<빠른 정답>

1	③	2	①	3	④	4	②	5	④
6	⑤	7	②	8	④	9	⑤	10	②
11	⑤	12	①	13	③	14	③	15	⑤
16	⑤	17	①	18	②	19	⑤	20	③
21	③	22	52	23	35	24	4	25	4
26	32	27	45	28	45	29	9	30	18

<해설>

1. 정답 ③

$\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$

2. 정답 ①

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)^x}{\tan^2 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\tan 2x}\right)^2 \times \frac{\ln(1+2x)^x}{4x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\tan 2x}\right)^2 \times \frac{1}{4}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}\times 2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\tan 2x}\right)^2 \times \frac{1}{2}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}$$

$$= 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. 정답 ④

$f'(x) = 2^{2x-1}\ln 2 \times 2 = 2^{2x}\ln 2$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ 이므로 $f'(1) = 4\ln 2$

4. 정답 ②

$$\int_1^{14}\sqrt[3]{2x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{14} 2 \cdot (2x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left[(2x-1)^{\frac{4}{3}}\right]_1^{14}$$

$$= 30$$

5. 정답 ④

$f'(x) = a^{x-2}\ln a < 0$이므로 $\ln a < 0$이다.

따라서 a의 범위는 $0 < a < 1$이므로 x의 값이 최소일 때, 즉 $x = -1$일 때 $f(x)$는 최댓값을 갖는다.

따라서 $a^{-3} = 2^3$, $a = \frac{1}{2}$이다.

$f(x)$의 최솟값은 $x = 1$일 때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 1 = 3$이다.

6. 정답 ⑤

$\int_2^4 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_4^2 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$

① $\int_1^3 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^3 = \ln 3$

② $\int_3^5 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_3^5 = \ln\frac{5}{3}$

③ $\int_4^5 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_4^5 = \ln\frac{5}{4}$

④ $\int_2^6 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_2^6 = \ln 3$

⑤ $\int_5^{10} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_5^{10} = \ln 2$

7. 정답 ②

자연수 a, b, c, d는 8 이상 16 이하의 자연수 중 서로 다른 4개이므로, 9개의 자연수 중 서로 다른 4개의 자연수를 선택하는 것과 같다.

따라서 집합 S의 개수는 ${}_9C_4 = 126$

8. 정답 ④

함수 $f(x) = 8\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$은

$3x + \frac{\pi}{3} = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \cdots$ 일 때 최댓값 7을 가진다.

$\therefore a = 7$

함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2}{3}\pi$이므로 $p=\frac{2}{3}\pi$이다.

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=8\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)-1$$
$$=8\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)-1$$
$$=8\cos\frac{\pi}{3}-1$$
$$=8\times\frac{1}{2}-1$$
$$=3$$

$\therefore\ a+f(p)=7+3=10$

9. 정답 ⑤

$f(-2)=-2$, $f'(-2)=3$ 이므로

$y'=f'(f(-2))\times f'(-2)=\{f'(-2)\}^2=9$

10. 정답 ②

$x^2-3=t\ \ (t\geq-3)$라 하면

$x=\sqrt{t+3}\ \ (t\geq-3)$이고

$2x\,dx=dt$, $dx=\frac{1}{2x}dt$, $dx=\frac{1}{2\sqrt{t+3}}dt$이다.

$x=\sqrt{6}$일 때 $t=3$이고, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_2^{\sqrt{6}}xf(x^2-3)dx=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)dt=\frac{5}{2}$$

11. 정답 ⑤

평균값 정리에 의해

$g(b)-g(a)=\boxed{b-a}\,g'(c)$ (단, $a<c<b$)

인 c가 존재하고 가정에서 $g(a)\neq g(b)$이므로

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=k$ ⋯ ①

라 하자.

