제 2 교시

# 수학 영역(가형)



5지선다형

**1.** 로그방정식 $\log_2(x+2)=3$의 해는? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

**2.** 함수 $f(x^3)=e^x+1$에 대하여 $6f'(1)$의 값은? [2점]

① $e$ ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

**3.** $0 \le x \le \pi$에서 $\tan x = 4$일 때, $\sin x$의 값은? [2점]

① $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ ② $\frac{\sqrt{17}}{17}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{4}{17}$

**4.** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)\times\sin 2x}{ax^2}=4$일 때, $a$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**5.** 방정식 $x+y+z+w=6$을 만족시키는 자연수 $x, y, z, w$의 모든 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

**6.** $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$인 $\theta$에 대하여 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{26}}{26}$ ② $\frac{\sqrt{26}}{13}$ ③ $\frac{3\sqrt{26}}{26}$ ④ $\frac{2\sqrt{26}}{13}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{26}}{26}$

**7.** 함수 $f(x)=\ln(x^3+x+1)$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(\ln 3)$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

**8.** $\int_0^3 xe^x dx - 1$ 의 값은? [3점]

① $e^3$ ② $2e^3$ ③ $3e^3$ ④ $4e^3$ ⑤ $5e^3$

**9.** 로그부등식 $\log_2(x^2) \le \log_2(4x+12)$을 만족시키는 모든 정수 $x$의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

- Comment

: 로그 방부등식은 항상 정의역을 체크해줘야 합니다. $\log_2(x^2)$의 경우 $x$가 양수,음수 모두 가능하지만 <u>$0$은 될 수 없습니다.</u> $\log_2(4x+12)$에선 $x>-3$이라는 정보를 얻을 수 있습니다.

**10.** 각 면에 $1, 2, 3, 4$의 숫자가 하나씩 적힌 정사면체 주사위를 차례로 3번 던져 나온 각각의 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수는? [3점]

① 1 ② 4 ③ 8 ④ 12 ⑤ 27

- Comment

각각의 수의 곱이 홀수가 되려면 매번 나온 수가 모두 홀수여야만 합니다. 첫번째 두번째 세번째 던지는 시행이 모두 연속적이므로 곱해주면, $2 \times 2 \times 2 = 8$입니다.

**11.** 점 $\left(-e, -\frac{1}{2}\right)$에서 곡선 $y=\frac{k\ln x}{x}$에 그은 접선이 원점을 지날 때, 상수 $k$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $1$ ③ $2$ ④ $e$ ⑤ $2e$

- Comment

: 계산이 조금 까다로웠다고들 하는데, 풀이는 여러가지입니다.

일단, 접선의 방정식에서 “접점”을 모르므로 그 접점의 $x$좌표를 $t$로 두는 접선의 방정식을 세웁니다. 그 접선의 방정식이 원점과 점 $\left(-e, -\frac{1}{2}\right)$를 지남을 활용하여 미지수 $t, k$를 구해주면 됩니다.

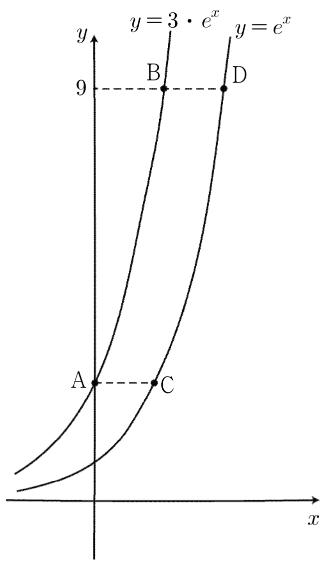
아니면, 접선이 원점과 $\left(-e, -\frac{1}{2}\right)$를 지나므로 두 점을 이은 직선의 기울기가 $\frac{1}{2e}$ 임을 활용하면 좋습니다. 그럼 $x=t$에서으 접선의 기울기가 $\frac{1}{2e}$이 되겠죠.

**12** 명수, 형민, 진욱, 수환 네 명이 노래방에 갔다. 노래방은 1번 방, 2번 방, 3번 방 총 세 개의 방이 있으며 각 방에는 최대 두 명까지 들어갈 수 있다. 명수, 형민, 진욱, 수환 네 명을 세 개의 방에 배치시키는 경우의 수는? (단, 빈 방은 존재하지 않고, 방 속에서의 위치는 고려하지 않는다.) [3점]

