

# 공통

## 정답과 해설

|                  |                  |                  |                 |                  |
|------------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| 1번<br>⑤          | 2번<br>②          | 3번<br>③          | 4번<br>④         | 5번<br>④          |
| 6번<br>①          | 7번<br>④          | 8번<br>③          | 9번<br>②         | 10번<br>①         |
| 11번<br>②         | 12번<br>②         | 13번<br>⑤         | 14번<br>④        | 15번<br>③         |
| 16번<br><b>21</b> | 17번<br><b>10</b> | 18번<br><b>56</b> | 19번<br><b>7</b> | 20번<br><b>25</b> |
| 21번<br><b>26</b> | 22번<br><b>14</b> |                  |                 |                  |

1.  $\frac{3^{\sqrt{5}+1}}{3^{\sqrt{5}-1}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1   ②  $\sqrt{3}$    ③ 3   ④  $3\sqrt{3}$    ⑤ 9

정답 : ⑤

문제를 읽으니 주인공은  $\frac{3^{\sqrt{5}+1}}{3^{\sqrt{5}-1}}$ 이라는 분수다. 지수에 무리수  $\sqrt{5}$ 가 있어 직접 계산은 못 한다. 구하는 것은 이 값.  
밑이 3으로 같으므로 지수끼리 빼면 된다. 계산 전에 미리 예상해보면  $(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{5}-1)$ 에서  $\sqrt{5}$ 가 소거되어 정수만 남는다.  
이 소거를 예상하는 감각이 지수 문제의 핵심이다.

$$\frac{3^{\sqrt{5}+1}}{3^{\sqrt{5}-1}} = 3^{(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)} = 3^2 = 9$$

2.  $\int_{-1}^1 (x^3 + a)dx = 4$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은? [2점]

- ① 1   ② 2   ③ 3   ④ 4   ⑤ 5

정답 : ②

문제를 읽으니  $\int_{-1}^1 (x^3 + a)dx = 4$ 에서 상수  $a$ 를 구하라고 한다.  
계산 전에 한 번 바라본다. 구간  $[-1, 1]$ 이 원점 대칭이므로  
홀함수  $x^3$ 의 적분은 0이고, 남는 것은 상수  $a$ 의 적분, 즉 구간  
길이 2 곱하기  $a$ 뿐이다.

$$\int_{-1}^1 (x^3 + a)dx = 0 + 2a = 4 \quad \{\text{홀함수의 대칭구간 적분은 0}\}$$

$$a = 2 \quad \{\text{정리}\}$$

3. 함수  $y = 2^x$ 의 그래프를  $y$ 축의 방향으로  $m$ 만큼  
평행이동한 그래프가 점  $(-1, 2)$ 를 지날 때, 상수  $m$ 의  
값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{2}$    ② 1   ③  $\frac{3}{2}$    ④ 2   ⑤  $\frac{5}{2}$

정답 : ③

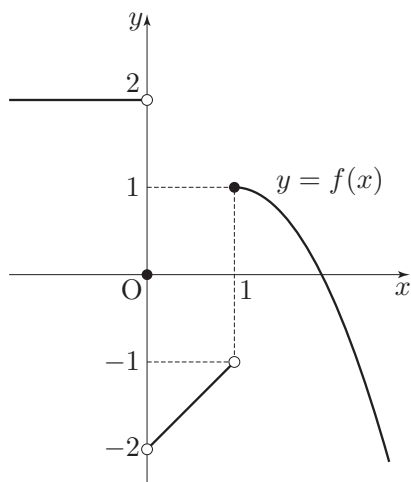
문제를 읽으니  $y = 2^x$ 를  $y$ 축 방향으로  $m$ 만큼 평행이동한  
그래프가 점  $(-1, 2)$ 를 지난다. 구하는 것은  $m$ .  
정공법은 옮긴 식  $y = 2^x + m$ 에 대입하는 것이다. 그런데 두 식  
중 더 깔끔한 쪽은 원래 식  $y = 2^x$ 다. 그렇다면 점을 거꾸로  
옮기자. 그래프를  $(0, m)$ 만큼 옮겼으니, 점  $(-1, 2)$ 를  $(0, -m)$   
만큼 역평행이동한  $(-1, 2 - m)$ 이 원래 그래프 위에 있다. “어느  
식에 대입하는 게 깔끔한가”로 방향을 고르는 습관은 쉬운  
문제에서 익혀 두면 어려운 평행이동 문제에서 부담을 확 줄여  
준다.

$$2 - m = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \{(-1, 2 - m) \text{을 } y = 2^x \text{에 대입}\}$$

$$m = \frac{3}{2} \quad \{\text{정리}\}$$

물론  $y = 2^x + m$ 에 바로 대입해  $\frac{1}{2} + m = 2$ 로 풀어도 같다.

4. 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2   ② -1   ③ 0   ④ 1   ⑤ 2

정답 : ④

문제를 읽으니 그래프가 주어진 함수  $f$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 를 구하라고 한다.

극한값은 접근하는 방향에서 그래프가 향해 가는  $y$ 값이다. 그 점에서의 함수값(채워진 점)과 헷갈리지 않는 것이 전부다.

$x \rightarrow 0^-$ 는 왼쪽에서,  $x \rightarrow 1^+$ 는 오른쪽에서 접근한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \quad \{\text{왼쪽에서 접근할 때 향하는 } y\text{값}\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \{\text{오른쪽에서 접근할 때 향하는 } y\text{값}\}$$

$$\therefore 2 - 1 = 1$$

5.  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인  $\theta$ 에 대하여  $\sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}$ 일 때,

$\sin \theta - \cos \theta$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{4}{5}$    ② 1   ③  $\frac{6}{5}$    ④  $\frac{7}{5}$    ⑤  $\frac{8}{5}$

정답 : ④

문제를 읽으니  $\theta$ 는 제2사분면 각이고  $\sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}$ 다.

구하는 것은  $\sin \theta - \cos \theta$ .

사분면은 애초에  $(x, y)$ 의 부호로 나눈 것이다. 제2사분면이면  $\sin \theta = y > 0$ ,  $\cos \theta = x < 0$ 이고, 곱이 음수인 이유가 정의에서 바로 읽힌다. 구하는 식은 제곱하면  $1 - 2 \sin \theta \cos \theta$ 로 주어진 곱과 연결된다.

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25} \quad \{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1\}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5} \quad \{(\text{양}) - (\text{음}) > 0\}$$

근호를 벗길 때  $\pm$  판정을 부호 근거로 확정하는 습관. 이 문제에서는 간과해도 안 틀렸지만, 이 지점을 간깐하게 묻는 문제가 언제든 나올 수 있다.

6. 다항함수  $f(x)$ 가

$$f'(x) = 3x^2 - kx + 1, \quad f(0) = f(2) = 1$$

을 만족시킬 때, 상수  $k$ 의 값은? [3점]

- ① 5   ② 6   ③ 7   ④ 8   ⑤ 9

정답 : ①

문제를 읽으니  $f'(x) = 3x^2 - kx + 1$ 이고  $f(0) = f(2) = 1$ 이다. 구하는 것은  $k$ .

$f(0) = f(2)$ 를 “0에서 2까지 순간 변화를 누적했더니 변화가

없다”로 읽는다. 즉  $\int_0^2 f'(x)dx = f(2) - f(0) = 0$ .

부정적분으로  $f$ 를 복원할 필요 없이 도함수의 정적분 하나로 끝난다. 쉬운 문제에서 이 관점을 연습해 뒀야 어려운 문제(이 시험 14번 ㄷ)에서도 보인다.

$$\int_0^2 (3x^2 - kx + 1)dx = 8 - 2k + 2 = 0 \quad \{f(2) - f(0) = 0\}$$

$$k = 5 \quad \{\text{정리}\}$$

7. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & (x < a) \\ x + 3 & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수  $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수  $a$ 의 값은? [3점]

- ① -1   ②  $-\frac{1}{2}$    ③ 0   ④  $\frac{1}{2}$    ⑤ 1

정답 : ④

문제를 읽으니  $f$ 는  $x = a$ 를 경계로  $x - 4$ 에서  $x + 3$ 으로 갈아타는 조각 함수이고,  $|f(x)|$ 가 실수 전체에서 연속이다.

구하는 것은  $a$ .

연속 조건은  $|f|$ 에 준 것이지  $f$ 에 준 것이 아니다.  $f$  자체는 끊겨도 된다. 그런데  $x - 4$ 와  $x + 3$ 은 항상 7 차이이라 어떤  $x$ 에서도 같을 수 없다. 절댓값이 같아지려면 두 값의 부호가 엇갈린 채 크기가 맞아야 한다는 통찰이 있으면 빠르고, 안 보이면  $y = |x - 4|$ 와  $y = |x + 3|$ 을 각각 그려 교점을 찾는 것이 현실적이다. 기울기  $\pm 1$ 의 두 V자 그래프는 -3과 4의 중점에서 만난다.

$x = a$ 에서 이어지려면  $|a - 4| = |a + 3|$ :

$$-(a - 4) = a + 3 \quad \{a - 4 < 0, a + 3 > 0 \text{으로 부호 엇갈림}\}$$

$$a = \frac{1}{2} \quad \{-3 \text{과 } 4 \text{의 중점}\}$$

8. 함수  $y = 6 \sin \frac{\pi}{12}x$  ( $0 \leq x \leq 12$ )의 그래프와 직선  $y = 3$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① 6   ② 7   ③ 8   ④ 9   ⑤ 10

정답 : ③

문제를 읽으니  $y = 6 \sin \frac{\pi}{12}x$  ( $0 \leq x \leq 12$ )와 직선  $y = 3$ 의 두 교점 A, B 사이의 거리를 구하라고 한다.

주기 공식  $\frac{2\pi}{|a|}$ 를 외워 쓰기보다 사인 안의 각도값을 추적한다.

$x = 12$ 를 넣으면 각도가  $\pi$ , 즉 반주기다. 그러니 이 구간에는 산 하나(윗부분)만 그려지고, 최대 6은 사분주기인  $x = 6$ 에서다.

$y = 3$ 은  $\sin = \frac{1}{2}$ , 즉 각도  $\frac{\pi}{6}$ 인 지점이다. 각도값만 매칭하면

어떤 변형 함수든 원래 사인 그래프 하나로 처리된다. 대칭이므로 한 교점이  $x = a$ 면 다른 하나는  $x = 12 - a$ 다.

$$\frac{\pi}{12}a = \frac{\pi}{6}, \quad a = 2 \quad \{\sin \text{ 값 } \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{각도 } \frac{\pi}{6}\}$$

$$\overline{AB} = (12 - a) - a = 12 - 4 = 8 \quad \{x = 6 \text{ 대칭}\}$$

9. 원점을 지나고 곡선  $y = -x^3 - x^2 + x$ 에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은? [4점]

① 2   ②  $\frac{9}{4}$    ③  $\frac{5}{2}$    ④  $\frac{11}{4}$    ⑤ 3

정답 : ②

문제를 읽으니 주인공은 곡선  $y = -x^3 - x^2 + x$ 이다. 상황은 원점을 지나면서 곡선에 접하는 직선들이 있고, 구하는 것은 모든 접선의 기울기의 합이다.

접점  $(t, f(t))$ 에서의 접선이 원점을 지나면  $0 = -tf'(t) + f(t)$ , 즉  $f(t) = tf'(t)$ 이다. 곡선이 이미 원점을 지나므로  $t = 0$ 이

하나의 케이스이고, 나머지는 위 조건으로 구한다.

같은 식을 기울기로도 읽을 수 있다. 접점  $(t, f(t))$ 와 원점을 잇는

직선의 기울기  $\frac{f(t)}{t}$ 가 접선 기울기  $f'(t)$ 와 같다는 뜻이다. 원점을

지나는 접선은 2019-2021학년도 나형 킬러에서 반복된 주제다.

