

## A 해설편

01

일격필살 2회 · 추가문항

함수  $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 - 1$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은  $y = x$ 이다.
- ㄴ. 점  $(1, f(1))$ 은 곡선  $y = f(x)$ 의 변곡점이다.
- ㄷ.  $f'(c) = 1$ 을 만족하는 실수  $c$ 의 개수는 3이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[4점]

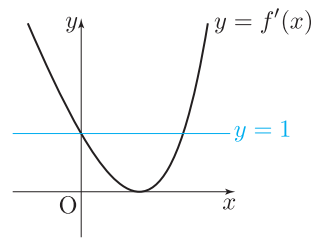
정답 ②

해설

ㄱ.  $f(0) = 0$ 이고,  $f'(x) = e^x - ex$ 에서  $f'(0) = 1$ 입니다. 따라서 구하는 접선의 방정식은  $y = x$ 입니다. (참)

ㄴ.  $f'(x) = e^x - ex$ ,  $f''(x) = e^x - e$ 에서  $f''(1) = 0$ 이고,  $x = 1$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀝니다. 따라서  $(1, f(1))$ 은 곡선  $y = f(x)$ 의 변곡점입니다. (참)

ㄷ. 함수  $y = f'(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



따라서  $f'(c) = 1$ 인  $c$ 의 개수는 2입니다.

(거짓)

## 02

일격필살 2회 · 추가문항

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 다음을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $3xf(x) = \int_0^x 4tf'(t)dt$ 이다.

(나)  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}$ ,  $\int_0^a f(x)dx = 1$

(단,  $a$ 는  $a > 0$ 인 상수이다.)

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ.  $f(1) = 0$

ㄴ.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = 3\ln|x| + C$  (단,  $C$ 는 적분상수이다.)

ㄷ.  $\int_0^a axf(x)dx = \frac{4}{5}$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[4점]

정답 ②

### 해설

ㄱ. (가)의 양변에  $x = 1$ 을 대입하면  $3f(1) = \int_0^1 4tf'(t)dt$ 입니다. 이 식에서 우변을 부분적분하면 다음과 같습니다.

$$\left[ 4tf(t) \right]_0^1 - 4 \int_0^1 f(t)dt = 4f(1) - 4 \int_0^1 f(t)dt$$

(나)의  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}$ 를 이 식에 대입하면  $3f(1) = 4f(1) - 1$ 에서  $f(1) = 1$ 입니다. (거짓)

ㄴ.  $3xf(x) = \int_0^x 4tf'(t)dt$ 의 양변을 미분하면  $3f(x) + 3xf'(x) = 4xf'(x)$ 에서

$3f(x) = xf'(x)$ 이므로  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x}$ 를 얻습니다. 이 식의 양변을 적분하면

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{3}{x}dx = 3\ln|x| + C$ 를 얻습니다. (참)

ㄷ. ㄴ에서  $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)입니다. 즉  $\ln|f(x)| = 3\ln|x| + C$ 입니다. 양변에  $x = 1$ 을 대입하면  $\ln|f(1)| = 0 = 3\ln|1| + C$ 에서

$C = 0$ 입니다. 따라서  $|f(x)| = |x|^3$ 에서  $f(x) = \pm|x|^3$ 입니다.

이때 문제의 조건에 따르면 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하므로  $x < 0$ 이면  $f(x) < 0$ 이고,  $x > 0$ 이면  $f(x) > 0$ 입니다. 따라서  $f(x) = x^3$ 입니다.

이제 (나)의  $\int_0^a f(x)dx = 1$  조건을 이용하면  $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a x^3dx = \frac{1}{4}a^4 = 1$  이므로  $a = \sqrt{2}$ 를 얻습니다.

이제 ㄷ을 판단하기 위해  $\int_0^a axf(x)dx$ 를 계산하면

$$\int_0^a axf(x)dx = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} x^4dx = \frac{8}{5} \neq \frac{4}{5}$$

입니다.

(거짓)

### 03

일격필살 2회 · 추가문항

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고,  $f(0) = 1$ 인 함수  $f(x)$ 가  $x \neq 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$|f'(x) - x| < |x|$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

#### 보기

- ㄱ.  $f'(0) = 0$
- ㄴ. 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 극솟값을 갖는다.
- ㄷ.  $3 < \int_{-2}^1 f(x)dx < 4$

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ②

#### 해설

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 가지므로  $f'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 미분가능하므로 연속입니다.