① 6 ② 12 ③ 24 ④ 36 ⑤ 48

**[13 ~ 14]** 그림과 같이 함수 $y=3\cdot e^{x}$의 그래프가 $y$축과 만나는 점을 $\mathrm{A}$, 직선 $y=9$와 만나는 점을 $\mathrm{B}$라 하자. 점 $\mathrm{A}$를 지나고 $x$축에 평행하게 그은 직선이 함수 $y=e^{x}$과 만나는 점을 $\mathrm{C}\left(c, e^{c}\right)$, 점 $\mathrm{B}$를 지나고 $x$축에 평행하게 그은 직선이 함수 $y=e^{x}$과 만나는 점을 $\mathrm{D}\left(d, e^{d}\right)$이라 하자. <u>**13번과 14번의 두 물음에 답하시오.**</u>

***13.*** $y$축 위의 임의의 점 $\mathrm{E}(0, k)$에 대하여 삼각형 $\mathrm{EBD}$와 삼각형 $\mathrm{EAC}$의 넓이가 같을 때, $k$의 값은? (단, $k$는 상수이다.) [3점]




① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

- Comment

: “지수로그 함수의 평행이동” 의 개념을 활용하면 좋습니다.
$3\cdot e^{x}=e^{x+\ln 3}$이므로, $3\cdot e^{x}$ 그래프는 $e^{x}$그래프를 $\ln 3$만큼 평행이동한 그래프입니다. 즉, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}=\ln 3$이 됩니다.

근데 그 두 길이는 삼각형에서의 밑변이므로, 넓이가 같으려면 높이만 같으면 됩니다.

$\therefore k=6$

***14.*** 함수 $y=3\cdot e^{x}$위의 점 $\mathrm{F}(t, k)$에 대하여 함수 $y=e^{x}$과 $x$축, 두 직선 $x=c, x=d$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 함수 $y=3\cdot e^{x}$과 $x$축, $x=c$, $x=t$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같을 때, $k$의 값은? (단, $t>\ln 3$) [4점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

**15.** 함수 $f(x)=\int_0^x (4e^t+8)dt-\int_0^1 f(t)dt$ 에 대하여 $f(0)$의 값은? [4점]

① $e-1$ ② $e-2$ ③ $2e-2$ ④ $2-2e$ ⑤ $2e$

**16.** 함수 $f(x)=x-\ln x$에 대하여 $f(x)\ \geq\ kx$이기 위한 상수 $k$의 최댓값은? [4점]

① $\frac{e-1}{e}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\frac{e+1}{e}$ ④ $1$ ⑤ $e$

- Comment

: 사실 이 문항이 막혔다면, 음, 본인이 공부하는 것이 과연 옳은 것인지 점검할 필요가 있습니다. 교과서 예제 유제 뒤에 학습문제로 널리고 널린 유형이기 때문입니다.

풀이는 두 가지로 나뉩니다.

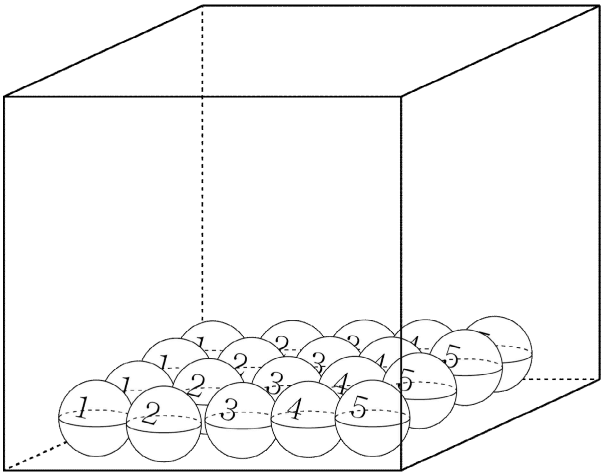
1. $\frac{f(x)}{x}\geq\ k$ 로 식을 변형하여 풀기.
2. $y=f(x)$따로, $y=kx$따로 그려 확인하기.

풀이는 생략하겠습니다. 둘다 해보세요.

**17.** 그림과 같이 상자 속에 $1,2,3,4,5$의 숫자가 하나씩 적힌 5 종류의 공이 각각 4개씩 있다. 이 상자에서 총 4개의 공을 차례로 뽑는데 첫 번째 공은 $A$주머니에, 두 번째 공은 $B$주머니에, 세 번째 공은 $C$주머니에, 네 번째 공은 $D$주머니에 넣을 때 각 주머니에 들어가 있는 공의 숫자가 다음 두 조건을 만족하는 경우의 수는? [4점]

(가) 주머니 $A$에 들어가있는 공과 주머니 $C$에 들어가있는 공의 숫자는 모두 홀수이다.

(나) 주머니 $B$에 들어가 있는 공과 주머니 $D$에 들어가 있는 공의 숫자의 곱은 짝수이다.



① 36 ② 64 ③ 81 ④ 144 ⑤ 196

- Comment

: 일단 (가) 조건을 만족하면, 현재 주머니 $A, C$에는 홀수 공만 들어가 있는 상태입니다. 그러려면 $1,3,5$중 하나의 공만 들어가야 하므로 $3\times3=9$입니다.