$y' = -3x^2 - 2x + 1$ 이다. 접선 정리 후  $y$  절편을 0으로 놓으면

$$2t^3 + t^2 = 0 \quad \{\text{원점 통과 조건}\}$$

$$t^2(2t + 1) = 0 \quad \{\text{인수분해}\}$$

$$t = 0, -\frac{1}{2} \quad \{\text{해}\}$$

$$\text{기울기: } f'(0) = 1, f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} + 1 + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \text{기울기의 합은 } 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$

10.  $\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2}$ 인 양수  $a$ 에 대하여  $\frac{1}{3} + \log \sqrt{a}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든  $a$ 의 값의 곱은? [4점]

①  $10^{10}$    ②  $10^{11}$    ③  $10^{12}$    ④  $10^{13}$    ⑤  $10^{14}$

정답 : ①

문제를 읽으니 주인공은 양수  $a$ 이다. 상황은  $\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2}$

이고  $\frac{1}{3} + \log \sqrt{a}$ 가 자연수이다. 구하는 것은 조건을 만족시키는

모든  $a$ 의 곱이다.

“자연수가 된다”는 무한 개의 등식  $= 1, = 2, = 3, \dots$  중에서 성립

가능한 것만 걸러내라는 뜻이다.  $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$ 이므로

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log a = k$  (자연수)로 놓고, 아는 것( $\log a$ 의 범위)에 같은

조작( $\times \frac{1}{2}, + \frac{1}{3}$ )을 가해  $k$ 의 범위를 만들면 가능한  $k$ 가 걸러진다.

$$\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \log a < \frac{11}{4} \quad \left\{ \text{양변 } \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$\frac{7}{12} < k < \frac{37}{12} \quad \left\{ k = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log a \right\}$$

따라서  $k = 1, 2, 3$ 이다.

$$k = 1: \log a = \frac{4}{3}, \quad a = 10^{\frac{4}{3}}$$

$$k = 2: \log a = \frac{10}{3}, \quad a = 10^{\frac{10}{3}}$$

$$k = 3: \log a = \frac{16}{3}, \quad a = 10^{\frac{16}{3}}$$

지수가  $\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, \frac{16}{3}$ 으로 공차 2인 등차수열이므로, 곱의 지수는  $\frac{30}{3} = 10$ 이다.

$$\therefore 10^{\frac{4}{3}} \times 10^{\frac{10}{3}} \times 10^{\frac{16}{3}} = 10^{10}$$

**11.** 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식  $f(x) = 9$ 는 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0) = 1, f'(2) = -2$ 일 때,  $f(3)$ 의 값은? [4점]

① 6   ② 7   ③ 8   ④ 9   ⑤ 10

**정답 : ②**

문제를 읽으니 주인공은 삼차함수  $f(x)$ 이다. 상황은  $f(x) = 9$ 의 세 실근이 등비수열이고,  $f(0) = 1, f'(2) = -2$ 이다. 구하는 것은  $f(3)$ 이다.

계산량보다 계산 설계가 주제인 문제다. 맞아도 출혈이 크기 쉬우니 시작 전에 한 발짝 떨어져 설계한다. 등비수열의 세 근을 알고 있는 항 기준으로 설정하면 계산이 간결해진다.  $f(0)$ 에서 세 근의 곱이 나오고, 등비중항 성질  $a_1 a_2 a_3 = a_2^3$ 이므로  $a_2$ 를 먼저 구한다. 이후  $f'(2)$ 로 공비  $r$ 을 결정하는데,  $(x-2)|_{x=2} = 0$ 이므로 곱미분 시 나머지 두 인수만 남는다는 점을 이용하면 계산이 줄어든다.

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) + 9 \text{이다.}$$

$$f(0) = -a_1 a_2 a_3 + 9 = 1 \quad \{a_1 a_2 a_3 = 8\}$$

$$a_2^3 = 8, \quad a_2 = 2 \quad \{\text{등비중항 성질}\}$$

세 근을  $\frac{2}{r}, 2, 2r$ 로 놓으면

$$f'(2) = \left(2 - \frac{2}{r}\right)(2 - 2r) = -2 \quad \{(x-2)|_{x=2} = 0\}$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0 \quad \{\text{정리}\}$$

$$r = 2, \frac{1}{2} \quad \{\text{세 근: } 1, 2, 4\}$$

$$\therefore f(3) = (3-1)(3-2)(3-4) + 9 = -2 + 9 = 7$$

**12.**  $0 < a < b$ 인 모든 실수  $a, b$ 에 대하여

$$\int_a^b (x^3 - 3x + k) dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수  $k$ 의 최솟값은? [4점]

① 1   ② 2   ③ 3   ④ 4   ⑤ 5

**정답 : ②**

문제를 읽으니 주인공은 피적분함수  $f(x) = x^3 - 3x + k$ 이다.

상황은  $0 < a < b$ 인 모든  $a, b$ 에 대해  $\int_a^b f(x) dx > 0$ 이고,

구하는 것은  $k$ 의 최솟값이다.

모든 양의 실수  $a < b$ 에 대해 적분값이 양수이면, 구간을 아무리 좁게 잡아도 적분값이 양수여야 하므로  $x > 0$ 에서  $f(x) \geq 0$ 이어야 한다. 단 한 구간에서라도  $f < 0$ 이면 조건 위배이다. 항상 양인 확률밀도함수의 구간적분이 항상 양인 것과 같은 감각이고,  $f$ 는 삼차 다항함수이므로 0이 구간째로 나오는 일은 없다. 부정적분 관점으로 보면  $F(b) > F(a)$ 이므로  $F$ 는 증가함수, 즉  $F'(x) = f(x) \geq 0$ 이다. 직관파는 앞, 논리파는 뒤. 어느 쪽으로 보아도 결론은 같다.

쟁점은  $x > 0$ 에서  $f(x)$ 의 최솟값이 0 이상이 되는  $k$ 를 구하는 것이다.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \quad \{x=1 \text{에서 극소}\}$$

$x > 0$ 에서 최솟값은  $f(1) = 1 - 3 + k = k - 2$ 이다.

$$k - 2 \geq 0 \quad \{\text{최솟값} \geq 0\}$$

$$k \geq 2 \quad \{\text{정리}\}$$

$\therefore k$ 의 최솟값은 2

**13.** 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자. 다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

이 성립할 때,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ 을 구하는 과정이다.

$n = 1$ 일 때  $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$ 이므로  $\frac{1}{a_1} = 2$ 이다.

$n = 2$ 일 때  $a_2 = S_2 - S_1 = -\frac{7}{6}$ 이므로  $\sum_{k=1}^2 \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7}$

이다.

$n \geq 3$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\frac{S_n}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k!} = -\frac{(가)}{(n+1)!}$$

즉,  $S_n = -\frac{(가)}{n+1}$  이므로

$$a_n = S_n - S_{n-1} = -\left(\frac{(나)}{n}\right)$$

이다. 한편  $\sum_{k=3}^n k(k+1) = -8 + \sum_{k=1}^n k(k+1)$  이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \frac{8}{7} - \sum_{k=3}^n k(k+1) \\ &= \frac{64}{7} - \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{(다)}{k} \\ &= -\frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{64}{7} \end{aligned}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각  $f(n)$ ,  $g(n)$ ,  $h(k)$ 라 할 때,  $f(5) \times g(3) \times h(6)$ 의 값은? [4점]

① 3   ② 6   ③ 9   ④ 12   ⑤ 15

**정답 : ⑤**

문제를 읽으니 빈칸 채우기(서술형) 문제이다. 주인공은 수열

$\{a_n\}$ 과 부분합  $S_n$ 이다. 상황은  $\sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$ 이 성립하고

빈칸 (가), (나), (다)를 채우는 것이다.

미리 다 분석하려 하지 말고 문제의 유도를 따른다. (가)는

$\sum_{k=1}^n - \sum_{k=1}^{n-1}$ 의 차를 통분하면 나오고, (나)는  $a_n = S_n - S_{n-1}$ 으로

구한다. (다)는 급수 전개를 비교하면 된다.

(가): 인접한 두 식의 차를 계산하면

$$\frac{S_n}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-(n+1)}{(n+1)!} = -\frac{n}{(n+1)!} \quad \{\text{통분}\}$$

따라서  $f(n) = n$ ,  $f(5) = 5$ 이다.

(나):  $S_n = -\frac{n}{n+1}$ 이므로

$$a_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} \quad \{\text{통분}\}$$

따라서  $g(n) = \frac{1}{n(n+1)}$ ,  $g(3) = \frac{1}{12}$ 이다.

(다): 의도된 길은 근거가 바로 윗줄에 다 적혀 있다. “한편” 식

$$\sum_{k=3}^n k(k+1) = -8 + \sum_{k=1}^n k(k+1) \text{이 } -8 \text{ 보정과 } k=3 \rightarrow k=1$$

전환을 미리 알려 주고 있고, 실제로  $\frac{8}{7} + 8 = \frac{64}{7}$ 로 상수가

맞아떨어진다.  $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum k^2 + \sum k$ 에서

$\sum k = \frac{n(n+1)}{2}$ 는 이미 밖으로 빠져 있으므로 남는 것은

$h(k) = k^2$ ,  $h(6) = 36$ 이다.

안 보이면 억지로라도 답을 낸다: 맨 아랫줄 삼차식과 등식으로

놓고  $\sum_{k=1}^n h(k)$ 를 역산하면  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , 즉 제곱의 합

공식이 나온다. 시험장에서는 이렇게라도 점수를 확보하는 것이 먼저다.

$$\therefore f(5) \times g(3) \times h(6) = 5 \times \frac{1}{12} \times 36 = 15$$

**14.** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 가속도가

$$a(t) = 3t^2 - 12t + 9 \quad (t \geq 0)$$

이고, 시각  $t=0$ 에서의 속도가  $k$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

**보기**

ㄱ. 구간  $(3, \infty)$ 에서 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ.  $k = -4$ 이면 구간  $(0, \infty)$ 에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄷ. 시각  $t=0$ 에서 시각  $t=5$ 까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는  $k$ 의 최솟값은 0이다.

① ㄱ   ② ㄴ   ③ ㄱ, ㄴ   ④ ㄱ, ㄷ   ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**정답 : ④**

문제를 읽으니 주인공은 점 P이다. 상황은 가속도

$a(t) = 3t^2 - 12t + 9$ 이고  $v(0) = k$ 이다. 구하는 것은 ㄱㄴㄷ

보기 판정이다.

$a(t) = 3(t-1)(t-3)$ 이므로  $v(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + k$ 이다.

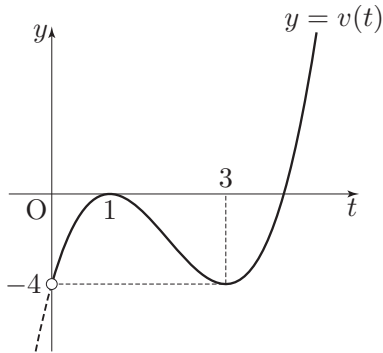
삼차함수이므로  $t=1$ 에서 극대,  $t=3$ 에서 극소이고,  $k$ 에 따라 상하로 평행이동한다. 각 보기에서  $v(t)$ 의 부호 변화가 핵심이다.

속도·가속도 문제는 미리 다 해석하지 말고 보기가 시키는 것만 따라간다. ㄱ의 “속도 증가”는  $v' = a \geq 0$ , ㄴ의 “운동 방향”은  $v$ 의 부호로 번역하고, ㄷ의 “위치의 변화량 = 움직인 거리”는 6번

$(f(0) = f(2) \Leftrightarrow \int f' = 0)$ ·12번(피적분함수의 부호)과 같은

결이다. 결국 부호가 쟁점이다.