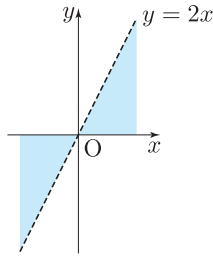
$|f'(x) - x| < |x|$ 를 해석해봅시다.  $f'(x) - x$ 의 부호에 관계 없이 다음이 성립합니다.

$$-|x| < f'(x) - x < |x|$$

각 변에  $x$ 를 더하면 다음과 같은 관계식을 얻습니다.

$$x - |x| < f'(x) < x + |x|$$

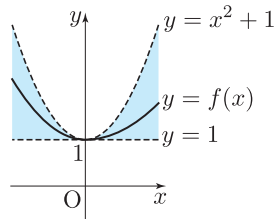
이를 부등식의 영역으로 나타내면 다음과 같습니다.<sup>1</sup>



ㄱ.  $x - |x| < f'(x) < x + |x|$ 의 각변에  $\lim_{x \rightarrow 0}$ 을 취하면  $f'(x)$ 가 연속이므로  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ 이고, 함수의 극한의 대소관계에 의하여  $0 \leq f'(0) \leq 0$ 입니다. 따라서  $f'(0) = 0$ 입니다. (참)

ㄴ.  $y = f'(x)$ 의 그래프의 정확한 값이나 모양은 알 수 없지만,  $x = 0$ 에서  $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 것은 확실히 알 수 있습니다. 따라서 조건을 만족시키는 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 극소입니다. (참)

ㄷ. ㄴ으로부터 함수  $y = f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 극소이고,  $f(0) = 1$ 이므로 그 그래프는 아래 그림과 같은 형태일 것입니다.



$y = f'(x)$ 의 그래프가 직선  $y = 2x$ 에 가까워지면  $y = f(x)$ 의 그래프는 곡선  $y = x^2 + 1$ 에 가까워집니다. 또한,  $y = f'(x)$ 의 그래프가  $x$ 축에 가까워지면  $y = f(x)$ 의 그래프는 직선  $y = 1$ 에 가까워집니다. 각각의 그래프와  $x$ 축 및

두 직선  $x = -1$ ,  $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 대소관계로부터  $\int_{-2}^1 1dx <$

$\int_{-2}^1 f(x)dx < \int_{-2}^1 (x^2 + 1)dx$ 입니다. 즉  $3 < \int_{-2}^1 f(x)dx < 6$ 입니다. (거짓)

<sup>1</sup>주어진 부등식은  $x \neq 0$ 일 때 성립하므로 그림의  $x = 0$ 에는 구멍이 뚫려 있습니다.

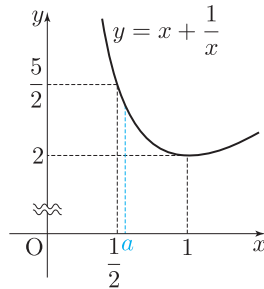


풀이 2) ㄱ을 이용하여 풀이하기 (2)

$y = e^x$ 와  $y = \frac{1}{x}$ 의 교점의 좌표가  $(a, \frac{1}{a})$ 인 것을 이용하여 풀이할 수 있습니다.

(풀이 생략)

- ㄷ.  $f(x)$ 의 그래프를 그리면  $x = a$ 에서 극솟값을 가짐을 알 수 있습니다. 또한,  $x < a$ 일 때 감소,  $x > a$ 일 때 증가하므로  $f(a)$ 가 최솟값  $m$ 입니다.  $f(a) = e^a - \ln a$ 에서 ㄱ의 풀이과정에서  $e^a = \frac{1}{a}$ , ㄱ에 의해  $-\ln a = a$ 이므로  $f(a) = a + \frac{1}{a}$ 입니다. 이때  $a + \frac{1}{a}$ 의 값을 직접적으로 구할 수는 없으므로, 곡선  $y = x + \frac{1}{x}$ 를 그린 후, 이 함수를 통해서  $a + \frac{1}{a}$ 의 값의 범위를 파악해보겠습니다. 함수  $y = x + \frac{1}{x}$ 의 그래프는 다음과 같습니다.