후에, (나)에서 풀이가 둘로 나뉩니다. 주머니 $B, D$에 들어가있는 공의 곱이 짝수이려면,

짝수 = 홀수 $\times$짝수, 짝수 $\times$홀수, 짝수 $\times$짝수

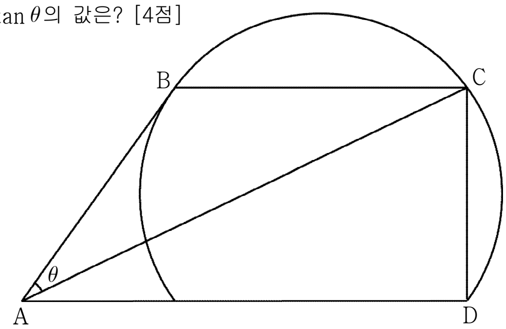
이므로 총 3개의 사건으로 나뉩니다.

해서, 각각의 사건의 경우의 수를 구한뒤에, 더해주면 됩니다.

$\therefore 9\times(6+6+4)=144$

혹은, 두 수의 곱이 짝수인 사건의 여사건인, 두 수의 곱이 홀수인 사건을 생각해보면, 홀수 = 홀수 $\times$홀수 이므로 훨씬 간단하게 풀 수 있습니다.

**18.** 그림과 같이 원의 일부와 $\angle\mathrm{BCD}, \angle\mathrm{CDA}$ 모두 $\frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 ABCD가 점 B, C, D에서 만나고 직선 AB는 원과 점 B에서 접한다. $\overline{\mathrm{BC}}=8, \overline{\mathrm{CD}}=6$일 때, $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하면 $\tan\theta$의 값은? [4점]




① $\frac{64}{123}$ ② $\frac{16}{31}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{32}{123}$

- Comment

: 여러분들은 사실 이 문항을 보면서, 두 번째 줄 끝인 " B에서 접한다" 를 보고 바로 반응했어야 합니다.

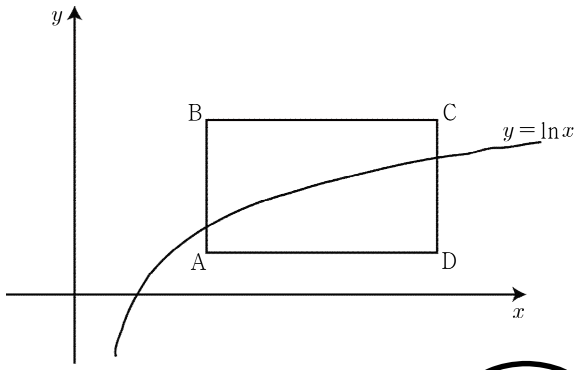
원이 등장했고, 접선까지 등장했으면, 끝난거죠?

그래서 D에서B로 수선의 발을 그을 수 있고, 선분 BD는 원의 중심을 지나는 지름이 됩니다.$\left(\because \angle\mathrm{BCD}=\frac{\pi}{2}\right)$

또한, 몇 번 시도 끝에 $\tan\theta$를 한번에 구할 수 없음을 깨닫고 삼각함수의 "덧셈정리"를 활용할 것을 떠올리면,

$\tan(\angle\mathrm{BAD}-\angle\mathrm{CAD})$ 로 구할 수 있습니다.

**19.** 그림과 같이 직사각형의 가로 변이 $x$축과 평행하고 길이는 $e^2-e$, 세로 변이 $y$축과 평행하고 길이는 2인 직사각형 ABCD 가 있다. 점 A의 $x$좌표는 $e$이고, 점 C의 $x$좌표는 $e^2$이다. 직사각형 ABCD의 넓이가 곡선 $y=\ln x$에 의하여 이등분 될 때, 점 B의 $y$좌표는 $k$이다. $k$의 값은? [4점]




① $\dfrac{1}{e-1}$　② $\dfrac{e}{e-1}$　③ $\dfrac{2e}{e-2}$　④ $\dfrac{e}{e-2}$　⑤ $\dfrac{2e-1}{e-1}$

- Comment

: 결과적으로, 점 A의 $y$좌표를 $t$라 하면,

직사각형의 넓이 $\times \frac{1}{2}(=e^2-e)$ =

곡선 $y=\ln x$와 $y=t$, $x=e^2$, $x=e$로 둘러싸인 넓이

$\therefore e^2-e= \int_e^{e^2} \ln x - t\,dx = e^2-te^2+te$

정리하면, $t=\dfrac{1}{e-1}$이고, $k=t+2$이므로 $k=\dfrac{2e-1}{e-1}$이다.