$F(x)=f(x)-f(a)-k\{g(x)-g(a)\}$

라 하면 함수 $F(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하다. 또

$F(a)=F(b)=\boxed{0}$

이므로 롤의 정리에 의해

$F'(c)=f'(c)-\boxed{kg'(c)}=0$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

따라서 ①에서

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ (단, $a<c<b$)

(가) : $b-a$ (나) : 0 (다) : $kg'(c)$

12. 정답 ①

$f(x)=e^{2x}$이므로 역함수 $g(x)=\frac{1}{2}\ln x$이다.

$g'(x)=\frac{1}{2x}$이므로 점 P를 $\left(t,\ \frac{1}{2}\ln t\right)$라 하자.

점 P에서 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}\ln t=\frac{1}{2t}(x-t)$이고 원점을 지나므로

$-\frac{1}{2}\ln t=-\frac{1}{2}$이다.

$\therefore t=e$

점 $\mathrm{P}\left(e,\ \frac{1}{2}\right)$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}^2=e^2+\frac{1}{4}=\frac{4e^2+1}{4}$이다.

13. 정답 ③

$f(x-a)=e^{2(x-a)}$이고 $g(x)=\frac{1}{2}\ln x$이므로

$g(x)+a=\frac{1}{2}\ln x+a$이다.

$y=f(x-a)$의 역함수가

$y=\frac{1}{2}\ln x+a=g(x)+a$이므로 두 곡선의 교점은 $y=f(x-a)$와 $y=x$의 교점과 일치한다. 교점이 단 하나뿐이므로 $y=x$가 $y=f(x-a)$의 접선이 된다. 그 접점을 $\mathrm{P}(t,\ e^{2(t-a)})$라 하자.

$f'(x-a)=2e^{2(x-a)}$이므로 점 P에서 접선의 기

울기는 $2e^{2(x-a)}$이다.

접선의 방정식 $y-e^{2(t-a)}=2e^{2(t-a)}(x-t)$가

$y=x$와 일치하므로

$2e^{2(t-a)}=1$ ⋯ ①

$-2te^{2(t-a)}+e^{2(t-a)}=0$ ⋯ ②

$\frac{1}{2}\times$①을 ②의 식에 대입하면 $-t+\frac{1}{2}=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$

이를 ①의 식에 대입하면 $2e^{1-2a}=1$

$\therefore\ a=\frac{1+\ln 2}{2}$

14. 정답 ③

각 사람은 적어도 두 자루 이상의 연필을 받으므로 각 사람에게 연필 두 자루씩 나누어 주면 $12-2\times3=6$자루가 남는다. 이 6자루의 연필을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$가지이다.

15. 정답 ⑤

$\log_x 2>0$이기 위한 조건은 $x>1$이고,

$\log_x 3>0$이기 위한 조건은 $x>1$이므로

$\log_x 2>0$는 $\log_x 3>0$이기 위한 $\boxed{\text{필요충분}}$ 조건이다.

$\log_x 2>1$이기 위한 조건은 $1<x<2$이고,

$\log_x 3>1$이기 위한 조건은 $1<x<3$이므로

$\log_x 2>1$은 $\log_x 3>1$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$ 조건이다.

16. 정답 ⑤

ㄱ. 로그의 진수조건에 의해서 $\log_2(\log_{\frac{1}{4}}x)$의 진수

$\log_{\frac{1}{4}}x>0$이어야 한다. 밑이 $\frac{1}{4}$이므로

$x<\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$이다. 또한 $\log_{\frac{1}{4}}x$의 진수가 x이므

로 진수조건에 의해서 $x>0$이다.

$\therefore A=\{x|0<x<1\}$

로그함수의 치역은 실수전체이므로

$B=\{x|x\in\mathrm{R}\}$이다.