- ㄱ.  $t > 3$ 에서  $a(t) = 3(t-1)(t-3) > 0$ 이므로 속도 증가. (참)  
 ㄴ.  $k = -4$ 일 때  $v(1) = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$  (극댓값),  
 $v(3) = 27 - 54 + 27 - 4 = -4$  (극솟값).



극댓값이 0이므로  $v(t) \leq 0$  ( $t \leq 1$ )이고  $t = 1$ 에서 부호가 바뀌지 않는다.  $v(4) = 64 - 96 + 36 - 4 = 0$ 에서 부호가 한 번만 바뀌므로 운동 방향도 한 번만 바뀐다. (거짓)

- ㄷ. 위치 변화량  $= \int_0^5 v dt$ , 이동 거리  $= \int_0^5 |v| dt$ . 두 값이 같으려면  $(0, 5)$ 에서  $v(t) \geq 0$ 이어야 한다.  
 $v(0) = k$ ,  $v(3) = k$ 이므로 구간 최솟값은  $v(3) = k$ 이다.  
 $k \geq 0$ 이면 조건 만족. (참)

∴ ㄱ, ㄷ

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^{100} a_k$ 의 최댓값과 최솟값을 각각  $M$ ,  $m$ 이라 할 때,

$M - m$ 의 값은? [4점]

(가)  $a_5 = 5$

(나) 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

- ① 64   ② 68   ③ 72   ④ 76   ⑤ 80

정답 : ③

문제를 읽으니 주인공은 수열  $\{a_n\}$ 이다. 상황은  $a_5 = 5$ 이고

조건부 점화식이 주어졌다. 구하는 것은  $\sum_{k=1}^{100} a_k$ 의 최댓값과

최솟값의 차  $M - m$ 이다.

$a_5 = 5$  이후를 먼저 조사하면  $5 \rightarrow -1 \rightarrow 5 \rightarrow -1 \rightarrow \dots$  주기 2

로 순환한다. 따라서  $\sum_{k=5}^{100} a_k$ 는 일정하고,  $M - m$ 은  $\sum_{k=1}^4 a_k$ 의

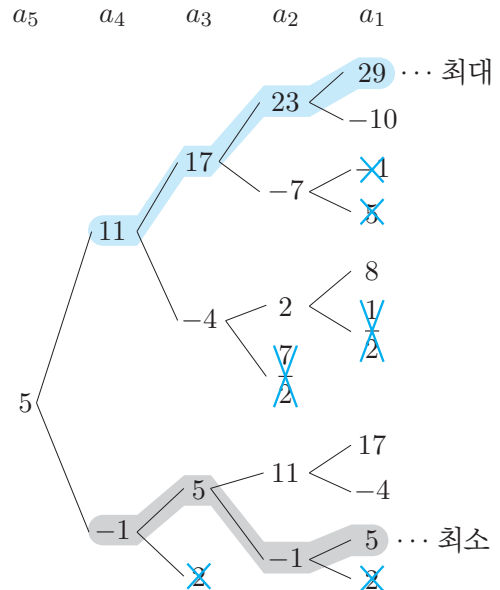
최대/최소 차이에만 의존한다.

역추적으로  $a_1 \sim a_4$ 를 구한다. 양수 규칙은  $+6$ 을 반복 적용하여 값이 커지고, 음수 규칙을 두 번 연속 쓸 수 없으므로 번갈아가며 순환하는 경우가 최소이다.

순방향:  $a_5 = 5 \rightarrow a_6 = -1 \rightarrow a_7 = 5 \rightarrow \dots$  (주기 2)

역방향:  $a_5 = 5$ 를 만드는  $a_4$ 는 11 ( $a_4 - 6 = 5$ ) 또는  $-1$

( $-2a_4 + 3 = 5$ )이다. 이 과정을  $a_1$ 까지 반복하면 트리 구조로 분기한다.



최댓값 경로: 29, 23, 17, 11 (매번  $+6$  역추적)  $\Rightarrow \sum_{k=1}^4 a_k = 80$

최솟값 경로: 순환 5,  $-1$ , 5,  $-1 \Rightarrow \sum_{k=1}^4 a_k = 8$

참고로 두 규칙을 직선  $y = x - 6$ ,  $y = -2x + 3$ 으로 보고  $y = x$ 를 매개로 반복 합성하면,  $5 \rightarrow -1 \rightarrow 5$  순환이 두 직선 사이를 도는 그림으로 설명된다.

∴  $M - m = 80 - 8 = 72$

16. 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_3 = 7$ ,  $a_2 + a_5 = 16$ 일 때,  $a_{10}$ 의 값을 구하시오. [3점]

정답 : 21

문제를 읽으니 등차수열에서  $a_3 = 7$ ,  $a_2 + a_5 = 16$ 이고, 구하는 것은  $a_{10}$ 이다.

연립방정식을 세우기 전에 한 번 바라본다.  $2 + 5 = 3 + 4$ 이므로  $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$ . 등차수열에서 첨자 합이 같으면 항의 합이 같으므로  $a_4 = 16 - 7 = 9$ 가 계산 없이 보인다.

$$a_4 = 16 - a_3 = 9 \quad \{a_2 + a_5 = a_3 + a_4\}$$

$$d = a_4 - a_3 = 2 \quad \{\text{공차}\}$$

$$a_{10} = a_4 + 6d = 9 + 12 = 21 \quad \{a_4 \text{ 기준으로 6칸}\}$$

**17.** 미분가능한 함수  $f(x)$ 가  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = 4$ 를 만족시킬 때, 함수  $g(x) = (x+1)f(x)$ 의  $x=1$ 에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

**정답 : 10**

문제를 읽으니 주인공은 함수  $f(x)$ 이다. 상황은  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = 4$ 이고, 구하는 것은  $g(x) = (x+1)f(x)$ 의  $x=1$ 에서의 미분계수이다.

$g(x) = (x+1)f(x)$ 는 두 함수의 곱이므로 곱의 미분법  $(uv)' = u'v + uv'$ 를 적용한다.

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x) + (x+1)f'(x) & \{(uv)' = u'v + uv'\} \\ g'(1) &= f(1) + 2f'(1) & \{x=1 \text{ 대입}\} \\ &= 2 + 2 \cdot 4 = 10 & \{\text{계산}\} \end{aligned}$$

**18.** 두 양수  $x, y$ 가

$$\log_2(x+2y) = 3, \quad \log_2 x + \log_2 y = 1$$

을 만족시킬 때,  $x^2 + 4y^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

**정답 : 56**

문제를 읽으니 주인공은 두 양수  $x, y$ 이다. 상황은 로그 조건  $\log_2(x+2y) = 3$ ,  $\log_2 x + \log_2 y = 1$ 이고, 구하는 것은  $x^2 + 4y^2$ 이다.

로그 조건을 지수 형태로 변환하면  $x+2y = 8$ ,  $xy = 2$ 이다.

$(x+2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$ 이므로  $4xy$ 를 빼면 원하는 식이 된다.

$$\begin{aligned} x+2y &= 8, \quad xy = 2 & \{\text{조건 변환}\} \\ (x+2y)^2 &= x^2 + 4xy + 4y^2 & \{\text{전개}\} \\ 64 &= x^2 + 4y^2 + 8 & \{\text{대입}\} \\ x^2 + 4y^2 &= 56 & \{\text{정리}\} \end{aligned}$$

**19.** 실수  $k$ 에 대하여 함수  $f(x) = x^4 + kx + 10$ 이  $x=1$ 에서 극값을 가질 때,  $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

**정답 : 7**

문제를 읽으니 주인공은 함수  $f(x) = x^4 + kx + 10$ 이다. 상황은  $x=1$ 에서 극값을 가지고, 구하는 것은  $f(1)$ 이다.

극값을 가지는 점에서  $f' = 0$ 이다.  $f'(1) = 0$ 으로  $k$ 를 구한 뒤  $f(1)$ 을 계산한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + k & \{\text{미분}\} \\ f'(1) &= 4 + k = 0, \quad k = -4 & \{\text{극값 조건}\} \\ f(1) &= 1 - 4 + 10 = 7 & \{\text{계산}\} \end{aligned}$$

**20.** 공차가 정수인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 + a_5 = 0, \quad \sum_{k=1}^6 (|a_k| + a_k) = 30$$

일 때,  $a_9$ 의 값을 구하시오. [4점]

**정답 : 25**

문제를 읽으니 주인공은 등차수열  $\{a_n\}$ 이다. 상황은  $a_3 + a_5 = 0$ ,

$\sum_{k=1}^6 (|a_k| + a_k) = 30$ , 공차가 정수이고, 구하는 것은  $a_9$ 이다.

$a_3 + a_5 = 2a_4 = 0$ 이므로  $a_4 = 0$ 이다.  $|a_k| + a_k$ 의 성질:

$a_k \geq 0$ 이면  $2a_k$ ,  $a_k < 0$ 이면 0이다. 따라서 양수인 항만 두 배하여 합산하면 된다.

공차가 정수라는 조건이 주어졌으므로,  $d > 0$ 과  $d < 0$  양쪽을 조사한 뒤 정수 조건이 위배되는 경우를 예측하고 배제한다.

양자택일은 어느 쪽을 먼저 잡아도 좋다. 되면 끝이고, 안 되면 남은 쪽이 답이므로 늘 나에게 유리한 상황이다.

$d > 0$ 인 경우:  $a_1, a_2, a_3 < 0$ ,  $a_4 = 0$ ,  $a_5, a_6 > 0$

$$\sum_{k=1}^6 (|a_k| + a_k) = 2(a_5 + a_6) = 2(d + 2d) = 6d = 30 \quad \{d = 5\}$$

$d < 0$ 인 경우:  $a_1, a_2, a_3 > 0$ 이므로

$$2(a_1 + a_2 + a_3) = -12d = 30 \implies d = -\frac{5}{2} \quad \{\text{정수 아님, 배제}\}$$

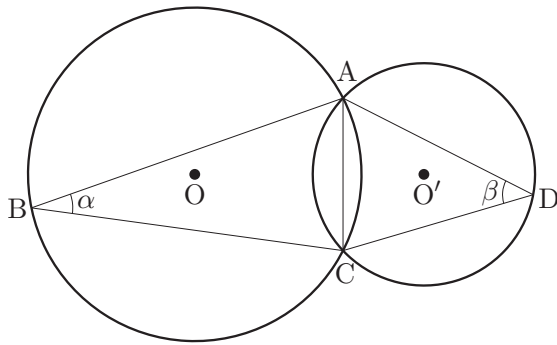
따라서  $d = 5$ ,  $a_4 = 0$ 이므로  $a_1 = -15$ 이다.

$$\therefore a_9 = a_1 + 8d = -15 + 40 = 25$$

21. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O'이라 하고,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle ADC = \beta$ 라 할 때,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}, \quad \overline{OO'} = 1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가  $\frac{q}{p}\pi$ 일 때,  $p + q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



정답 : 26

문제를 읽으니 주인공은 두 삼각형 ABC, ACD이다. 상황은  $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$ ,  $\overline{OO'} = 1$ 이고, 구하는 것은 삼각형 ABC의 외접원 넓이다.

구하는 것이 외접원 넓이  $\pi R^2$ 이므로 목표를  $R^2$  하나로 좁힌다.

