

A 해설편

01

2012학년도 수능 수리 가형 18번

정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ 인 함수 $f(x) = 2x \cos x$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $f'(a) = 0$ 이면 $\tan a = \frac{1}{a}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극댓값을 가지는 a 가 구간 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 에 있다.

ㄷ. 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 방정식 $f(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ⑤

해설

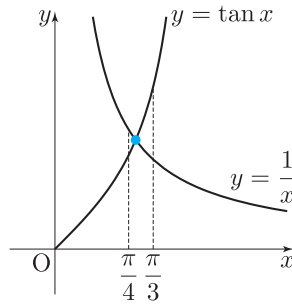
ㄱ. $f'(x) = 2 \cos x - 2x \sin x$ 입니다. $f'(a) = 2 \cos a - 2a \sin a = 0$ 이므로 $\tan a = \frac{1}{a}$ 입니다. (참)

ㄴ. $f'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(1 - \frac{\pi}{4}) > 0$ 이고 $f'(\frac{\pi}{3}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi < 0$ 이며, $f'(x)$ 는 연속함수이므로 구간 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 에서 $f'(x)$ 의 부호는 (+)에서 (-)로 변합니다. 따라서 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극댓값을 가지는 a 가 구간 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 에 있습니다. (참)

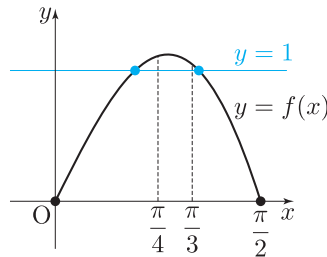
ㄷ. $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi > 1$, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} > 1$ 입니다. 또한 $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ 이므로 방정식 $f(x) = 1$ 은 두 구간 $(0, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖습니다. 그러므로 방정식 $f(x) = 1$ 은 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 적어도 두 개의 실근을 갖는데, 실근의 개수가 정확히 2인지는 아직 알 수 없습니다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려서 판단해보도록 하겠습니다.

ㄴ에 의해 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극대가 되는 a 가 구간 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 에 있습니다. 이는

ㄱ에 의해 방정식 $\tan x = \frac{1}{x}$ 의 해입니다. 두 함수 $y = \tan x$, $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



위 그림으로부터 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $\tan x = \frac{1}{x}$ 의 실근은 오직 하나임을 알 수 있습니다. 즉 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 는 하나뿐이고, $f(x)$ 는 그 점에서 극대입니다.



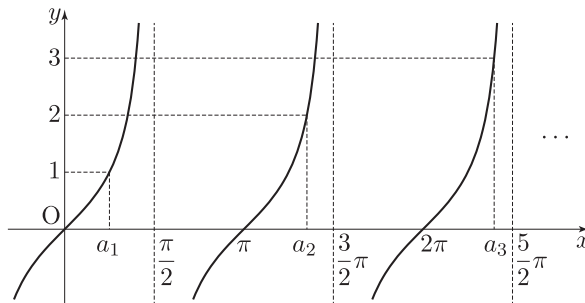
즉 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만납니다. 따라서 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2입니다. (참)

02

2014학년도 수능 수학 B형 18번

자연수 n 에 대하여 직선 $y = n$ 과 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$



정답 ④

해설

$0 < a_1 < \frac{\pi}{2}, \pi < a_2 < \frac{3}{2}\pi, 2\pi < a_3 < \frac{5}{2}\pi, \dots$ 이므로 임의의 자연수 n 에 대하여
 $(n-1)\pi < a_n < (n-1)\pi + \frac{\pi}{2}$ 입니다. 따라서 $\frac{n-1}{n}\pi < \frac{a_n}{n} < \frac{n-1}{n}\pi + \frac{\pi}{2n}$ 입니다.
 양변에 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 를 취하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \pi$ 입니다.