따라서 $B-A=\{x|x\le 0,\ x\ge 1,\ x$는 실수$\}$

(참)

ㄴ. $f'(x)=\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}}x}\times\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln\frac{1}{4}}$

$=\left(-\frac{1}{\log_4 x}\right)\times\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{x}\times\left(\frac{-1}{\ln\frac{1}{4}}\right)$

그런데 ㄱ에 의해서 정의역은 $0<x<1$인데 이

때 $\left(-\frac{1}{\log_4 x}\right)>0$이고, $\frac{1}{\ln 2}$, $\frac{1}{x}$이 모두 양수인

데 $\left(-\frac{1}{\ln 4}\right)<0$이므로 $f(x)<0$이다. 따라서 x 값이 증가할 때 $f(x)$는 감소한다. (참)

ㄷ. ㄴ의 $f'(x)$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{(\ln 2)^2}$이다. (참)

17. 정답 ①

물의 깊이가 x일 때 수면의 넓이가 $\ln(x+10)$이므로 단면의 넓이 $S(x)=\ln(x+10)$이라고 할 수 있다. 따라서 깊이가 10일 때 용기에 들어있는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{10}\ln(x+10)dx$$
$$=\Big[(x+10)\ln(x+10)-(x+10)\Big]_0^{10}$$
$$=20\ln 20-20-10\ln 10+10$$
$$=10\ln 40-10$$

18. 정답 ②

금년의 총 인원을 a명이라 하면 금년의 여성 종사자 수는 $0.2a$명이다.

n년 후의 총 인원은 $(1.05)^n a$명이고, 여성 종사자 수는 $0.2(1.1)^n a$이므로 남성 종사자 수는

$(1.05)^n a-0.2(1.1)^n a$명이다.

$(1.05)^n a-0.2(1.1)^n a<0.2(1.1)^n a$

$(1.05)^n<0.4(1.1)^n$

$n\log 1.05<2\log 2-1+n\log 1.1$

$0.399<0.0202n$

$\therefore 19.\mathrm{xx}<n$

이므로 20년 후부터 남성의 비율이 여성의 비율보다 작아진다.

19. 정답 ⑤

$y' = 2^x \ln 2$이고 점 $P_1(2, 4)$에서의 접선의 방정식은 $y-4 = 4\ln 2(x-2)$이므로

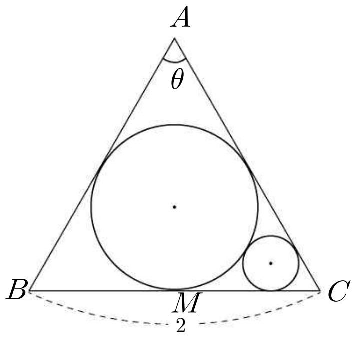
$Q_1\left(\log_2 \frac{4}{e},\ 0\right)$이다. 따라서 $P_2\left(\log_2 \frac{4}{e},\ \frac{4}{e}\right)$이다.

이 시행을 반복할 때 $y_1 = 4$이고, $y_2 = \frac{4}{e}$이므로 점 $P_n(x_n, y_n)$의 y좌표는 첫 번째 항이 4이고 공비가 $\frac{1}{e}$인 등비수열을 이룬다. 따라서

$y_n = \frac{4}{e^{n-1}}$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^{n-1}} = \frac{4}{1-\frac{1}{e}} = \frac{4e}{e-1}$$

20. 정답 ③



M은 B와 C의 중점이므로 $\overline{MC} = 1$이다.

그리고 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$인데

$\angle A = \theta$이고 $\triangle ABC$는 이등변 삼각형이므로

$\angle C = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$이다. 따라서

$$g(\theta) = \overline{AM} = \overline{CM} \times \tan C = 1 \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$

이제 $f(\theta)$를 구해보자.

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right) - f(\theta)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right) + f(\theta)} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)\text{에서}$$

$$f(\theta) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}\text{ 이다.}$$

$$\lim_{\theta \to \pi-} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta \to \pi-} \frac{\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{\tan\frac{t}{4}}{\tan\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}$$

21. 정답 ③

주어진 식 $\int_{-x}^{x} f(t)dt = a\sin x + b\cos x$ $\cdots$ ①

에 $x = 0$을 대입하면 $\int_0^0 f(t)dt = b = 0$이다.