**20.** 직선 $y=-x+7$이 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-4)$의 그래프와 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{C}(x_2, y_2)$라 하고, 점 A에서 $x$축에 평행한 직선을 그었을 때 곡선 $y=\log_2(x-4)$와 만나는 점을 $\mathrm{B}(b, y_1)$, 점 C에서 $x$축과 평행한 직선을 그었을 때 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 $\mathrm{D}(d, y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

> ㄱ. $x_1<5$
> ㄴ. 삼각형 ACD의 넓이는 4이다.
> ㄷ. $\dfrac{y_1-y_2}{b-d}>\dfrac{1}{7}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- Comment

: ㄱ은 기출에서 정말 자주 나온 표현이었습니다.
$x_1$의 상대적위치를 묻은 것으로, $x=5$보다 왼쪽에 위치하냐를 물은 문제입니다.
$x=5$를 $y=-x+7$에 대입하면 $y=2$입니다. $x=5$를 $y=\log_2 x$에 대입하면 2보다 조금 큰 수가 나옵니다.

그런데 $x_1$은 직선과 곡선의 교점이므로, 정의에 따라 $x=x_1$일 때에 직선과 곡선의 "함숫값"은 같습니다. $x=5$일 때의 상황은 두 그래프가 만나는 다음 상황, 그러므로 $x_1<5$입니다.

ㄴ 에서, $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-4)$ 두 그래프는 $x=4$만큼 "평행이동"한 관계임을 파악했다면, 높이$(y_1-y_2)$가 2이냐 아니냐만 확인하면 되는 문항이었습니다. 눈대중으로 "절대아니네" 하실 수 있지만, 그러면 ㄷ 을 푸는데에 어려움이 많았을 겁니다.
ㄱ에서 얻은 정보와, $y_1=-x_1+7$을 연립하면 $2<y_1$을 얻습니다.
이제 $y_2$에 대한 정보가 필요한데, 교점이므로 $(x_2, y_2)=(6, 1)$입니다.
( 사실 ㄱ 에 $x_2=6$ 이라는 것도 같이 물었으면, 좀 더 깔끔해지고 문항난이도도 낮아지지 않았을까라는 생각이 듭니다.)

해서, ㄴ은 명백히 틀림을 알 수 있습니다.

ㄷ. 평행이동 관계를 활용하면, $b=x_1+4$이고, $d=x_2-4$입니다.
해서, $b-d=x_1-x_2+8$이고,
$y_1=-x_1+7$, $y_2=-x_2+7$ 이므로
$y_2-y_1=x_1-x_2$ 입니다.

해서, $y_1-y_2=k$라 하면, ㄷ은
$\dfrac{k}{-k+8}>\dfrac{1}{7}$ 가 됩니다.

$\frac{1}{5}$이었으나, $\frac{1}{7}$이 더 명백하여 수정합니다.

정리하면 $k>1$임을 묻는것이고, ㄴ에서 $y_1-y_2=k>1$임을 아니깐 ㄷ은 맞습니다.

**21.** 함수 $f(x)=exln(x^2)+k$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$의 미분불가능한 점의 개수가 $n$개가 되게하는 $|k|$의 최솟값을 $a_n$이라 하자. $a_2+a_3+a_4$의 값은?(단, $k$는 정수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

- Comment

: 일단, $f(x)=exln(x^2)$의 그래프를 그려볼 수 있습니다. 여기서 $\ln(x^2)=2\ln x$이지만, $x^2$의 정의역은 0이 아닌 실수임을 잊지 마셔야 합니다. (또한, $f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않습니다.)

해서, 그래프는 다음과 같습니다.

이 다음에 풀이는 여러가지로 나뉩니다.

미분가능성의 정의에 따라, 구간이 나뉘는 부분의 $x$값을 $t$라 한다면, 구간이 나뉘는 $x=t$에서 $f(t)=0, f'(t)=0$ 이어야 합니다.
여기서 $x=t$는 결국 $f(x)$와 $x$축의 교점이므로,
$f(x)$와 $x$축이 만나는 부분에서 값이 0이 아니거나 기울기가 0이 아니면 모두 미분불가능한 부분입니다.

이것을 바탕으로 $n$이 $2,3,4$일 때 상황의 그래프는 다음과 같습니다.

여기서 주의해야 할것이, $\lim_{x\to 0}f(x)$값이 음수이든 양수이든 $f(0)$값은 정의되어 있지 않으므로, $f(x)$는 $x=0$에서 미분불가능합니다.(불연속)
즉, 거의 대부분 틀리신 분들은 $x=0$을 고려하지 않아 미분불가능한 점의 개수를 하나씩 덜 세었을 겁니다.