$y = x + \frac{1}{x}$ 은 그림과 같이  $x = 1$ 에서 최솟값 2를 갖습니다. ㄴ에서  $\frac{1}{2} < a < 1$ 이라 했으므로  $\frac{1}{2} + 2 > a + \frac{1}{a} > 2$ 입니다. 따라서  $2 < m < \frac{5}{2}$ 입니다. (참)

05

일격필살 3회 · 미적분 추가문항

$x > 4$ 에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 다음을 만족시킨다.

좌표평면에서 연립부등식  $y \leq f(t)x + 1$ ,  $0 \leq y \leq t$ ,  $0 \leq x \leq t$ 를 만족시키는 영역의 넓이가  $4t$ 이다.

옳은 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ.  $f(5) = \frac{8}{5}$

ㄴ.  $f'(8) = -\frac{3}{32}$

ㄷ. 함수  $f(x)$ 는  $x > 4$ 인 모든 실수  $x$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[4점]

정답 ⑤

### 해설

(i)  $tf(t) + 1 > t$  일 때, 전체 정사각형의 넓이에서 포함되지 않는 삼각형의 넓이를 빼면 됩니다. 따라서  $t^2 - \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2}{f(t)} = 4t$  입니다. 즉,  $f(t) = \frac{(t-1)^2}{2t^2 - 8t}$  입니다.  
 $tf(t) + 1 > t$  에 대입하면  $\frac{(t-1)^2}{2t-8} + 1 > t$  이고 정리하면  $\frac{(t-1)(t-7)}{t-4} < 0$  이므로  $t > 4$  에서  $4 < t < 7$  이 됩니다.

(ii)  $tf(t) + 1 = t$  일 때, (i)와 같이 구합니다. 즉,  $f(7) = \frac{6}{7}$  입니다.

(iii)  $tf(t) + 1 < t$  일 때, 네 점  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(t, 0)$ ,  $(t, tf(t) + 1)$  을 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이를 구하면 됩니다.  $\frac{1}{2}t(tf(t) + 2) = 4t$  이므로  $f(t) = \frac{6}{t}$  가 됩니다.  
 $tf(t) + 1 < t$  에 대입하면  $t > 7$  이 됩니다.

(i), (ii), (iii)을 정리하면

$$f(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{2t^2 - 8t} & (4 < t \leq 7) \\ \frac{6}{t} & (t > 7) \end{cases}$$

입니다.

ㄱ.  $f(5) = \frac{4^2}{2 \times 5^2 - 8 \times 5} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$  입니다. (참)

ㄴ.  $f'(8) = -\frac{6}{8^2} = -\frac{3}{32}$  입니다. (참)

ㄷ.  $f(t)$  는  $t = 7$  에서 연속이므로  $\lim_{t \rightarrow 7^-} \frac{f(t) - \frac{6}{7}}{t - 7} = \lim_{t \rightarrow 7^+} \frac{f(t) - \frac{6}{7}}{t - 7}$  를 확인하면 됩니다.

니다.  $\lim_{t \rightarrow 7^-} \frac{f(t) - \frac{6}{7}}{t - 7} = \lim_{t \rightarrow 7^-} \frac{-(5t+1)}{14(t^2-4t)} = -\frac{6}{49}$  입니다.  $\lim_{t \rightarrow 7^+} \frac{f(t) - \frac{6}{7}}{t - 7} =$

$\lim_{t \rightarrow 7^+} \left(-\frac{6}{7t}\right) = -\frac{6}{49}$  입니다.  $t = 7$  에서 미분가능하므로, 함수  $f(t)$  는 모든 실

수  $t$  에 대하여 미분가능합니다. (참)

## 06

일격필살 3회 · 미적분 추가문항

정의역이  $\left\{x \mid x > -\frac{\pi}{2}\right\}$  이고 미분가능한 함수  $f(x)$  의 한 부정적분을  $g(x)$  라 할 때,  $f(x)$  와  $g(x)$  가 다음을 만족시킨다.

(가)  $x > -\frac{\pi}{2}$  인 모든 실수  $x$  에 대하여  $f(x) > \cos x$  이다.

(나)  $f(x) - g(x) = \cos x - \sin x$

(다)  $g(0) = 1$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ.  $f'(0) = 1$

ㄴ.  $\int \frac{f'(x) + \sin x}{f(x) - \cos x} dx = x + C$  (단,  $C$  는 적분상수이다.)

ㄷ.  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[4점]

정답 ⑤

### 해설

$f(x)$  의 한 부정적분이  $g(x)$  이므로  $g'(x) = f(x)$  입니다.