$\overline{AC}$ 는 두 삼각형의 공통변이므로 각 외접원의 사인법칙으로

연결된다.  $\overline{AC} = 2R \sin \alpha = 2r \sin \beta$ 에서  $\frac{R}{r} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}$

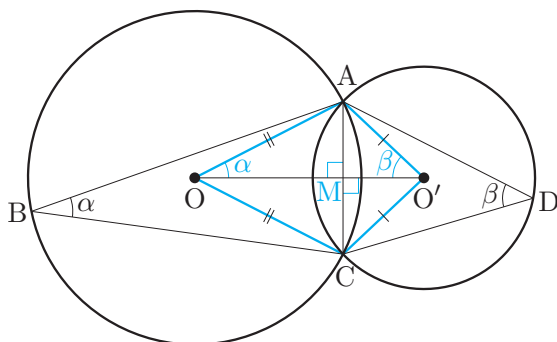
이므로  $R = 3k$ ,  $r = 2k$ 로 설정한다.

$\cos(\alpha + \beta)$  조건이 불편한 이유는  $\alpha$ ,  $\beta$  각각을 아직 모르기

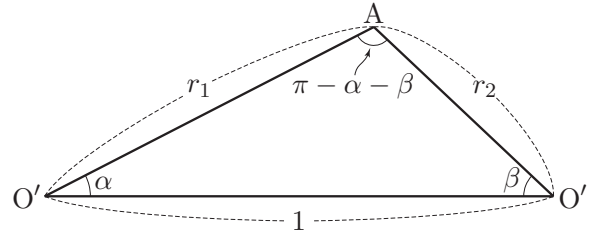
때문이다.  $\alpha$ 가 등장하는 도형만 떼어 새로 그리면 원주각  $\alpha \rightarrow$  중심각  $2\alpha \rightarrow$  반지름 이등변삼각형이 보인다( $\beta$  쪽도 마찬가지).

그렇게 두 외심 O, O'와 점 A를 잇는 삼각형 OO'A에서

$\angle OAO' = \pi - (\alpha + \beta)$ 가 되고, 여기에 코사인법칙을 적용하면  $k$ 를 구할 수 있다. 덧셈정리 없이 풀리도록 설계된 문제다.



사인법칙에서  $R \sin \alpha = r \sin \beta$ 이므로  $R = 3k$ ,  $r = 2k$ 이다.



삼각형 OO'A에서  $\overline{OA} = 3k$ ,  $\overline{O'A} = 2k$ ,  $\overline{OO'} = 1$ 이고 끼인각이  $\pi - (\alpha + \beta)$ 이다.

$$1 = 9k^2 + 4k^2 - 12k^2 \cos(\pi - \alpha - \beta)$$

$$= 13k^2 + 12k^2 \cdot \frac{1}{3} = 17k^2 \quad \left\{ \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\frac{1}{3} \right\}$$

$$k^2 = \frac{1}{17} \quad \{정리\}$$

외접원 넓이  $= \pi R^2 = 9\pi k^2 = \frac{9\pi}{17}$ 이므로  $p = 17$ ,  $q = 9$ 이다.

$\therefore p + q = 26$

22. 함수

$$f(x) = x^3 - 3px^2 + q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수  $p$ ,  $q$ 의 모든 순서쌍  $(p, q)$ 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 함수  $|f(x)|$ 가  $x = a$ 에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수  $a$ 의 개수는 5이다.
- (나) 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 함수  $|f(x)|$ 의 최댓값과 닫힌구간  $[-2, 2]$ 에서 함수  $|f(x)|$ 의 최댓값은 같다.

정답 : 14

문제를 읽으니 주인공은 함수  $f(x) = x^3 - 3px^2 + q$ 이다. 상황은

(가)  $|f(x)|$ 가 5개 점에서 극값, (나)  $[-1, 1]$ 과  $[-2, 2]$ 에서  $|f(x)|$  최댓값이 같다. 구하는 것은 25 이하 자연수  $(p, q)$  순서쌍의 개수이다.

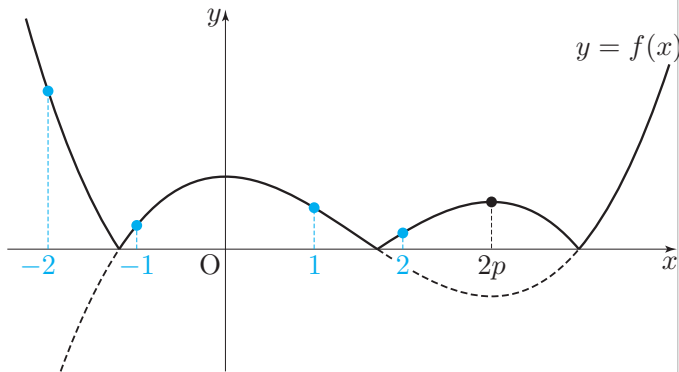
$f'(x) = 3x(x - 2p)$ 이므로  $x = 0$ 에서 극대 ( $f(0) = q$ ),  $x = 2p$ 에서 극소 ( $f(2p) = q - 4p^3$ )이다.

(가) 조건:  $|f(x)|$ 의 극점이 5개하려면 원래  $f$ 의 극점 2개에 더해  $x$ 축과 만나는 점에서 3개의 표족한 극점이 생겨야 한다. 이를 위해  $x$ 축이 극대와 극소 사이를 지나야 한다. 즉  $q > 0$ 이고  $q - 4p^3 < 0$ .

(나) 조건: 두 구간의 최댓값 후보를 나열해 보면  $M_1 = M_2$ 가 성립하는 길은 결국 양쪽 다  $f(0) = q$ 가 최대인 경우뿐이다.

극대·극소 사이에  $x$ 축이 있는 상황에서 구간 안의 값들 중 가장 아래는  $f(-2)$ 이므로 ( $f(-2) < f(-1)$ ,  $f(-2) < f(2)$ ) 경쟁자는  $|f(-2)|$  하나만 따지면 된다:  $|f(-2)| \leq q$ . 그래프로 보면  $x$ 축이

$f(0)$ 과  $f(-2)$  차이의 정중앙을 지나는 순간이 경계이고, 그보다 아래로 내려갈 때만 성립한다.



(가) 조건 정리:  $0 < q < 4p^3$

(나) 조건 정리:  $f(-2) = -8 - 12p + q < 0$ 이므로

$$|f(-2)| = 8 + 12p - q \leq q \quad \{|f(-2)| \leq f(0)\}$$

$$q \geq 6p + 4 \quad \{\text{정리}\}$$

$6p + 4 \leq q \leq 25$ 이고  $q < 4p^3$ 을 만족시키는 순서쌍:

- $p = 1$ :  $10 \leq q < 4 \Rightarrow$  불가능
- $p = 2$ :  $16 \leq q \leq 25, q < 32 \Rightarrow 10$ 개
- $p = 3$ :  $22 \leq q \leq 25, q < 108 \Rightarrow 4$ 개
- $p \geq 4$ :  $6p + 4 \geq 28 > 25 \Rightarrow$  불가능

$\therefore$  순서쌍의 개수는  $10 + 4 = 14$

## 확률과 통계

### 정답과 해설

|          |            |           |          |          |
|----------|------------|-----------|----------|----------|
| 23번<br>① | 24번<br>⑤   | 25번<br>②  | 26번<br>④ | 27번<br>⑤ |
| 28번<br>③ | 29번<br>332 | 30번<br>71 |          |          |

**23.** 확률변수  $X$ 가 이항분포  $B\left(80, \frac{1}{8}\right)$ 을 따를 때,  $E(X)$ 의 값은? [2점]

① 10   ② 12   ③ 14   ④ 16   ⑤ 18

**정답 : ①**

문제를 읽으니  $X \sim B\left(80, \frac{1}{8}\right)$ 이고, 구하는 것은  $E(X)$ 다.

이항분포는 같은 시행 80번의 성공 횟수다. 각 시행이 평균  $\frac{1}{8}$ 씩 기여하니 기댓값은  $np$ . 공식을 암기가 아니라 기댓값의 선형성으로 읽어 두면 흔들리지 않는다.

$$E(X) = 80 \times \frac{1}{8} = 10 \quad \{E(X) = np\}$$

**24.**  $\left(x^5 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 의 전개식에서  $x^2$ 의 계수는? [3점]

① 3   ② 6   ③ 9   ④ 12   ⑤ 15

**정답 : ⑤**

문제를 읽으니  $\left(x^5 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 의 전개식에서  $x^2$ 의 계수를 구하라고 한다.

일반항의 지수를 먼저 식으로 만들어 놓고, 목표 지수 2가 되는  $r$ 을 역으로 찾는다.  $(x^5)^{6-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$ 의 지수는  $30 - 7r$ .

$$30 - 7r = 2, \quad r = 4 \quad \{\text{목표 지수에서 역산}\}$$

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15 \quad \{\text{계수}\}$$

**25.** 두 사건  $A, B$ 에 대하여  $A^C$ 과  $B$ 는 서로 배반사건이고,

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B^C) = \frac{2}{7}$$

일 때,  $P(B)$ 의 값은? (단,  $A^C$ 은  $A$ 의 여사건이다.) [3점]

①  $\frac{5}{28}$    ②  $\frac{3}{14}$    ③  $\frac{1}{4}$    ④  $\frac{2}{7}$    ⑤  $\frac{9}{28}$

**정답 : ②**

문제를 읽으니  $A^C$ 과  $B$ 가 배반이고  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cap B^C) = \frac{2}{7}$ 다. 구하는 것은  $P(B)$ .

말로 된 조건을 그림으로 번역하는 것이 전부다. “ $A^C$ 과  $B$ 가 배반”은  $B$ 가  $A$  밖으로 한 발도 못 나간다는 뜻, 즉  $B \subset A$ 다. 그러면  $A$ 는  $A \cap B$ 와  $A \cap B^C$ 로 쪼개진다.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) & \{B \subset A\} \\ &= P(A) - P(A \cap B^C) & \{A \text{의 분할}\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{7} = \frac{3}{14} & \{\text{대입}\} \end{aligned}$$

**26.** 확률변수  $X$ 가 정규분포  $N(m, 10^2)$ 을 따르고  $P(X \leq 50) = 0.2119$ 일 때,  $m$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

| $z$ | $P(0 \leq Z \leq z)$ |
|-----|----------------------|
| 0.6 | 0.2257               |
| 0.7 | 0.2580               |
| 0.8 | 0.2881               |
| 0.9 | 0.3159               |

① 55   ② 56   ③ 57   ④ 58   ⑤ 59

**정답 : ④**

문제를 읽으니  $X \sim N(m, 10^2)$ 이고  $P(X \leq 50) = 0.2119$ 다. 구하는 것은  $m$ .

표준화 전에 부호부터 판정한다.  $0.2119 < 0.5$ 이므로 50은 평균  $m$ 의 왼쪽, 즉 표준화한 값은 음수다. 표에는 0.2119가 직접 없으니  $0.5 - 0.2881 = 0.2119$ 로 만들어 역조회한다.

$$P(Z \leq \frac{50-m}{10}) = 0.2119 = 0.5 - 0.2881 \quad \{\text{표 역조회: } z = 0.8\}$$

$$\frac{50-m}{10} = -0.8 \quad \{\text{왼쪽이므로 음수}\}$$

$$m = 58 \quad \{\text{정리}\}$$

**27.** 집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수  $f: X \rightarrow X$ 의 개수는? [3점]

- (가)  $f(1) + f(2) + f(3) \geq 3f(4)$   
 (나)  $k = 1, 2, 3$ 일 때  $f(k) \neq f(4)$ 이다.

① 41    ② 45    ③ 49    ④ 53    ⑤ 57

**정답 : ⑤**

문제를 읽으니  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 (가)  
 $f(1) + f(2) + f(3) \geq 3f(4)$ , (나)  $f(k) \neq f(4)$  ( $k = 1, 2, 3$ )를  
 만족시키는 함수의 개수를 구하라고 한다.  
 두 조건 모두  $f(4)$ 를 특별하게 대우하고 있으니  $f(4) = k$   
 기준으로 케이스를 나눈다. 각 케이스에서  $f(1), f(2), f(3)$ 은  $k$ 를  
 뺀 세 값에서 중복을 허용해 고르되 합이  $3k$  이상. 직접 셀지  
 여사건으로 셀지는 부등식이 널널한 쪽으로 고른다:  $k$ 가 작으면  
 거의 전부 되고,  $k$ 가 크면 거의 안 된다.