① 을 미분하면 $f(x) + f(-x) = a\cos x$ $\cdots$ ②

인데 $x = 0$을 대입하면

$f(0) + f(0) = a = 2$ ($\because f(0) = 1$)

ㄱ. ②에서 $f(x) + f(-x) = 2\cos x$ (참)

ㄴ. $g(x) = f(x) - \cos x$ $\cdots$ ③

$g(-x) = f(-x) - \cos(-x)$

$= f(-x) - \cos x$ $\cdots$ ④

($\because \cos x$는 우함수)

③ + ④ =>

$g(x) + g(-x) = f(x) + f(-x) - 2\cos x$

$= 2\cos x - 2\cos x = 0$이다. (참)

ㄷ. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{g(x)\}^2 dx = 4$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{g(x)\}^2 + 2g(x)\cos x + \cos^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{g(x)\}^2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \sin^2 x\, dx$$

$$= 8 + 2\left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx\right)$$

$$= 8 + \frac{\pi}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx \text{ (거짓)}$$

22. 정답 41

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

이므로 이를 문제의 식에 대입하면

$80\cos 60^\circ + 16\sin 105^\circ \cos 15^\circ = 48 + 4\sqrt{3}$이다.

따라서 $p+q=52$

23. 정답 35
원소의 개수가 7개인 집합을 원소의 개수가 3개, 4개인 두 부분집합으로 분할하는 방법의 수는
${}_7C_3 \times {}_4C_4 = 35$

24. 정답 4
$f'(x) = \sin 2x + 2x\cos 2x$ 에서 $f'(0)=0$
$f''(x) = 2\cos 2x + 2\cos 2x - 4x\sin 2x$
$\quad = 4\cos 2x - 4x\sin 2x$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = f''(0)$
$\therefore f''(0)=4$

25. 정답 4
$\sin x = \sqrt{3}\cos x$에서 양변을 $\cos x$로 나누면
$\tan x = \sqrt{3}$이다.
따라서 $x = \dfrac{\pi}{3}$ $(\because 0 < x < \pi)$
한편 $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$에서 $\sin x - \sqrt{3}\cos x < 0$이고
$\dfrac{\pi}{3} \le x < \pi$에서 $\sin x - \sqrt{3}\cos x \ge 0$이므로

$$\int_0^{\pi} |\sin x - \sqrt{3}\cos x|\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3}\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sqrt{3}\cos x)\,dx$$
$$= \left[\sqrt{3}\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x - \sqrt{3}\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$= \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)$$
$$= 1+3$$
$$= 4$$

26. 정답 32
$13! = 2^{10}\times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$으로 소인수 분해가 된다. 이를 서로소인 두 자연수의 곱으로 나타내려면 소수를 공유하지 않은 채 둘로 분할시켜야 한다.
예를 들면 $2^{10}\times 3^5\times 5^2$, $7\times 11\times 13$과 같이 분할되어야 서로소인 두 자연수의 곱으로 나타낼 수 있다. 따라서 방법의 수는
${}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 \times \dfrac{1}{2!} = 32$

27. 정답 45
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$이라고 하자.
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2+bx+3}{\ln(1+x+x^2)} = \frac{f(-1)}{g(-1)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+(a-1)x+3)}{\ln(1+x+x^2)}$$
$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+x^2)(x+1)(x^2+(a-1)x+3)}{\ln(1+x+x^2)\times(x+x^2)}$$
$1-a+1+3=0$
$\therefore a=5$
$f(x) = x^3+5x^2+bx+3$에서 $f(-1)=0$
이므로 $-1+5-b+3=0$
$\therefore b=7$
따라서 $f(x)=x^3+5x^2+7x+3$이므로
$f(2)=8+20+14+3=45$