ㄱ. (나)의 양변에  $x = 0$  을 대입하여 얻은 식  $f(0) - g(0) = 1$  과 (다)에 의해  $f(0) = 2$  를 얻고, (나)의 양변을 미분하여 얻은 식  $f'(x) - g'(x) = f'(x) - f(x) = -\sin x - \cos x$  의 양변에  $x = 0$  을 대입하여 얻은 식  $f'(0) - f(0) = -1$  으로부터  $f'(0) = 1$  을 얻습니다. (참)

ㄴ. ㄱ을 풀면서 얻은 식  $f'(x) - f(x) = -\sin x - \cos x$  을 이항하면  $f'(x) + \sin x = f(x) - \cos x$  이 되고, 양변을  $f(x) - \cos x$  로 나누면 ((가)에서  $f(x) > \cos x$  이므로  $f(x) - \cos x > 0$ )  $\frac{f'(x) + \sin x}{f(x) - \cos x} = 1$  이 됩니다. 따라서  $\int \frac{f'(x) + \sin x}{f(x) - \cos x} dx = \int dx = x + C$  입니다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 얻은 식  $\int \frac{f'(x) + \sin x}{f(x) - \cos x} dx$  의 분모, 분자를 잘 관찰하면 분모를 미분한 식이 분자가 된다는 것을 알 수 있습니다. 즉  $\int \frac{f'(x) + \sin x}{f(x) - \cos x} dx = \ln |f(x) - \cos x| + C'$  이고, (가)에서  $f(x) > \cos x$  이므로  $f(x) - \cos x > 0$  가 되어 준 식은  $\ln(f(x) - \cos x) + C'$  과 같습니다.

ㄴ의 결과를 활용하면  $\ln(f(x) - \cos x) = x + C'$ 입니다. 이제 양변에  $x = 0$ 을 대입하고 ㄱ을 풀며 얻은  $f(0) = 2$ 를 이용하면  $C' = 0$ 을 얻습니다. 따라서  $f(x) = e^x + \cos x$ 이고,

$$g(x) = \int (e^x + \cos x) dx = e^x + \sin x + D$$

(단,  $D$ 는 적분상수)에서  $g(0) = 1$ 이 되도록  $D$ 의 값을 정해주면  $D = 0$ 이므로  $g(x) = e^x + \sin x$ 입니다. 따라서  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$ 입니다. (참)

## 07

일격필살 3회 · 미적분 추가문항

양수  $m$ 에 대하여 함수  $f(m)$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f(1) = 0$

(나)  $m \neq 1$ 이면,  $f(m)$ 은 곡선  $y = xe^x$ 와 직선  $y = mx$ 로 둘러싸인 영역의 넓이이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

### 보기

ㄱ.  $f(e) = \frac{1}{2}e - 1$

ㄴ.  $0 < x_1 < x_2$ 이면  $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

ㄷ. 함수  $f(m)$ 은 구간  $(0, \infty)$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

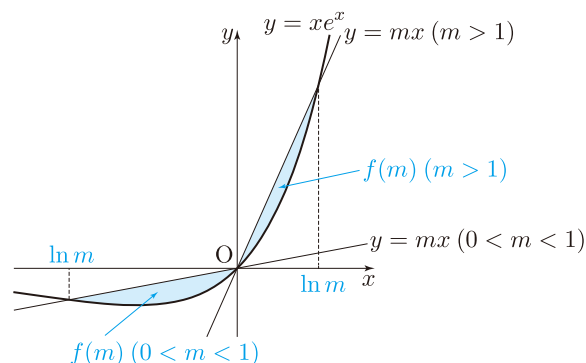
④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[4점]

정답 ③

### 해설



$0 < m < 1$ 이면  $f(m)$ 은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} f(m) &= \int_{\ln m}^0 (mx - xe^x)dx = \int_{\ln m}^0 mxdx - \int_{\ln m}^0 xe^x dx \\ &= -\frac{1}{2}m(\ln m)^2 - \left( \left[ xe^x \right]_{\ln m}^0 - \int_{\ln m}^0 e^x dx \right) \\ &= m \ln m - \frac{1}{2}m(\ln m)^2 - m + 1 \end{aligned}$$

이고,  $m > 1$ 이면

$$\begin{aligned} f(m) &= \int_0^{\ln m} (mx - xe^x)dx \\ &= \frac{1}{2}m(\ln m)^2 - m \ln m + m - 1 \end{aligned}$$

입니다.