어느정도 팁을 드리자면, 본인의 생각으로 문제를 풀어나갈 때 $a_4$의 값처럼 구할 수가 없는 값이 등장하면, 절대로 문제를 의심하시면 안됩니다. (물론 시중에 모의고사는.. 의심한 것이 맞을수도 있겠지만.)
수능에서, 설마 여러분이 맞고 문제가 틀렸을거란 생각을 하시는건 아니시겠죠? 해서, 시험 그 순간에 절대 구할 수가 없는, 말이 안되는 순간이 오면, 저라면 바로 제 생각을 의심하고 수정합니다.

아직 실전경험이 부족한 학생들은 그 순간에 문제를 의심하고 자꾸 안되는것을 붙잡고 늘어지겠지만, 어느정도 경험이 있는 학생들은
“ 내 생각 중에 어느 부분이 문제일까 ” 하면 빠르게 방향을 재점검하고 문제를 맞혀나갈 것입니다.

앞으로 실전연습하면 해결될 부분이니, 너무 심려치마시고(...)
고3분들은 “앞으로 열심히 해야지” 정도의 다짐만 해주면 되겠습니다.

## 단답형

**22.** $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 2\theta}{\theta^2}$의 값을 구하시오. [3점]

답 : 2

**23.** 다항식 $\left(ax+\frac{b}{x}\right)^3$의 전개식에서 $x$의 계수가 12일 때, 정수 $a, b$의 순서쌍 $(a,b)$ 개수를 구하시오.[3점]

답 : 4

# 수학 영역(가형)

**24.** 함수 $y=\cos(3x+4)$의 주기를 $a$, 함수 $y=|\sin x|$의 주기를 $b$라 할 때, $\frac{6a}{b}$의 값을 구하시오.[3점]

답 : 4

**25.** 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{e^x+4x-1} & (x\neq 0) \\ k & (x=0) \end{cases}$ 가 $x=0$에서 연속일 때, $20k$의 값을 구하시오.[3점]

답 : 4

- Comment

: 식이 분해가 안된다고 울지마시고, 분모분자를 $x$로 나눠주시면 됩니다.

**26.** 탁자 위에 흰 공 2개, 검은 공 4개가 있다. 이 중 4개를 뽑아 학생 $A, B, C$ 세 명에게 나눠주는 경우의 수를 구하시오. (단, 흰 공이나 검은 공을 한 개도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

답 : 81

- Comment

: “ 경우의 수 ” 단원에서 “사건이 여러개인 경우”는 정말, 정~말 자주 등장한다 여기시면 됩니다. 해서, 점차 난이도가 있는 번호에 배치되어 있는 문항일수록 문제를 접근할 때 “사건(혹은 경우)가 어떻게 나뉠까“ 를 먼저 생각하는게 문제해결이 편한 경우가 많습니다.

이 문제도, 처음에 4개를 뽑아 세명에게 나눠주는데, 4개를 뽑는 과정에서 “사건”이 나뉩니다.

1. 흰 2 / 검 2
2. 흰 1 / 검 3
3. 흰 0 / 검 4

아, 사건이 3가지인 문제였네요.

그럼 각각의 사건마다 3명의 학생에게 나누어주는 경우의 수를 따로 구해주고, 더해주면 됩니다.

1. 흰 공 2개를 3명에게 나눠줌 $\rightarrow {}_3H_2$
   검은 공 2개를 3명에게 나눠줌 $\rightarrow {}_3H_2$
$\therefore {}_3H_2 \times {}_3H_2 = 36$

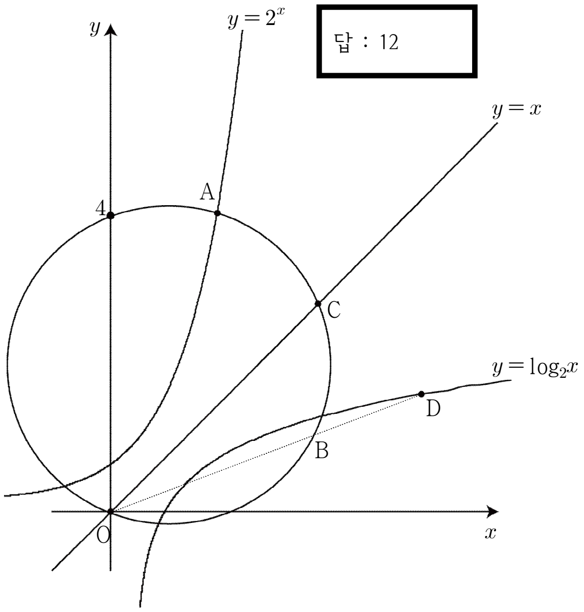
2. ${}_3H_1 \times {}_3H_3 = 30$

3. ${}_3H_4 = 15$

다 더하면 81.