03

2018년 2월 일격필살 출제 19번

함수 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 가 극대가 되도록 하는 양수 x 를 작은 수부터 크기 순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

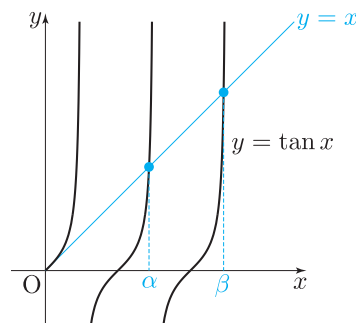
- ㄱ. 모든 자연수 n 에 대하여 $\tan a_n = a_n$ 이다.
- ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극솟값을 갖도록 하는 a 가 열린 구간 $(0, a_1)$ 에 적어도 하나 존재한다.
- ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \pi$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㅈ
- ④ ㄴ, ㅈ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㅈ

정답 ②

해설

- ㉑. 함수 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 $x = a_n$ 에서 극값을 가지므로 $a_n \cos a_n - \sin a_n = 0$ 입니다. 따라서 $\tan a_n = a_n$ 입니다.¹ (참)
- ㉒. $f'(x)$ 의 분모에서 $x^2 > 0$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호는 분자인 $x \cos x - \sin x$ 의 부호에 의해 결정됩니다. ㉑의 $\tan a_n = a_n$ 을 이용하기 위해 $x > 0$ 에서 두 함수 $y = \tan x$ 와 $y = x$ 의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



두 그래프의 교점의 x 좌표는 $f'(x) = 0$ 을 만족시킵니다. 첫 번째 교점의 x 좌표를 α , 두 번째 교점의 x 좌표를 β 라 하겠습니다. 두 구간 $(0, \alpha)$ 와 (α, β) 에서는 $f'(x)$

¹양수 k 에 대하여 $\cos k = 0$ 이면 $\sin k = \pm 1$ 이므로 $f'(k) \neq 0$ 입니다. 따라서 $\cos a_n \neq 0$ 입니다.

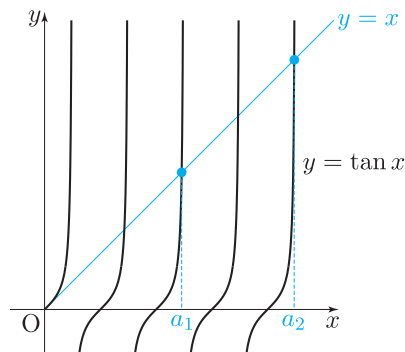
의 부호가 변하지 않으므로² 각 구간에 속하는 임의의 수를 대입하여 부호를 확인할 수 있습니다. 예를 들어, $x = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면 구간 $(0, \alpha)$ 에서 $f'(x) < 0$ 임을 알 수

있고, $x = \frac{7}{4}\pi$ 를 대입하면 구간 (α, β) 에서 $f'(x) > 0$ 임을 알 수 있습니다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 극솟값을 가지고 $x = \beta$ 에서 극댓값을 가집니다. $\beta = a_1$ 입니다. 따라서 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극솟값을 갖도록 하는 a 가 열린 구간 $(0, a_1)$, 즉 $(0, \beta)$ 에 하나 존재하며, 그 값은 $a = \alpha$ 입니다.

(참)

- ㄷ. ㄴ에서와 같은 방법으로 도함수 $f'(x)$ 의 부호를 판정하면 $f'(x) = 0$ 을 만족하는 양수 x 를 작은 순서대로 나열할 때, 홀수 번째 수에서 $f(x)$ 가 극소, 짝수 번째 수에서 $f(x)$ 가 극대가 됨을 알 수 있습니다.



한편, 모든 자연수 n 에 대하여 $2n\pi < a_n < \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$ 입니다. 각 변을 n 으로

나누면 $2\pi < \frac{a_n}{n} < \left(2 + \frac{1}{2n}\right)\pi$ 이고, 수열의 극한값의 대소관계에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{2n}\right)\pi$$

입니다. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi = 2\pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{2n}\right)\pi = 2\pi$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2\pi$ 입니다.

(거짓)

²함수 $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ 는 $x > 0$ 에서 연속함수이므로, $x = k$ 에서 부호가 바뀌려면 $f'(k) = 0$ 이어야만 합니다. 두 구간 $(0, \alpha)$ 와 (α, β) 에는 방정식 $f'(x) = 0$ 의 실근이 존재하지 않으므로 구간 내에서 부호가 바뀌지 않습니다.