- $f(4) = 1$ :  $\{2, 3, 4\}$ 에서 합  $\geq 3$ 은 항상 성립.  $3^3 = 27$ 가지
- $f(4) = 2$ : 합  $< 6$ 은  $(1, 1, 1), (1, 1, 3) \times 3$ 의 4가지뿐.  
 $27 - 4 = 23$ 가지
- $f(4) = 3$ : 합  $\geq 9$ 는  $(4, 4, 1) \times 3, (4, 4, 2) \times 3, (4, 4, 4)$ . 7  
 가지
- $f(4) = 4$ : 최대 합  $9 < 12$ . 0가지

$\therefore 27 + 23 + 7 = 57$

**28.** 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택한 세 개의 수의 곱이 짝수일 때, 그 세 개의 수의 합이 3의 배수일 확률은? [4점]

- ①  $\frac{14}{55}$     ②  $\frac{3}{10}$     ③  $\frac{19}{55}$     ④  $\frac{43}{110}$     ⑤  $\frac{24}{55}$

**정답 : ③**

문제를 읽으니 1~10에서 서로 다른 3개를 뽑는데, “곱이 짝수일 때 합이 3의 배수일 확률”을 묻는다.  
 “~일 때”는 조건부확률이다. 분모 사건  $A$ (곱이 짝수)부터: 곱이 짝수의 여사건은 “모두 홀수” 한 덩어리다. 합이 3의 배수는 3으로 나눈 나머지  $(0, 1, 2)$ 로 분류해 세는 것이 정석이고, 분자  $n(A \cap B)$ 도 같은 분류표를 재사용해 “합이 3의 배수”에서 “모두 홀수이면서 합이 3의 배수”를 빼는 구조로 간다.  
 나머지가 0, 1, 2인 수는 각각  $\{3, 6, 9\}, \{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8\}$ 의 3, 4, 3개이고, 그중 홀수는 2, 2, 1개다.

- $n(A) = {}_{10}C_3 - {}_5C_3 = 120 - 10 = 110$  (전체 - 모두 홀수)
- $n(B)$ :  $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 1, 2)$ 에서  
 $1 + 4 + 1 + 36 = 42$

- $n(A^C \cap B)$ : 모두 홀수이면서 합이 3의 배수는  $(0, 1, 2)$ 형뿐,  $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$
- $n(A \cap B) = 42 - 4 = 38$

$$\therefore P(B|A) = \frac{38}{110} = \frac{19}{55}$$

**29.** 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c, d$ 의 모든 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가)  $a + b + c + d = 12$   
 (나)  $a \neq 2$ 이고  $a + b + c \neq 10$ 이다.

**정답 : 332**

문제를 읽으니  $a + b + c + d = 12$ 인 음이 아닌 정수 순서쌍 중  $a \neq 2$ 이고  $a + b + c \neq 10$ 인 것의 개수를 구하라고 한다.  
 “ $\neq$ ”가 두 개면 여사건 신호다. 전체에서  $a = 2$  또는  $a + b + c = 10$ 을 빼되, 겹침이 있으니 포함배제. 그리고  $a + b + c \neq 10$ 은 전체 합이 12이므로  $d \neq 2$ 와 같은 말이다.  
 이렇게 번역하면 두 조건이  $a = 2, d = 2$ 로 대칭이라 계산이 같은 꼴로 반복된다.

$$\text{전체 : } {}_4H_{12} = {}_{15}C_3 = 455 \quad \{\text{중복조합}\}$$

$$a = 2 : b + c + d = 10, {}_3H_{10} = 66 \quad \{10\text{을 세 자리에 분배}\}$$

$$d = 2 : a + b + c = 10, {}_3H_{10} = 66 \quad \{\text{대칭}\}$$

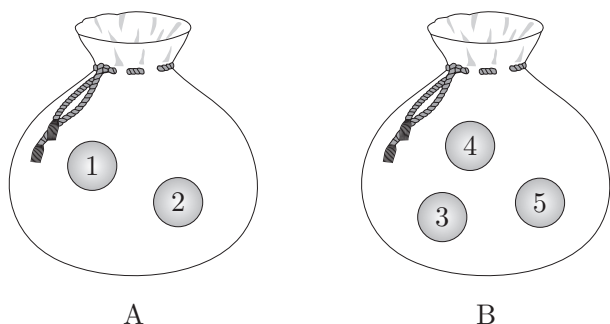
$$a = 2, d = 2 : b + c = 8, {}_2H_8 = 9 \quad \{\text{겹침}\}$$

$$\therefore 455 - (66 + 66 - 9) = 332$$

**30.** 주머니 A에는 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 2개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 다음의 시행을 3번 반복하여 확인한 세 개의 수의 평균을  $\bar{X}$ 라 하자.

두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 꺼낸 주머니에 다시 넣는다.

$P(\bar{X} = 2) = \frac{q}{p}$  일 때,  $p + q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



**정답 : 71**

문제를 읽으니 주머니 A(1, 2)·B(3, 4, 5) 중 하나를 골라 공 하나를 확인하는 시행을 3번 반복하고, 평균  $\bar{X} = 2$ 일 확률을 묻는다.

함정은 근원사건이 등확률이 아니라는 점이다. A의 공은 각각  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , B의 공은 각각  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ . 그러니 경우의 수로 세면 안 되고 확률을 곱해야 한다.  $\bar{X} = 2$ 는 세 수의 합이 6이라는 말로 번역하고, 가능한 조합을 나열한 뒤 각 조합의 배열 수를 곱한다. 합이 6인 조합은 (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)뿐이다.

$$(1, 1, 4) : 3 \times \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{32} \quad \{\text{배열 3가지}\}$$

$$(1, 2, 3) : 3! \times \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{16} \quad \{\text{배열 6가지}\}$$

$$(2, 2, 2) : \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \quad \{\text{배열 1가지}\}$$

$$P(\bar{X} = 2) = \frac{2+4+1}{64} = \frac{7}{64} \text{ 이므로 } p+q = 64+7 = 71$$

## 미적분

### 정답과 해설

|          |           |          |          |          |
|----------|-----------|----------|----------|----------|
| 23번<br>④ | 24번<br>③  | 25번<br>② | 26번<br>⑤ | 27번<br>① |
| 28번<br>③ | 29번<br>12 | 30번<br>5 |          |          |

23.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$ 의 값은? [2점]

- ① -2   ② -1   ③ 0   ④ 1   ⑤ 2

정답 : ④

문제를 읽으니 주인공은  $\sin x$ 이다. 상황은 정적분  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}$  이고,

구하는 것은 이 정적분의 값이다.

$\sin x$ 의 부정적분은  $-\cos x$ 이다. 적분 구간이 대칭이 아니므로 직접 대입한다.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx &= [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} && \{\text{부정적분}\} \\ &= -\cos \pi + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) && \{\text{대입}\} \\ &= -(-1) + 0 = 1 && \{\text{계산}\} \end{aligned}$$

24. 정수  $k$ 에 대하여 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항을

$$a_n = \left(\frac{|k|}{3} - 2\right)^n$$

이라 하자. 수열  $\{a_n\}$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수  $k$ 의 개수는? [3점]

- ① 4   ② 8   ③ 12   ④ 16   ⑤ 20

정답 : ③

문제를 읽으니 주인공은 수열  $\{a_n\} = \left\{\left(\frac{|k|}{3} - 2\right)^n\right\}$ 이다.

상황은 정수  $k$ 에 따라 공비가 결정되고, 구하는 것은 수열이 수렴하는 정수  $k$ 의 개수이다.

등비수열  $\{r^n\}$ 이 수렴하려면  $-1 < r \leq 1$ 이어야 한다.

$r = \frac{|k|}{3} - 2$ 를 대입하면  $k$ 의 범위가 나온다.

$$-1 < \frac{|k|}{3} - 2 \leq 1 \quad \{\text{수렴 조건}\}$$

$$3 < |k| \leq 9 \quad \{\text{정리}\}$$

$k \in \{-9, \dots, -4\} \cup \{4, \dots, 9\}$ 이므로 개수는 12이다.

25. 매개변수  $t$ 로 나타낸 곡선

$$x = e^t + 2t, \quad y = e^{-t} + 3t$$

에 대하여  $t = 0$ 에 대응하는 점에서의 접선이 점  $(10, a)$ 를 지날 때,  $a$ 의 값은? [3점]

- ① 6   ② 7   ③ 8   ④ 9   ⑤ 10

정답 : ②

문제를 읽으니 주인공은 매개변수 곡선  $x = e^t + 2t, y = e^{-t} + 3t$ 이다. 상황은  $t = 0$ 에서의 접선이 점  $(10, a)$ 를 지나고, 구하는 것은  $a$ 이다.

매개변수 곡선에서 접선의 기울기는  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ 이다.  $t = 0$

에서 접점과 기울기를 구한 뒤 접선의 방정식을 세운다.

$$t = 0 : (x, y) = (1, 1) \quad \{\text{접점}\}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{-1+3}{1+2} = \frac{2}{3} \quad \{\text{기울기}\}$$

$$\text{접선: } y = \frac{2}{3}(x-1) + 1$$

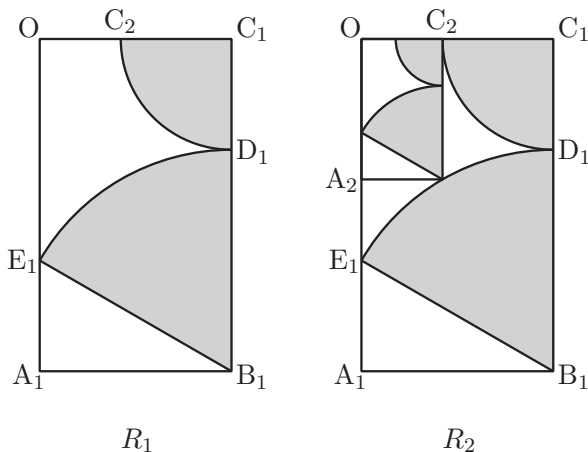
$$x = 10 \text{ 대입: } a = \frac{2}{3} \cdot 9 + 1 = 7$$

26. 그림과 같이  $\overline{OA_1} = \sqrt{3}, \overline{OC_1} = 1$ 인 직사각형

$OA_1B_1C_1$ 이 있다. 선분  $B_1C_1$  위의  $\overline{B_1D_1} = 2\overline{C_1D_1}$ 인 점  $D_1$ 에 대하여 중심이  $B_1$ 이고 반지름의 길이가  $\overline{B_1D_1}$ 인 원과 선분  $OA_1$ 의 교점을  $E_1$ , 중심이  $C_1$ 이고 반지름의 길이가  $\overline{C_1D_1}$ 인 원과 선분  $OC_1$ 의 교점을  $C_2$ 라 하자. 부채꼴  $B_1D_1E_1$ 의 내부와 부채꼴  $C_1C_2D_1$ 의 내부로 이루어진  $\nabla$ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자.

그림  $R_1$ 에서 선분  $OA_1$  위의 점  $A_2$ , 호  $D_1E_1$  위의 점  $B_2$ 와 점  $C_2$ , 점  $O$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형  $OA_2B_2C_2$ 를 그리고, 그림  $R_1$ 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형  $OA_2B_2C_2$ 에  $\nabla$ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]

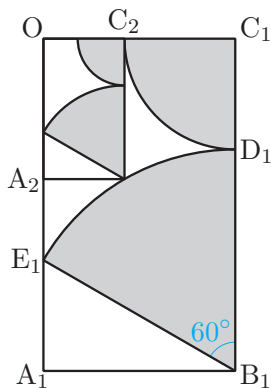


- ①  $\frac{5+2\sqrt{3}}{12}\pi$    ②  $\frac{2+\sqrt{3}}{6}\pi$    ③  $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\pi$    ④  $\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$   
 ⑤  $\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

**정답 : ⑤**

문제를 읽으니 주인공은 직사각형 안에 그려지는 두 부채꼴로 이루어진 도형이다. 상황은  $R_1, R_2, \dots$ 로 반복되는 프랙탈 구조이고, 구하는 것은  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 이다.