ㄱ. 위에서 얻은 식에  $m = e$ 를 대입하면  $f(e) = \frac{1}{2}e - 1$ 입니다. (참)

$$\text{ㄴ. } f'(m) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\ln m)^2 & (0 < m < 1) \\ \frac{1}{2}(\ln m)^2 & (m > 1) \end{cases} \quad \text{이고 } 0 < m < 1 \text{이면 } f'(m) < 0 \text{ 이므로}$$

‘ $0 < x_1 < x_2$ 이면  $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.’는 틀린 명제가 됩니다. (거짓)

$$\text{ㄷ. } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0, \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

가 존재합니다. 따라서  $f'(1) = 0$ 이고, 함수  $f(m)$ 은  $m = 1$ 에서 미분가능합니다.

$0 < m < 1$ ,  $m > 1$ 에서도 미분가능하므로 함수  $f(m)$ 은 구간  $(0, \infty)$ 에서 미분가능합니다. (참)

## 08

일격필살 3회 · 미적분 추가문항

실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하고 다음 조건을 만족시키는 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(x)$ 를 원소로 하는 집합을  $S$ 라 하자.

(가)  $f(0) = 0$ ,  $f(2) = 2$

(나) 함수  $\frac{f(x)}{x}$ 가 열린 구간  $(0, 2)$ 에서 감소한다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ.  $x^3 - 4x^2 + 5x \in S$

ㄴ.  $g(x) \in S$ 이면  $g(x)$ 는 열린 구간  $(0, 2)$ 에서 증가한다.

ㄷ.  $h(x) \in S$ 이면 곡선  $y = h(x)$ 는 열린 구간  $(0, 2)$ 에서 위로 볼록하다.

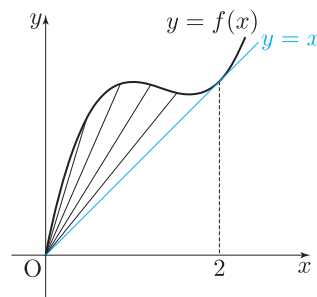
- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㅈ  
④ ㄴ, ㅈ                  ⑤ ㄱ, ㄴ, ㅈ
- [4점]

**정답** ①

## 해설

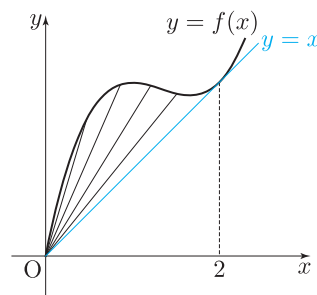
7.  $f(0) = 0, f(2) = 2$ 이고,  $\frac{f(x)}{x} = x^2 - 4x + 5$ 이므로 함수  $\frac{f(x)}{x}$ 는 구간  $(0, 2)$ 에서 감소합니다. 따라서  $x^3 - 4x^2 + 5x \in S$ 입니다. (참)

1. (나)에 의해  $0 < x < 2$ 인 모든  $x$ 에 대하여  $\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ 가 성립합니다. 따라서 (나)로부터  $xf'(x) < f(x)$ 임을 알 수 있습니다. 그러나 이 조건만으로는  $f'(x)$ 의 부호에 대한 정보를 알 수 있는 것은 아닙니다. 즉, 함수의 증가나 감소에 대한 정보는 알 수 없습니다.



ㄱ의 함수가 ㄴ의 반례이기도 합니다. 주어진 함수는 열린 구간  $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ 에서 감소합니다. (거짓)

ㄷ. ㄴ과 마찬가지로,  $xf'(x) < f(x)$ 라는 조건만으로는  $f''(x)$ 에 대한 정보를 알 수 있는 것은 아닙니다. 즉, 곡선의 오목, 볼록에 대한 정보는 알 수 없습니다.



위 그림과 같이  $\gamma$ 의 함수가  $\mathbb{C}$ 의 반레이기도 합니다. 주어진 함수는  $x < \frac{4}{3}$ 에서 위로 볼록,  $x > \frac{4}{3}$ 에서 아래로 볼록입니다. (거짓)

09

일격필살 3회 · 미적분 추가문항

정의역이  $\{x|x \geq 0\}$  인 함수

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$$

가 있다.  $f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(4, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 2이다.
- ㄴ. 곡선  $y = g(x)$ 와 직선  $y = x$ 의 서로 다른 교점의 개수는 3이다.
- ㄷ. 함수  $g(x)$ 는 열린 구간  $(0, 4)$ 에서 미분가능하다.

