta-2\cos3\theta)^2+(3\sin\theta-2\sin3\theta)^2}$

$=\sqrt{13-12(\cos\theta\cos3\theta+\sin\theta\sin3\theta)}$

$=\sqrt{13-12\cos2\theta}$

$f(\theta)=\sqrt{13-12\cos2\theta}$ 이고

$f'(\theta)=\dfrac{24\sin2\theta}{2\sqrt{13-12\cos2\theta}}$ 이다.

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

따라서 $k=12$이다.

29. 정답 4

$a=\displaystyle\int_{-1}^{1}|f(x)|dx$ 이므로 $f(x)=\sqrt{|x|}-a$ 이다.

$\int_{-1}^{1}|f(x)|dx$

$= 2\left\{\int_0^{a^2}(a-\sqrt{x})dx+\int_{a^2}^{1}(\sqrt{x}-a)dx\right\}$

$= 2\left\{\left[ax-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2}+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-ax\right]_{a^2}^{1}\right\}$

$=\frac{2}{3}a^3+\frac{4}{3}-2a+\frac{2}{3}a^3$

$=a$

위 식을 정리하면 $9a-4a^3=4$

30. 정답 638

ⅰ) $a=1$일 때

$b=2,\ 3,\ 4$

ⅱ) $a=2$일 때

$b=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 2^4$

ⅲ) $a=3$일 때

$b=5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 2^6$

ⅳ) $a=4$일 때

$b=7,\ 8,\ 9,\ \cdots,\ 2^8$

ⅴ) $a=5$일 때

$b=8,\ 9,\ 10,\ \cdots,\ 1000$

따라서 $3+13+60+250+993=1319$

그런데 $y=x$에 대칭이므로 $k=1319\times 2=2638$

따라서 k를 1000으로 나눈 나머지는 638이다.