**27.** 그림과 같이 좌표평면 위에 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 직선 $y=x$, 원$S$가 있다. 원 $S$는 곡선 $2^x$과 점 $\mathrm{A}(2,4)$에서 만나고 직선 $y=x$와는 원점 $\mathrm{O}$,점 $\mathrm{C}$에서, $y$축과는 $(0,4)$에서 만난다. 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 $\mathrm{D}$에 대하여 직선 $\mathrm{AD}$의 기울기가 $-1$이고 원 위의 점 $\mathrm{B}$에 대하여 세 점 $\mathrm{O,B,D}$는 한 직선 위에 있을 때, 삼각형 $\mathrm{ABD}$의 넓이를 $S$라 하자. $10S$의 값을 구하시오. [4점]

답 : 12




- Comment

: 원이 등장하는 상황에서, 원의 성질이 쓰이지 않은 문제는 "전무" 하다 보시면 됩니다. 즉, 원이 등장하는 모든 문제는 어떤 원의 성질이 쓰였나를 우선적으로 파악하는 것이 관건입니다.

이 문제에서의 핵심은, 점 $\mathrm{A}$의 $y$좌표가 4이므로, 점 $\mathrm{A}$에서 $y$축으로 수선을 내렸을 때 $y$축과 만나는 점은 곧 원과 $y$축과의 교점입니다. 그 점을 $\mathrm{H}$라 하면, 삼각형 $\mathrm{AHO}$는 직각삼각형이 됩니다

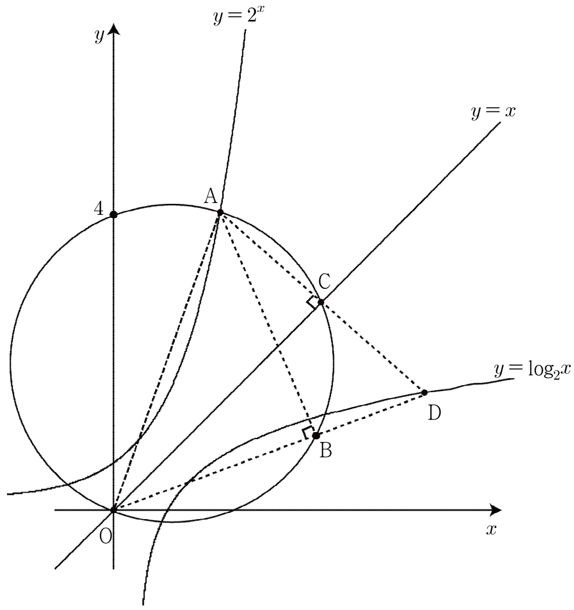
원의 성질에 의해, 선분 $\mathrm{AO}$는 원의 지름이 됩니다.

해서, 삼각형 $\mathrm{ACO}$, $\mathrm{ABO}$ 모두 <u>직각삼각형</u>이 됩니다.

이것이 이 문항에서 원이 나온 이유였고 이젠 다른 사항들을 확인해봅시다.

직선 $\mathrm{AD}$의 기울기가 -1 이란 것은 두 점이 $y=x$와 대칭관계란 것입니다. (역함수 관계) 또한 그 직선 위에 점 $\mathrm{C}$가 있습니다. (사실 그 이유를 보여야 논리적인 풀이가 됩니다.)

이정도면 반은 왔다 봅니다. 이제 그림을 그려서 나머지를 확인해보도록 합시다.




보조선을 모두 그려주면 위와 같은 그림이 나옵니다.

일단 중요한 정보를 짚고가면, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{DOC}$입니다. 또한, 삼각형 $\mathrm{OCD}$와 삼각형 $\mathrm{BDA}$는 닮음이므로 $\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{DOC}=\angle\mathrm{BAD}$입니다.

좋습니다. 이제 넓이를 구해보면, 우리는 $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\angle\mathrm{BAD}$를 구해야만 함을 알 수 있습니다. (밑변 × 높이를 하든 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$를 하든 필요한 정보이기 때문.

그런데, 삼각형 $\mathrm{OAC}$에서 $\overline{\mathrm{AO}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OC}}=3\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$ 이므로, 우리는 $\angle\mathrm{AOC}$에 대한 정보를 모두 압니다.(정보=sin,cos…)

해서, $\angle\mathrm{BAD}$에 대한 정보도 압니다.

삼각형 $\mathrm{ABD}$에서, 빗변이 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{2}$이므로,

높이는 $\overline{\mathrm{AD}}\sin\theta=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$

밑변은 $\overline{\mathrm{AD}}\cos\theta=2\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$

입니다.

쉽죠?

**28.** 연속함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x} g(x) dx = 6$

(나) $g(x) = \{f(e^{x}) - f(1) + 2\} f'(e^{x})$

$\int_{1}^{2} f'(x) dx$ 의 값을 구하시오.(단, $f'(x) > 0$) [4점]

답 : 2

\- Comment

: 여러분이 항상 생각하셔야 할건 결국, 정적분에서의 "식변형"은
대부분 치환,부분적분으로 수렴하는 것입니다.
즉, 그 두개 중 무엇일까? 좀 더 옳고, 빠른 접근이 됩니다.