- ① ㄱ                                      ② ㄴ                                      ③ ㄱ, ㄴ
  - ④ ㄱ, ㄷ                                  ⑤ ㄴ, ㄷ
- [4점]

정답 ①

해설

ㄱ.  $f(4) = 4, f'(4) = 2$ 인지 확인하면 됩니다.

$$f(4) = \frac{1}{8}(4^4 - 8 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2) = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}(4x^3 - 24x^2 + 36x) = \frac{1}{2}x(x-3)^2$$

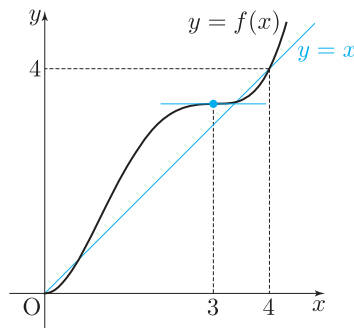
$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$$

따라서 ㄱ은 참입니다.

(참)

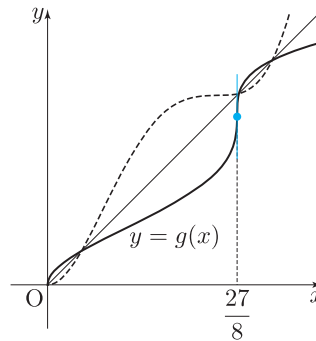
ㄴ. 함수  $y = f(x)$ 의 그래프를 그려봅시다.  $f''(x) = \frac{3}{2}(x-1)(x-3)$ 이므로 점  $(3, f(3))$

이 곡선  $y = f(x)$ 의 변곡점이고,  $f(3) = \frac{27}{8} > 3, f'(3) = 0$ 입니다. 그리고 ㄱ에서 배운 것과 같이  $f(4) = 4, f'(4) = 2$ 입니다. 이를 토대로 그래프를 그리면 다음 그림과 같습니다.



위 그림으로부터 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $y = x$ 의 교점의 개수는 4임을 알 수 있습니다. (거짓)

ㄷ. 다음 그림과 같이 ㄴ에서 그린 곡선을 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 함수  $y = g(x)$ 의 그래프를 얻을 수 있습니다.



얼핏 생각하면, 부드러운 곡선을  $y = x$ 에 대해 대칭이동했으니 부드러운 곡선일 것이므로 미분가능할 것처럼 보입니다. 그런데 그림 상에 접선표시가 되어 있는 점, 즉  $(3, f(3))$ 을 대칭한 점인  $(f(3), 3)$ 에서의 미분계수는 역함수의 미분법에 따라  $g'(f(3)) = \frac{1}{f'(3)}$ 입니다. 그런데  $f'(3) = 0$ 이므로  $g'(f(3))$ 은 정의되지 않습니다. 따라서  $g(x)$ 는  $x = f(3)$ 에서 미분가능하지 않으므로,  $g(x)$ 가 구간  $(0, 4)$ 에서 미분 가능하다는 말은 거짓이 됩니다. (거짓)

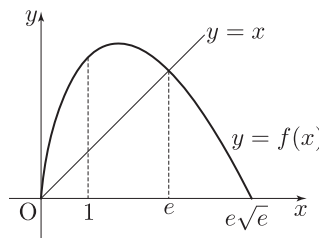
## 10

일격필살 3회 · 미적분 추가문항

정의역이

$$\{x \mid 0 < x < e\sqrt{e}\}$$

인 함수  $f(x) = x(3 - 2\ln x)$ 에 대하여  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.



함수  $g(x) = f(f(x))$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

**보기**

- ㄱ. 함수  $g(x)$ 는  $x = \sqrt{e}$ 에서 극소이다.
- ㄴ. 함수  $g(x)$ 가  $x = a$ 에서 극대가 되도록 하는 실수  $a$ 의 개수는 1이다.
- ㄷ. 곡선  $y = g(x)$ 의 변곡점의 개수는 1이다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄱ, ㄷ                ⑤ ㄴ, ㄷ  
 [4점]