등비급수  $\frac{S_1}{1-r}$ 을 구하려면 첫째항  $S_1$ 과 공비  $r$ 이 필요하다.  $S_1$ 은 두 부채꼴 넓이의 합이고, 공비  $r$ 은 닮음비의 제곱이다. 아래 그림과 같이 두 부채꼴의 위치와 닮음비를 확인한다.



$\overline{B_1C_1} = \sqrt{3}$ 이고  $\overline{B_1D_1} : \overline{C_1D_1} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{B_1D_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \overline{C_1D_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \{\text{비례 배분}\}$$

$\overline{A_1B_1} = 1, \overline{B_1D_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이므로  $\angle D_1B_1E_1 = 60^\circ$ 이다. 두 부채꼴 넓이:

$$S_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{36} \quad \{\text{부채꼴 넓이}\}$$

답음비:  $\overline{OC_2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$r = \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{11\pi}{36}}{1-r} = \frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi \quad \{\text{등비급수}\}$$

**27.** 곡선  $y = x \ln(x^2 + 1)$ 과  $x$ 축 및 직선  $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ①  $\ln 2 - \frac{1}{2}$    ②  $\ln 2 - \frac{1}{4}$    ③  $\ln 2 - \frac{1}{6}$    ④  $\ln 2 - \frac{1}{8}$   
 ⑤  $\ln 2 - \frac{1}{10}$

**정답 : ①**

문제를 읽으니 주인공은 곡선  $y = x \ln(x^2 + 1)$ 이다. 상황은 이 곡선과  $x$ 축, 직선  $x = 1$ 로 둘러싸인 영역이고, 구하는 것은 그 넓이이다.

피적분함수  $x \ln(x^2 + 1)$ 에서  $x dx$ 와  $\ln(x^2 + 1)$ 로 분리된다.

$t = x^2 + 1$ 로 치환하면  $x dx = \frac{1}{2} dt$ 이므로  $\int \ln t dt$  형태로

단순화된다.

$t = x^2 + 1$ 로 치환하면  $x dx = \frac{1}{2} dt$ 이고, 구간은  $[1, 2]$ 로 변환된다.

$$\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln t dt \quad \{\text{치환}\}$$

$\ln t$ 를 미분하고 1을 적분하는 부분적분:

$$\int \ln t dt = t \ln t - t + C \quad \{\text{부분적분}\}$$

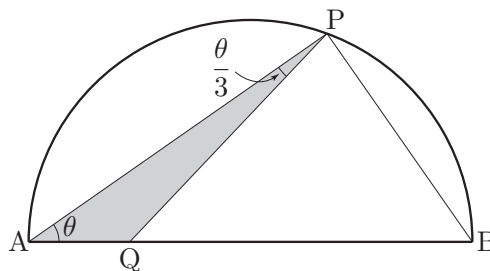
$$\frac{1}{2} [t \ln t - t]_1^2 = \frac{1}{2} \{ (2 \ln 2 - 2) - (0 - 1) \} = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \{\text{대입}\}$$

**28.** 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다.

$\angle PAB = \theta$ 이고  $\angle APQ = \frac{\theta}{3}$ 일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를

$S(\theta)$ , 선분 PB의 길이를  $l(\theta)$ 라 하자.  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{l(\theta)}$ 의 값은?

(단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ) [4점]



- ①  $\frac{1}{12}$    ②  $\frac{1}{6}$    ③  $\frac{1}{4}$    ④  $\frac{1}{3}$    ⑤  $\frac{5}{12}$

**정답 : ㉓**

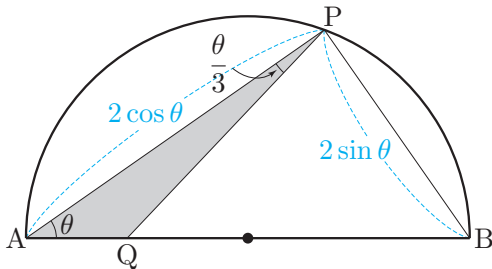
문제를 읽으니 주인공은 반원 위의 점 P와 지름 위의 점 Q로 이루어진 삼각형 PAQ이다. 상황은  $\angle PAB = \theta$ ,  $\angle APQ = \frac{\theta}{3}$

이고, 구하는 것은  $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{l(\theta)}$  이다.

반원에서 지름에 대한 원주각은  $90^\circ$ 이므로  $\overline{PA} = 2 \cos \theta$ ,  $\overline{PB} = 2 \sin \theta$ 이다. 삼각형 PAQ에서 사인법칙으로  $\overline{AQ}$ 를 구하고, 넓이  $S(\theta)$ 를  $\theta$ 의 함수로 나타낸다. **쟁점**은  $\frac{\sin \frac{\theta}{3}}{\sin \frac{4\theta}{3}}$ 의 극한을

계산하는 것이다.

아래 그림과 같이 반원 위의 점들의 위치 관계를 확인한다.



$\overline{PA} = 2 \cos \theta$ ,  $l(\theta) = \overline{PB} = 2 \sin \theta$ 이다.  $\angle AQP = \pi - \frac{4\theta}{3}$

이므로 삼각형 PAQ에서 사인법칙을 적용하면

$$\overline{PA} = 2R \sin(\pi - \frac{4\theta}{3}) = 2 \cos \theta \quad \{\text{아는 길이}\}$$

$$2R = \frac{2 \cos \theta}{\sin \frac{4\theta}{3}} \quad \{\text{외접원 지름}\}$$

$$\overline{AQ} = 2R \sin \frac{\theta}{3} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{3} \cos \theta}{\sin \frac{4\theta}{3}} \quad \{\text{구하는 길이}\}$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot \overline{AQ} \cdot \sin \theta = \frac{2 \sin \frac{\theta}{3} \sin \theta \cos^2 \theta}{\sin \frac{4\theta}{3}} \quad \{\text{넓이}\}$$

극한 계산:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{l(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \frac{\theta}{3} \cdot \cos^2 \theta}{\sin \frac{4\theta}{3}} = \frac{\frac{\theta}{3}}{\frac{4\theta}{3}} = \frac{1}{4} \quad \left\{ \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \right\}$$

**29.** 함수  $f(x) = e^x + x - 1$ 과 양수  $t$ 에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x \{t - f(s)\} ds$$

가  $x = \alpha$ 에서 최댓값을 가질 때, 실수  $\alpha$ 의 값을  $g(t)$ 라

하자. 미분가능한 함수  $g(t)$ 에 대하여  $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1 + e^{g(t)}} dt$ 의 값을 구하시오. [4점]

**정답 : 12**

문제를 읽으니 주인공은 함수  $f(x) = e^x + x - 1$ 과 그 역함수 관계에 있는  $g(t)$ 이다. 상황은  $F(x) = \int_0^x \{t - f(s)\} ds$ 가

최댓값을 갖는 점  $x = \alpha$ 를  $g(t)$ 로 정의하고, 구하는 것은

$$\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1 + e^{g(t)}} dt \text{ 이다.}$$

$F'(x) = t - f(x) = 0$ 에서  $f(\alpha) = t$ 이므로  $g(t) = f^{-1}(t)$ 이다.

$y = g(t)$ 로 치환하면  $dt = f'(y) dy = (e^y + 1) dy$ 가 되어 피적분함수가 약분된다. **쟁점**은 역함수 치환을 통해 적분을 단순화하는 것이다.

$g(t) = f^{-1}(t)$ 이므로  $y = g(t)$ 로 치환하면  $t = f(y)$ ,

$dt = (e^y + 1) dy$ 이다.

$$\begin{aligned} \int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1 + e^{g(t)}} dt &= \int_1^5 \frac{y}{1 + e^y} \cdot (e^y + 1) dy \quad \{\text{치환}\} \\ &= \int_1^5 y dy = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12 \quad \{\text{약분 후 계산}\} \end{aligned}$$

**30.** 두 양수  $a, b$  ( $b < 1$ )에 대하여 함수  $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & (x \leq 0) \\ \frac{\ln(x+b)}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. 양수  $m$ 에 대하여 직선  $y = mx$ 와 함수

$y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를  $g(m)$

이라 할 때, 함수  $g(m)$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{m \rightarrow \alpha-} g(m) - \lim_{m \rightarrow \alpha+} g(m) = 1$ 을 만족시키는 양수  $\alpha$ 가 오직 하나 존재하고, 이  $\alpha$ 에 대하여 점  $(b, f(b))$ 는 직선  $y = \alpha x$ 와 곡선  $y = f(x)$ 의 교점이다.

$ab^2 = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p + q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는

서로소인 자연수이고,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.) [4점]

**정답 : 5**

문제를 읽으니 주인공은 조각함수  $f(x)$ 와 직선  $y = mx$ 의 교점 개수 함수  $g(m)$ 이다. 상황은  $\lim_{m \rightarrow \alpha-} g(m) - \lim_{m \rightarrow \alpha+} g(m) = 1$ 인

$\alpha$ 가 유일하고, 점  $(b, f(b))$ 가 직선  $y = \alpha x$  위에 있다. 구하는 것은  $ab^2$ 이다.

직선  $y = mx$ 는 항상 원점을 지나고,  $f(0) = 0$ 이므로 원점은 항상 교점이다. 따라서  $x \neq 0$ 에서의 추가 교점만 세면 된다.

**쟁점**은  $\lim_{m \rightarrow \alpha-} g(m) - \lim_{m \rightarrow \alpha+} g(m) = 1$ 이므로, 추가 교점의 개수가 좌극한의 상황에서 우극한의 상황보다 1개 더 많아야 한다는 점이다.

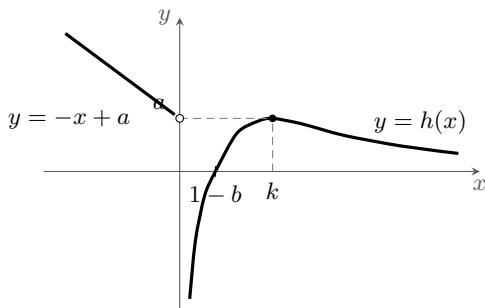
$x \neq 0$ 에서  $mx = f(x)$ 는  $m = \frac{f(x)}{x}$ 와 동치이다.  $h(x) = \frac{f(x)}{x}$

로 두면, 추가 교점 개수는 수평선  $y = m$ 과 곡선  $y = h(x)$ 의 교점 개수와 같다.

$y = h(x)$ 의 그래프:

- $x < 0$ :  $h(x) = -x + a$  (기울기  $-1$ ,  $y$ 절편  $a$ ).  $(0, a)$ 는 뚫린 점이고,  $a$ 의 값에 따라 위아래로 이동한다.
- $0 < x < 1 - b$ :  $\ln(x + b) < 0$ 이므로  $h(x) < 0$ . 양수  $m$ 과의 교점을 셀 때 무시.
- $x \geq 1 - b$ :  $h(x) = \frac{\ln(x + b)}{x^2} > 0$ . 미분하면  $h'(x) = \frac{\frac{x}{x+b} - 2\ln(x+b)}{x^3}$  이고,  $h'(x) = 0$ 인 점  $x = k$ 에서 극대를 가진 뒤 0으로 수렴한다.  $b$ 에 따라 극대점  $(k, h(k))$ 가 이동한다.