(나)식에 $g(x)$를 (가)식에 대입할 수 있고, 그 후 우린
"식변형"을 통해서 $\int_{1}^{2} f'(x) dx$ 값을 구할 겁니다.

그 과정이 치환이냐 부분이냐만을 고민하란 겁니다.

대입하면 다음과 같습니다.

$$\int_{0}^{\ln 2} e^{x} \{f(e^{x}) - f(1) + 2\} f'(e^{x}) dx \cdots \square$$

저는, 치환적분이 보입니다.
무언가를 치환했을 때, 그것에 미분되어 있는 꼴이 곱해져 있어야함은,
치환적분을 공부한 사람이라면 당연한거겠죠?

해서, $f(e^{x}) - f(1) + 2$를 $t$로 치환해보겠습니다.
그러면 $f'(e^{x}) e^{x} dx = dt$ 이고,

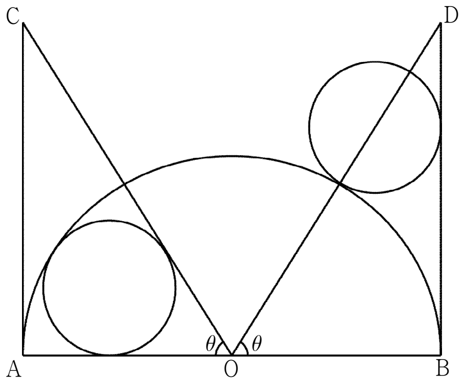
□은 $\int_{2}^{f(2) - f(1) + 2} t\, dt$ 가 되겠네요.

풀면,
$\frac{1}{2} \times \{f(2) - f(1) + 2\}^{2} - \frac{1}{2}(2)^{2}$
이 되고, 그 값이 (가) 에서 6이라 했습니다.

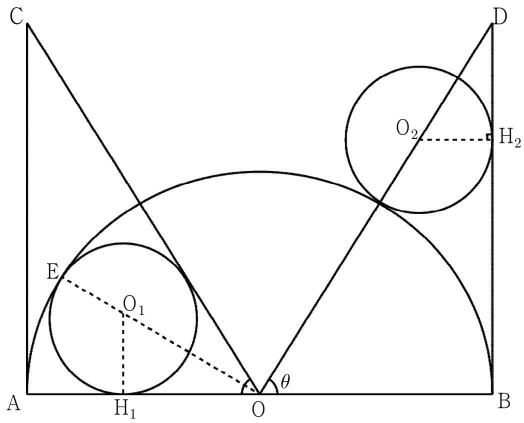
또한, 문제에서 구하라 하는 값은 $\int_{1}^{2} f'(x) dx = f(2) - f(1)$이므로
$f(2) - f(1) = k$로 두고 풀면,
$k^{2} + 4k = 12, k = 2 \text{ or } -6$입니다.
그런데, $f'(x) > 0$이므로 $k = 2$입니다.

\+ 사실 (나) 조건에 처음 출제 식은
$g(x) = \left\{\int_{1}^{e^{x}} f(x) dx + 2\right\} f(e^{x})$였습니다.

**29.** 그림과 같이 길이가 4인 선분 $\mathrm{AB}$를 지름으로 하고 점 $\mathrm{O}$를 중심으로 하는 반원과 선분 $\mathrm{OA}$, $\mathrm{OB}$를 각각 밑변으로 하고 높이가 $2\tan\theta$인 두 직각삼각형 $\mathrm{OAC}$, $\mathrm{OBD}$가 있다. 중심이 선분 $\mathrm{OD}$ 위에 있고 선분 $\mathrm{BD}$와 반원에 접하는 원의 반지름을 $r_1$, 삼각형 $\mathrm{OAC}$와 선분 $\mathrm{AO}$, 반원에 접하는 원의 반지름을 $r_2$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{16r_1r_2}{\theta^3}$의 값을 구하시오. [4점]




답 : 8




식 풀이는 스스로 하시리라 믿고, 식을 세우는 과정까지만 해보겠습니다.

바로 보조선을 그렸고, 풀이에 들어가 봅시다.

사실 저 보조선을 왜 그렸는지가 정말 중요합니다.

결국에 "원과 원이 접하는 상황" 이 등장했는데,
그 상황을 대체 왜 등장시켰는가에 대한 의문이,
여러분은 문제를 보자마자 떠올라야하고,

사실 열심히 기출을 풀었다면 그 의문에 대한 해결은 이미 되있어야 정상입니다. 뻔하디 뻔한 과정이라서요.

여튼, 풀어보죠. (몇 개의 점을 설명을 위해 알파벳을 부여했습ㄴ다.)