정답 ①

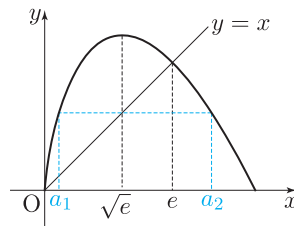
### 해설

ㄱ.  $f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}$ 이고,  $f'(x) = 1 - 2\ln x$ 에서  $f'(\sqrt{e}) = 0$ 입니다. 이 정보를 바탕으로  $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$ 에서  $f'(f(x))$ 와  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ 의  $x = \sqrt{e}$  근방에서의 변화 양상을 나타내면 다음 표와 같습니다.

|            | $x < \sqrt{e}$ | $x = \sqrt{e}$ | $x > \sqrt{e}$ |
|------------|----------------|----------------|----------------|
| $f'(f(x))$ | (-)            | (-)            | (-)            |
| $f'(x)$    | (+)            | 0              | (-)            |
| $g'(x)$    | (-)            | 0              | (+)            |

따라서 함수  $g(x)$ 는  $x = \sqrt{e}$ 에서 극소입니다. (참)

ㄴ.  $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$ 에서  $f'(x) = 0$ 인  $x$ 는  $x = \sqrt{e}$  외에 존재하지 않으므로,  $f'(f(a)) = 0$ 인  $a$ , 즉  $f(a) = \sqrt{e}$ 인  $a$ 에 대하여  $x = a$ 에서 함수  $g(x)$ 가 극대일 가능성이 있습니다. (실제로 극대인지는 도함수의 부호 변화를 통해 확인)



위 그림과 같이 직선  $y = x$ 를 이용해 직선  $y = \sqrt{e}$ 와 곡선  $y = f(x)$ 의 두 교점을 찾으면 각 교점의  $x$ 좌표가  $f(a) = \sqrt{e}$ 인  $a$ 입니다. 0과  $\sqrt{e}$  사이의  $a$ 를  $a_1$ ,  $\sqrt{e}$ 와  $e\sqrt{e}$  사이의  $a$ 를  $a_2$ 라 하면  $x = a_1$ ,  $x = a_2$  근방에서  $g'(x)$ 의 변화 양상은 다음 표와 같습니다.

|            | $x < a_1$ | $x = a_1$ | $x > a_1$ |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(f(x))$ | (+)       | 0         | (-)       |
| $f'(x)$    | (+)       | (+)       | (+)       |
| $g'(x)$    | (+)       | 0         | (-)       |

|            | $x < a_2$ | $x = a_2$ | $x > a_2$ |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(f(x))$ | (-)       | 0         | (+)       |
| $f'(x)$    | (-)       | (-)       | (-)       |
| $g'(x)$    | (+)       | 0         | (-)       |

위 표로부터 함수  $g(x)$ 는  $x = a_1$ ,  $x = a_2$ 에서 극대임을 알 수 있습니다. 따라서 함수  $g(x)$ 가  $x = a$ 에서 극대가 되도록 하는 실수  $a$ 의 개수는 2입니다. (거짓)

㉔.  $g'(a_1) = 0$ ,  $g'(\sqrt{e}) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의해 열린 구간  $(a_1, \sqrt{e})$ 에  $g''(b) = 0$ 인  $b$ 가 적어도 하나 존재합니다.  $y = g'(x)$ 가 상수함수가 아니므로 함수  $g'(x)$ 는  $x = b$ 에서 극값을 갖고,  $x = b$  근방에서  $g''(x)$ 의 부호가 바뀝니다. 즉  $b$ 는 곡선  $y = g(x)$ 의 변곡점의 조건인 ' $g''(b) = 0$ 이고  $x = b$  근처에서  $g''(x)$ 의 부호가 변한다.'를 만족합니다. 따라서 구간  $(a_1, \sqrt{e})$ 에서 곡선  $y = g(x)$ 의 변곡점이 적어도 하나 존재합니다. 같은 논리를 구간  $(\sqrt{e}, a_2)$ 에서도 적용하면 이 구간에서도 곡선  $y = g(x)$ 의 변곡점이 적어도 하나 존재한다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 곡선  $y = g(x)$ 의 변곡점은 적어도 2개 존재하므로, 변곡점의 개수가 1이라는 명제는 거짓입니다.