조건이 성립하는 상황의  $y = h(x)$  그래프는 아래와 같다.



수평선  $y = m$ 을 위아래로 훑을 때 교점 개수가 바뀌는 곳은 두 군데뿐이다. 오른쪽 가지의 극댓값  $h(k)$ 를 지날 때는 차이가 2, 왼쪽 가지의 경계값  $a$ (뚫린 점)를 지날 때는 차이가  $-1$ 이다. 단독으로는 어느 쪽도 차이 1을 만들 수 없으므로, 두 값이 일치하는  $h(k) = a$ 일 때만  $2 - 1 = 1$ 이 가능하다.

$m = a$ 인 수평선  $y = a$ 를 그리면:

- $m < a$ :  $x < 0$ 에서 교점 0개,  $x > 0$ 에서 교점 2개 → 추가 교점 2개
- $m > a$ :  $x < 0$ 에서 교점 1개,  $x > 0$ 에서 교점 0개 → 추가 교점 1개
- 차이 =  $2 - 1 = 1$  (조건 만족!)

이 상황이 유일한  $\alpha$ 가 되려면 다른 불연속점이 없어야 하는데,  $h(k) = a$ 이면 극댓값과 경계값이 일치하므로 불연속점이  $\alpha = a$  하나뿐이다. 따라서 정답 상황이다.

(참고: 수학적 완결성을 위해서는  $h(k) > a$ ,  $h(k) < a$ 인 경우도 조사해야 하지만, 시험장에서는  $h(k) = a$ 가 조건을 만족하면 바로 진행한다.)

따라서 쟁점은  $h(x)$  ( $x > 0$ )의 극댓값이  $a$ 와 같을 조건을 찾는 것이다.

$x = b$ 에서  $h(x)$ 가 극대이고 극댓값이  $a$ 이면,  $h(b) = a$ 이고  $h'(b) = 0$ 이다. 앞서 구한  $h'(x)$ 에  $x = b$ 를 대입하면

$$h'(b) = \frac{\frac{b}{2b} - 2\ln(2b)}{b^3} = \frac{\frac{1}{2} - 2\ln(2b)}{b^3} = 0 \quad \{x = b \text{ 대입}\}$$

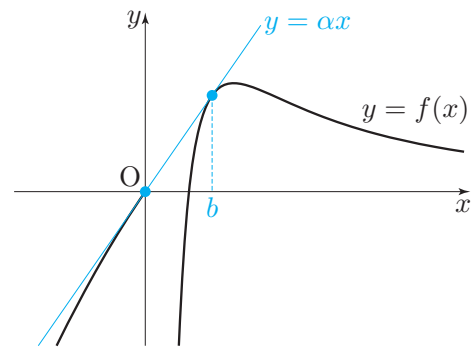
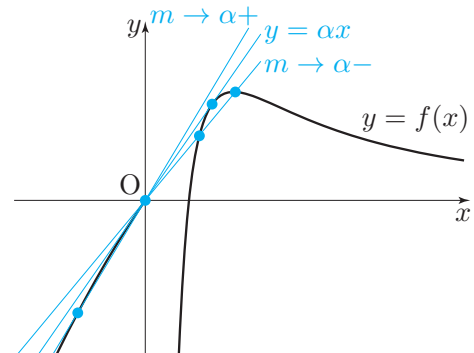
$$\ln(2b) = \frac{1}{4} \quad \{\text{정리}\}$$

따라서

$$a = h(b) = \frac{\ln(2b)}{b^2} = \frac{1}{4b^2} \quad \left\{ \ln(2b) = \frac{1}{4} \right\}$$

$$ab^2 = \frac{1}{4}, \quad p + q = 5 \quad \{\text{계산}\}$$

참고: 원래 그림( $y = f(x)$ 와  $y = mx$ )에서 보면, 조건이 성립하는 상황은 직선  $y = \alpha x$ 가 제1사분면에서 곡선에 접하면서 동시에  $x = 0$ 에서의 왼쪽 접선인 경우이고, 이때 접점이  $(b, f(b))$ 다.



# 기하

## 정답과 해설

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 23번<br>① | 24번<br>④ | 25번<br>② | 26번<br>⑤ | 27번<br>④ |
| 28번<br>⑤ | 29번<br>6 | 30번<br>9 |          |          |

**23.** 좌표공간의 점  $P(1, 3, 4)$ 를  $zx$  평면에 대하여 대칭이동한 점을  $Q$ 라 하자. 두 점  $P$ 와  $Q$  사이의 거리는? [3점]

① 6   ② 7   ③ 8   ④ 9   ⑤ 10

**정답 : ①**

문제를 읽으니 점  $P(1, 3, 4)$ 를  $zx$  평면에 대칭이동한 점이  $Q$ 이고, 구하는 것은  $\overline{PQ}$ 다.

$zx$  평면 대칭은  $y$ 좌표만 부호가 바뀐다.  $P$ 와  $Q$ 는  $y$ 축 방향으로만 다르므로 거리도 그 성분 하나로 끝난다.

$$Q = (1, -3, 4) \quad \{y\text{만 반전}\}$$

$$\overline{PQ} = |3 - (-3)| = 6 \quad \{y\text{성분 차}\}$$

**24.** 좌표평면에서 점  $A(4, 6)$ 과 원  $C$  위의 임의의 점  $P$ 에 대하여

$$|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 3$$

일 때, 원  $C$ 의 반지름의 길이는? (단,  $O$ 는 원점이다.) [3점]

① 1   ② 2   ③ 3   ④ 4   ⑤ 5

**정답 : ④**

문제를 읽으니 원  $C$  위의 임의의 점  $P$ 에 대하여

$|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 3$ 이고, 구하는 것은 원의 반지름이다.

“임의의 점  $P$ 에 대하여 성립하는 등식”은  $P$ 의 자취 방정식이다.

$\overrightarrow{OP} = (x, y)$ 로 좌표 번역하면 이차식, 즉 원의 방정식이 나온다.

내적인 채로 변형하는 것보다 좌표로 내려놓는 것이 현실적이다.

$$x^2 + y^2 - (4x + 6y) = 3 \quad \{\overrightarrow{OP} = (x, y), \overrightarrow{OA} = (4, 6)\}$$

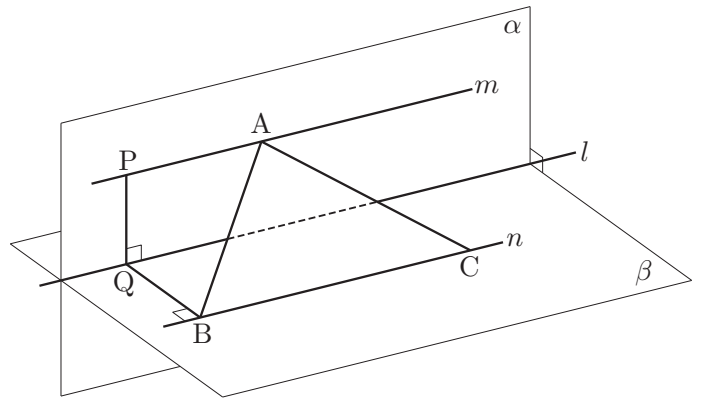
$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \quad \{\text{완전제곱}\}$$

$\therefore$  반지름은 4

**25.** 좌표공간에서 수직으로 만나는 두 평면  $\alpha, \beta$ 의 교선을  $l$ 이라 하자. 평면  $\alpha$  위의 직선  $m$ 과 평면  $\beta$  위의 직선  $n$ 은 각각 직선  $l$ 과 평행하다. 직선  $m$  위의  $\overline{AP} = 4$ 인 두 점  $A, P$ 에 대하여 점  $P$ 에서 직선  $l$ 에 내린 수선의 발을  $Q$ , 점  $Q$ 에서 직선  $n$ 에 내린 수선의 발을  $B$ 라 하자.

$\overline{PQ} = 3$ ,  $\overline{QB} = 4$ 이고, 점  $B$ 가 아닌 직선  $n$  위의 점  $C$ 에 대하여  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 일 때, 삼각형  $ABC$ 의 넓이는? [3점]

① 18   ② 20   ③ 22   ④ 24   ⑤ 26



**정답 : ②**

문제를 읽으니 수직인 두 평면의 교선  $l$ 과, 각 평면 위에서  $l$ 에 평행한 직선  $m, n$ 이 있다.  $\overline{AP} = 4$ ,  $\overline{PQ} = 3$ ,  $\overline{QB} = 4$ ,

$\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 구하는 것은 삼각형  $ABC$ 의 넓이다.

$l, m, n$ 이 모두 평행하다는 것이 핵심 구조다. 평행 방향 성분과 수직 성분을 분리하면, 수직 단면에는 직각삼각형  $PQB$ 가 담기고 평행 방향으로의 길이가 그대로 복사된다.  $PQ \perp l$ ,  $QB \perp n$  이므로 삼수선 정리로  $PB \perp n$ , 즉  $P$ 와  $n$ 의 거리는  $\overline{PB} = 5$ 다.

$m \parallel n$ 이므로  $m$  위의 어느 점이든  $n$ 까지의 거리가 같다. 특히  $A$ 에서  $n$ 에 내린 수선의 발  $D$ 는  $B$ 를 평행 방향으로  $\overline{AP}$ 만큼 옮긴 점이므로  $\overline{BD} = \overline{AP} = 4$ 이고,  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면  $D$ 가  $\overline{BC}$ 의 중점이다.

$$\overline{PB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \{\text{수직 단면의 직각삼각형}\}$$

$$d(A, n) = \overline{AD} = 5 \quad \{m \parallel n \text{이라 } P \text{에서와 같음}\}$$

$$\overline{BC} = 2\overline{BD} = 2\overline{AP} = 8 \quad \{\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow D \text{는 중점}\}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20$$

**26.** 좌표평면에서 타원  $x^2 + 3y^2 = 19$ 와 직선  $l$ 은 제1사분면 위의 한 점에서 접하고, 원점과 직선  $l$  사이의 거리는  $\frac{19}{5}$ 이다. 직선  $l$ 의 기울기는? [3점]

- ①  $-\frac{2}{3}$    ②  $-\frac{5}{6}$    ③  $-1$    ④  $-\frac{7}{6}$    ⑤  $-\frac{4}{3}$

**정답 : ⑤**

문제를 읽으니 타원  $x^2 + 3y^2 = 19$ 에 제1사분면에서 접하는 직선  $l$ 이 있고, 원점과  $l$ 의 거리가  $\frac{19}{5}$ 다. 구하는 것은  $l$ 의 기울기.

부호부터 판정한다. 점  $(x_0, y_0)$ 이 제1사분면이면 접선  $\frac{x_0x}{19} + \frac{3y_0y}{19} = 1$ 의 기울기는  $-\frac{x_0}{3y_0} < 0$ 이고  $y$ 절편은 양수다.