28. 정답 45
$n=2$일 때 $y=\log_2(x+1)$과 $f(x)$의 교점의 개수는 2이다.
$n=3$일 때 $y=\log_3(x+1)$과 $f(x)$의 교점의 개수는 2이다.
$n=4$일 때 $y=\log_4(x+1)$과 $f(x)$의 교점의 개수는 3이다.
이를 계속 진행하면
$a_2=2$, $a_n = n-1\,(n\ge 3)$이다.
따라서
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{60}{a_n a_{n+1}} = 60\left(\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\right)$$
$$= 60\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$
$$= 45$$

29. 정답 9

x축과 이루는 각의 크기가 θ인 직선을 l_θ라 하고, x축과 이루는 각의 크기가 α인 직선을 l_α라 하자.

직선 l_θ의 방정식은

$y=-(\tan\theta)x+\sin\theta$ … ①이고

직선 l_α의 방정식은

$y=-\tan\alpha x+\sin\alpha$ … ②이다.

두 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$-\tan\theta x+\sin\theta=-\tan\alpha x+\sin\theta$

$\therefore x=\dfrac{\sin\theta-\sin\alpha}{\tan\theta-\tan\alpha}$

따라서 교점의 y좌표는

$Y_\alpha=-\tan\alpha\times\left(\dfrac{\sin\theta-\sin\alpha}{\tan\theta-\tan\alpha}\right)+\sin\alpha$ 이다.

$$f(\alpha)=\lim_{\theta\to\alpha}Y_\alpha$$

$$=\lim_{\theta\to\alpha}\left[\left\{-\tan\alpha\times\left(\frac{\sin\theta-\sin\alpha}{\tan\theta-\tan\alpha}\right)\right\}+\sin\alpha\right]$$

$$=-\tan\alpha\lim_{\theta\to\alpha}\left(\frac{\dfrac{\sin\theta-\sin\alpha}{\theta-\alpha}}{\dfrac{\tan\theta-\tan\alpha}{\theta-\alpha}}\right)+\sin\alpha$$

$$=-\tan\alpha\times\frac{\cos\alpha}{\sec^2\alpha}+\sin\alpha$$

$$=\sin^3\alpha$$

$\therefore f'(\alpha)=3\sin^2\alpha\cos\alpha$

$\therefore 8f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=8\times3\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=9$

30. 정답 18

$f(x)$는 실수 전체에서 미분 가능하고 $x=0$에서 최댓값 3을 가지므로 $f(0)=3$이고 $f'(0)=0$이다.

$f'(x)=-5f(2-x)$ … ①

의 식에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=-5f(2)=0$이므로 $f(2)=0$이다.

①의 식에 $x=2-x$를 대입하면

$f'(2-x)=-5f(x)$ … ②이다.

①과 ②의 식을 곱하면

$-5f'(x)f(x)=-5f'(2-x)f(2-x)$ 이다.

$f'(x)f(x)=f'(2-x)f(2-x)$ 의 좌변과 우변을 적분하면

$\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2=-\dfrac{1}{2}\{f(2-x)\}^2+C$ (C는 상수)이다.

$\{f(x)\}^2+\{f(2-x)\}^2=2C=g(x)$이므로

$g(x)$는 상수함수이다.

$\therefore g(100)=g(2)=\{f(2)\}^2+\{f(0)\}^2=9$

따라서 $\{f(x)\}^2+\{f(2-x)\}^2=9$이므로 양변에 정적분하면

$$\int_0^2\{f(x)\}^2+\{f(2-x)\}^2\,dx=\int_0^2 9\,dx$$

$$2\int_0^2\{f(x)\}^2\,dx=18$$

$$\therefore\int_0^2\{f(x)\}^2\,dx=9$$

$$\therefore\ g(100)+\int_0^2\{f(x)\}^2\,dx=9+9=18$$