삼각형 $\mathrm{O_1H_1O}$에서, $\overline{\mathrm{O_1O}}=2-\mathrm{r}$, $\overline{\mathrm{O_1H_1}}=\mathrm{r}$입니다.
($\because\ \overline{\mathrm{EO}}-\overline{\mathrm{EO_1}}=\overline{\mathrm{O_1O}}=2-\mathrm{r}$)
그런데, $\dfrac{\overline{\mathrm{O_1H_1}}}{\overline{\mathrm{O_1O}}}=\sin\dfrac{\theta}{2}$ 이므로, $\dfrac{r}{1-r}=\sin\dfrac{\theta}{2}$입니다.

삼각형 $\mathrm{DO_2H_2}$에서, $\overline{\mathrm{DO_2}}=\dfrac{\overline{O_2H_2}}{\cos\theta}=\dfrac{r}{\cos\theta}$이고,
삼각형 $\mathrm{DOB}$에서
$\overline{\mathrm{DO}}=\dfrac{2}{\cos\theta}=2+r+\dfrac{r}{\cos\theta}$ 입니다.

즉, $r=\dfrac{2\times(1-\cos\theta)}{1+\cos\theta}$ 가 나옵니다.

**30.** 모든 항의 계수가 정수인 이차함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $f(x)=f(-x)$ |
| (나) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\sin x)\,dx = -\frac{1}{8}$ |

$4f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

답 : 12

- comment

이 문항은, 계수가 정수인 이차함수 란 조건과 (가) 조건을 활용하여 $f(x)=ax^2+b$라는 식을 세운 뒤,
언제 이 식을 활용하느냐에 따라 풀이가 천차만별인 문제가 됩니다.

해서, 저는 여러분이 **생소하실, 학습이 필요한** 하나의 풀이만 보일테니, 다른 풀이도 스스로 해보시길 바랍니다.

(나) 조건에서, 치환적분을 해보자는 마음을 먹고, $\sin x = t$로 치환해봅시다. 그러면, 치환한 것을 미분한 값, 즉 $\cos x$가 곱해져 있어야 하므로 분자 분모에 곱해주면, 다음과 같습니다.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x \cdot \sin x \cdot f(\sin x)}{\cos x \cdot \cos x}dx$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{tf(t)}{1-t^2}dt$$

여기서, 분자에 $-2$를 곱해주고, 적분식 바깥엔 $-\frac{1}{2}$를 곱해주고 부분적분을 하면,

$$-\frac{1}{2}\left[\ln(1-t^2)f(t)\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \ln(1-t^2)f'(t)dt$$

여기서 두 식이 더해져있다 생각하고, 첫번째식, 두번째식 따로따로 한번 보겠습니다.

첫번째식을 전개하면,

$$-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\ln 2 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}ln2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\because f(x)=f(-x))$$

여기서 $f(x)$에 대입해도 되지만, 일단은 여기까지 하고, 두번째 식을 보도록 하겠습니다.

- comment

두 번째식 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \ln(1-t^2)f'(t)dt$ 에서,

분명 적분식이므로, 우린 **치환이나 부분적분**을 할겁니다.

하지만 부분적분을 하면 부분적분을 결과적으로 두번한 꼴인 원래상태에 식으로 돌아갈것이기 때문에,

치환적분이 쓰여야함을 눈치채야합니다.

해서, 치환을 하려보니 $f'(t)$식이 있기 때문에, 비로소 대입을 합니다.

$f(t)=at^2+b$, $\therefore f'(t)=2at$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \ln(1-t^2)2at\,dt$$

$$=-\frac{a}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} -2t \cdot \ln(1-t^2)dt$$

이제 $1-t^2=k$로 치환하면, 준식은

$$-\frac{a}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \ln k\,dk = \frac{a}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \ln k\,dk$$

$$=\frac{a}{2}\left[xlnx-x\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{a}{8}$$

사실 여기서 눈치채고, $a=1$이여야 (나)조건을 만족한다. 해도 되지만, 그러려면 왼쪽에서 구한 첫번째식 $=0$임을 보여야하는게 맞습니다.

왼쪽식에서 $f(x)$에 다 대입하고 식을 정리하면,

$$=\ln 2 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}ln2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$=\ln 2\left(\frac{1}{2}a+\frac{b}{2}\right)$ 입니다.

즉, (나) 조건은,

$-\frac{1}{8}=\ln 2\left(\frac{1}{2}a+\frac{b}{2}\right)-\frac{a}{8}$ 이고, $a, b$는 정수이기 때문에,

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=0$ 이여야 합니다. 즉, $a=-b$ 입니다.

$\therefore -\frac{a}{8}=-\frac{1}{8}$, $a=1$, $b=-1$입니다.