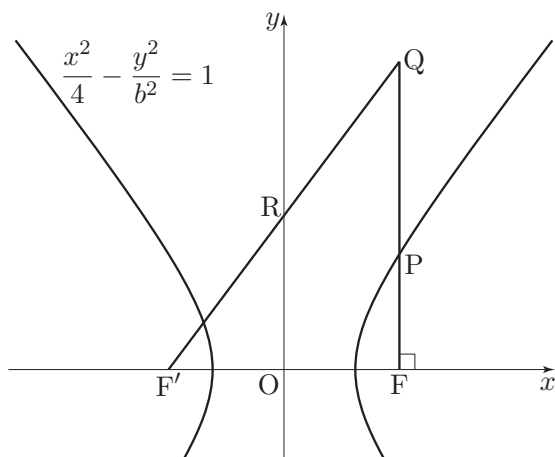
기울기  $m$ 인 접선 공식  $y = mx + \sqrt{19m^2 + \frac{19}{3}}$ 에 원점 거리 조건을 걸면, 목표가  $m$  하나이므로  $m^2$ 의 일차방정식으로 정리된다.

$$\frac{\sqrt{19m^2 + \frac{19}{3}}}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{19}{5} \quad \{\text{원점과 직선의 거리}\}$$

$$25 \left( 19m^2 + \frac{19}{3} \right) = 361(m^2 + 1) \quad \{\text{제곱·정리}\}$$

$$m^2 = \frac{16}{9}, \quad m = -\frac{4}{3} \quad \{m < 0\}$$

**27.** 그림과 같이 두 점  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ )을 초점으로 하는 쌍곡선  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 있다. 점  $F$ 를 지나고  $x$ 축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을  $P$ 라 하고, 직선  $PF$  위에  $\overline{QP} : \overline{PF} = 5 : 3$ 이 되도록 점  $Q$ 를 잡는다. 직선  $F'Q$ 가  $y$ 축과 만나는 점을  $R$ 라 할 때,  $\overline{QP} = \overline{QR}$ 이다.  $b^2$ 의 값은? (단,  $b$ 는 상수이고, 점  $Q$ 는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]



- ①  $\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}$    ②  $1 + 2\sqrt{5}$    ③  $\frac{3}{2} + 2\sqrt{5}$    ④  $2 + 2\sqrt{5}$   
⑤  $\frac{5}{2} + 2\sqrt{5}$

**정답 : ④**

문제를 읽으니 쌍곡선  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서  $F$  위의 수직선과 제1

사분면에서 만나는 점  $P$ ,  $\overline{QP} : \overline{PF} = 5 : 3$ 인 점  $Q$ , 직선  $F'Q$ 와  $y$ 축의 교점  $R$ 가 있고  $\overline{QP} = \overline{QR}$ 다. 구하는 것은  $b^2$ .

시작은 정의다:  $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \cdot 2 = 4$ .  $\overline{PF} = k$ 로 잡으면 비

조건이  $\overline{QP} = \frac{5}{3}k$ ,  $\overline{QF} = \frac{8}{3}k$ 를 준다.  $y$ 축은  $F'F$ 의

수직이등분선이므로  $R$ 는  $F'Q$ 의 중점이고,  $\overline{QR} = \overline{QP}$  조건은

$\overline{F'Q} = \frac{10}{3}k$ 로 번역된다. 직선  $PF$ 가  $x$ 축과 수직이라

직각삼각형이 두 개( $\triangle QFF'$ ,  $\triangle PFF'$ ) 생기고, 피타고라스 두 번으로  $c$ 와  $k$ 가 모두 잡힌다. 마무리는  $b^2 = c^2 - 4$ .

$$\left(\frac{10}{3}k\right)^2 = (2c)^2 + \left(\frac{8}{3}k\right)^2, \quad c = k \quad \{\triangle QFF'\}$$

$$(k+4)^2 = k^2 + (2k)^2 \quad \{\triangle PFF', \overline{PF'} = k+4\}$$

$$k^2 - 2k - 4 = 0, \quad k = 1 + \sqrt{5} \quad \{k > 0\}$$

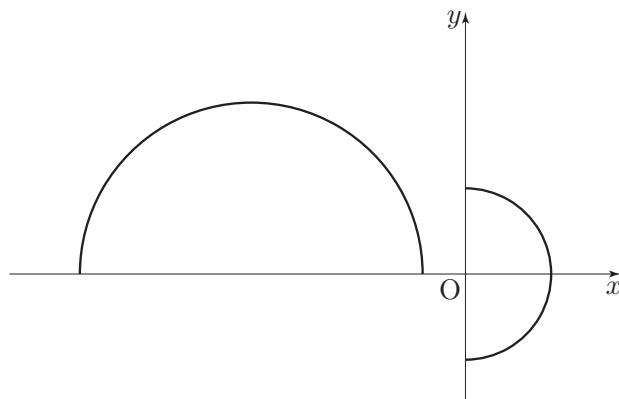
$$\therefore b^2 = c^2 - 4 = (1 + \sqrt{5})^2 - 4 = 2 + 2\sqrt{5}$$

**28.** 좌표평면에서 반원의 호  $x^2 + y^2 = 4$  ( $x \geq 0$ ) 위의 한 점  $P(a, b)$ 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2$$

를 만족시키는 반원의 호  $(x+5)^2 + y^2 = 16$  ( $y \geq 0$ ) 위의 점  $Q$ 가 하나뿐일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $O$ 는 원점이다.) [4점]

- ①  $\frac{12}{5}$    ②  $\frac{5}{2}$    ③  $\frac{13}{5}$    ④  $\frac{27}{10}$    ⑤  $\frac{14}{5}$



**정답 : ⑤**

문제를 읽으니 오른쪽 반원  $x^2 + y^2 = 4$  위의 점  $P(a, b)$ 에 대하여,  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2$ 를 만족시키는 왼쪽 위 반원  $(x+5)^2 + y^2 = 16$  ( $y \geq 0$ ) 위의 점  $Q$ 가 하나뿐이다. 구하는 것은  $a+b$ .

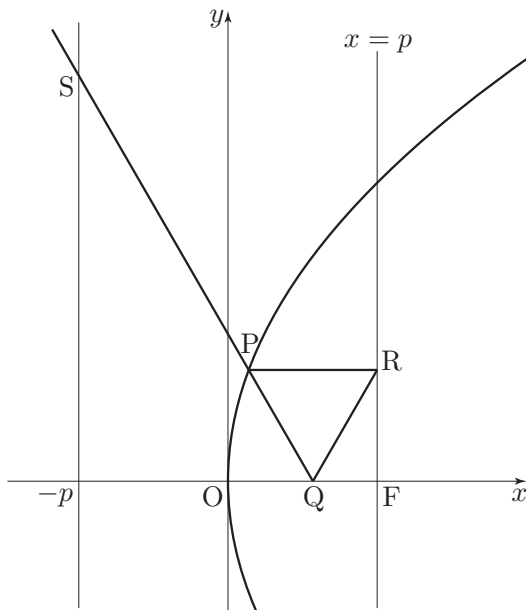
내적을 정사영으로 읽는다.  $|\overrightarrow{OP}| = 2$ 이므로  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2$ 는 “ $Q$ 의  $\overrightarrow{OP}$  방향 정사영이 1”이라는 뜻이다. 즉  $Q$ 의 자취는  $\overrightarrow{OP}$ 에 수직이고  $O$ 에서  $\overrightarrow{OP}$  쪽으로 거리 1인 직선( $\overrightarrow{OP}$ 의 수직이등분선)이다. “하나뿐”은 이 직선이 반원 호에 접한다는 조건으로 번역된다.  $\overrightarrow{OP}$  방향을  $(\cos \theta, \sin \theta)$ 로 두면 중심  $A(-5, 0)$ 의 정사영이  $-5 \cos \theta$ 이므로  $A$ 와 직선의 거리는  $5 \cos \theta + 1$ .

$$5 \cos \theta + 1 = 4, \quad \cos \theta = \frac{3}{5} \quad \{\text{접합: 거리 = 반지름 4}\}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5} \quad \{\text{접점이 } y \geq 0 \text{ 호 위에 있도록} +\}$$

$$P = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right) \text{이므로 } a+b = \frac{14}{5}$$

**29.** 그림과 같이 꼭짓점이 원점  $O$ 이고 초점이  $F(p, 0)$  ( $p > 0$ )인 포물선이 있다. 포물선 위의 점  $P$ ,  $x$ 축 위의 점  $Q$ , 직선  $x = p$  위의 점  $R$ 에 대하여 삼각형  $PQR$ 는 정삼각형이고 직선  $PR$ 는  $x$ 축과 평행하다. 직선  $PQ$ 가 점  $S(-p, \sqrt{21})$ 을 지날 때,  $\overline{QF} = \frac{a+b\sqrt{7}}{6}$ 이다.  $a+b$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 와  $b$ 는 정수이고, 점  $P$ 는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



**정답 : 6**

문제를 읽으니 초점  $F(p, 0)$ 인 포물선 위의  $P$ ,  $x$ 축 위의  $Q$ , 직선  $x = p$  위의  $R$ 가 정삼각형을 이루고  $PR \parallel x$ 축, 직선  $PQ$ 가  $S(-p, \sqrt{21})$ 을 지난다. 구하는 것은  $\overline{QF}$ .

정삼각형  $\cdot PR \parallel x$ 축  $\cdot Q$ 가  $x$ 축 위라는 세 조건은 “직선  $PQ$ 의 기울기가  $\pm\sqrt{3}$ ”로 압축된다(그림에서  $-\sqrt{3}$ ).  $\overline{QF} = k$ 로 잡으면 정삼각형 한 변이  $2k$ ,  $y_P = \sqrt{3}k$ ,  $x_P = p - 2k$ ,  $Q = (p - k, 0)$ 이 전부  $k, p$ 로 표현된다. 미지수가 둘이니 방정식도 둘:  $S$ 를 지난다는 조건과 포물선의 정의( $\overline{PF} = x_P + p$ )다.

$$\sqrt{21} = \sqrt{3}(2p - k) \quad \{S(-p, \sqrt{21}) \text{ 대입}\}$$

$$2p - k = \sqrt{7} \quad \{\text{정리}\}$$

$$\sqrt{7}k = 2p - 2k \quad \{\overline{PF} = x_P + p\}$$

$$(\sqrt{7} + 1)k = \sqrt{7}, \quad k = \frac{7 - \sqrt{7}}{6} \quad \{\text{연립} \cdot \text{유리화}\}$$

$$\therefore a = 7, b = -1 \text{이므로 } a + b = 6$$

**30.** 좌표공간에서 점  $A(0, 0, 1)$ 을 지나는 직선이 중심이  $C(3, 4, 5)$ 이고 반지름의 길이가 1인 구와 한 점  $P$ 에서만 만난다. 세 점  $A, C, P$ 를 지나는 원의  $xy$ 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은  $\frac{q}{p}\sqrt{41}\pi$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

**정답 : 9**

문제를 읽으니  $A(0, 0, 1)$ 에서 그은 직선이 중심  $C(3, 4, 5)$ , 반지름 1인 구에 점  $P$ 에서 접한다. 세 점  $A, C, P$ 를 지나는 원의  $xy$ 평면 정사영 넓이의 최댓값을 묻는다.

접한다는 것은  $\angle APC = 90^\circ$ 라는 뜻이고, 그러면  $A, C, P$ 를 지나는 원에서  $\overline{AC}$ 가 항상 지름이다. 즉  $P$ 가 어디에 있는 원의 크기는 고정이고, 변하는 것은 원이 놓인 평면뿐이다. 정사영 넓이를 최대하려면  $xy$ 평면과 이루는 각  $\theta$ 가 최소여야 하는데,  $\overline{AC}$ 를 품는 평면 중 가장 덜 기울어진 것의 기울기는 직선  $AC$  자체의 기울기다.  $\overrightarrow{AC} = (3, 4, 4)$ 는 수평 성분 5, 수직 성분 4. (접점들은 직선  $AC$ 를 축으로 하는 원을 이루므로 어떤 평면을 골라도 실제  $P$ 가 존재한다.)

$$\overline{AC} = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41} \quad \{\text{지름}\}$$

$$S = \pi \left( \frac{\sqrt{41}}{2} \right)^2 = \frac{41}{4}\pi \quad \{\text{원 넓이 고정}\}$$

$$\cos \theta_{\max} = \frac{5}{\sqrt{41}} \quad \{\text{수평 5, 수직 4}\}$$

$$S' = \frac{41}{4}\pi \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5}{4}\sqrt{41}\pi \quad \{\text{정사영}\}$$

$$\therefore p + q = 4 + 5 = 9$$