(거짓)

## 11

일격필살 3회 · 미적분 추가문항

함수  $f(x) = \cos(x^2)$ 의 한 부정적분을  $F(x)$ 라 하자. 실수  $a$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

## 보기

$$\neg. \quad g(0) = F(0) - F(a)$$

$$\text{L.} \quad \int_0^a g(t)dt = \int_0^a F(t)dt - aF(a)$$

□.  $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  이면  $\int_0^a g(x)dx = -\frac{1}{2}$  이다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ
- [4점]

**정답** ③

## 해설

7.  $f(x)$ 의 한 부정적분이  $F(x)$ 이므로  $g(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ 입니다. 따라서  $g(0) = F(0) - F(a)$ 입니다. (참)

ㄴ.  $g(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ 의 양변을 0부터  $a$ 까지 적분하면  $\int_0^a g(x)dx = \int_0^a F(x)dx - aF(a)$ 가 됩니다. (참)

ㄷ.  $\int_0^a F(x)dx = \int_0^a 1 \cdot F(x)dx$ 를 부분적분하면 다음과 같습니다.

$$\left[ xF(x) \right]_0^a - \int_0^a xF'(x)dx$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_0^a g(x)dx &= aF(a) - \int_0^a xF'(x)dx - aF(a) \\ &= - \int_0^a xF'(x)dx\end{aligned}$$

이고,  $F'(x) = f(x) = \cos(x^2)$  이므로 위 식은  $-\int_0^a x \cos(x^2)dx = -\frac{1}{2} \sin(a^2)$

입니다.  $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  이면  $-\frac{1}{2} \sin(a^2) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$  입니다. (거짓)

## 12

일격필살 3회 · 미적분 추가문항

실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $x > 0$ 일 때  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ 이다.

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x)f(-x) = a$ 이다. (단,  $a$ 는 상수이다.)

$f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ.  $g(a) = 0$

ㄴ. 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 미분가능하다.

ㄷ. 함수  $g(x)$ 는  $x > 0$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ③

해설

$f(x)$ 는 연속함수이므로, (가)에서  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0) = 1$ 임을 알 수 있습니다. (나)의 양변에  $\lim_{x \rightarrow 0}$ 를 취하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)f(-x)\} = \{f(0)\}^2 = 1^2 = 1$$

입니다. 따라서  $a = 1$ 입니다.

ㄱ.  $g(a) = g(1)$ 입니다.  $g(x)$ 의 역함수는  $f(x)$ 이므로  $f(0) = 1$ 에서  $g(1) = 0$ 입니다.

(참)

ㄴ.  $x$ 가 음수일 때,  $f(x)f(-x) = 1$ 에서  $-x$ 는 양수이므로  $f(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{e^{\sqrt{-x}}} = e^{-\sqrt{-x}}$ 입니다. 따라서  $x < 0$ 일 때  $f(x) = e^{-\sqrt{-x}}$ 입니다. 즉 함수  $f(x)$ 에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\sqrt{-x}} & (x < 0) \\ e^{\sqrt{x}} & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로  $x = 0$ 에서의 미분가능성을 따져 보면 됩니다.  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

입니다. 우극한을 먼저 살펴보면

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \frac{e^{\sqrt{h}} - 1}{\sqrt{h}} \times \frac{1}{\sqrt{h}} \right\} = \infty$$

이므로, 우극한은 발산합니다. 마찬가지로 좌극한이 양의 무한대로 발산함을 알 수 있습니다. 따라서  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ 가 존재하지 않으므로 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 미분가능하지 않습니다. (거짓)

ㄷ.  $x \geq 0$ 에서  $y = e^{\sqrt{x}}$ 를  $x$ 에 대하여 정리하면  $x = (\ln y)^2$  ( $y \geq 1$ )입니다.  $x < 0$ 에서  $y = e^{-\sqrt{-x}}$ 를  $x$ 에 대하여 정리하면  $x = -(\ln y)^2$  ( $0 < y < 1$ )입니다. 각각에서  $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면 함수  $f(x)$ 의 역함수  $g(x)$ 를 얻습니다. 즉

$$g(x) = \begin{cases} -(\ln x)^2 & (0 < x < 1) \\ (\ln x)^2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

입니다. 이때 함수  $g(x)$ 는  $x \neq 1$ 인 모든 양수  $x$ 의 집합에서 미분가능하므로,  $x = 1$ 에서의 미분가능성만 조사하면 됩니다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{\ln(1+h)\}^2}{h} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-\{\ln(1+h)\}^2}{h} = 0 \end{aligned}$$

이므로  $g'(0) = 0$ 입니다. 따라서 함수  $g(x)$ 는 양수 전체의 집합에서 미분가능합니다. (참)