04

2019학년도 9월 모의평가 수학 가형 20번

열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \cos x + 2x \sin x$ 가 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 극값을 가진다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha < \beta$) [4점]

보기

- ㉓. $\tan(\alpha + \pi) = -2\alpha$
- ㉔. $g(x) = \tan x$ 라 할 때, $g'(\alpha + \pi) < g'(\beta)$ 이다.
- ㉕. $\frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} < \sec^2 \alpha$

- (1) $\neg$
- (2) $\subseteq$
- (3) $\neg, \perp$
- (4) $\perp, \subseteq$
- (5) $\neg, \perp, \subseteq$

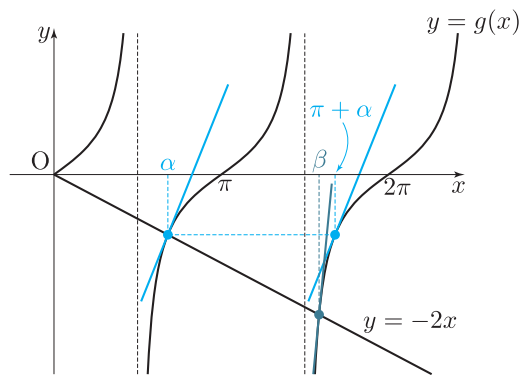
정답 ③

해설

7. $f'(x) = -\sin x + 2\sin x + 2x \cos x = \sin x + 2x \cos x$ 입니다. $f'(\alpha) = 0$ 이므로 $\sin \alpha + 2\alpha \cos \alpha = 0$ 입니다. 따라서 $\tan \alpha = -2\alpha$ 이고, $\tan(\alpha + \pi) = -2\alpha$ 입니다.

(참)

1. 7에서 α, β 는 곡선 $y = \tan x$ 와 직선 $y = -2x$ 의 교점의 x 좌표임을 알 수 있습니다. 그래프를 그려서 곡선 $y = g(x)$ 위의 두 점 $(\alpha + \pi, g(\alpha + \pi)), (\beta, g(\beta))$ 에서의 접선의 기울기를 비교하겠습니다.



그림에서 알 수 있듯이 $g(\alpha + \pi)$ 는 $g(\beta)$ 보다 큼니다. 곡선 $y = \tan x$ 에서 y 좌표가 0에 가까워질수록 접선의 기울기는 감소합니다. 따라서 $g'(\alpha + \pi) < g'(\beta)$ 입니다.

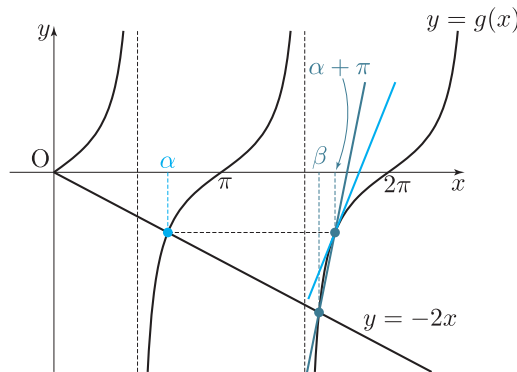
(참)

- ㄷ. 우변은 $g'(\alpha)$ 이고, ㄴ에서 알았듯 $g'(\alpha) = g'(\alpha + \pi)$ 이므로 $y = g(x)$ 위의 점 $(\alpha + \pi, g(\alpha + \pi))$ 에서의 접선의 기울기입니다. 따라서 좌변도 기울기로 해석하는 것이 합리적입니다.

ㄱ을 풀면서 얻은 $g(\alpha) = -2\alpha$, $g(\beta) = -2\beta$ 를 이용하면 좌변의 분자를 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} 2(\beta - \alpha) &= -2\tan \alpha + 2\tan \beta = g(\alpha) - g(\beta) \\ &= g(\alpha + \pi) - g(\beta) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 좌변은 $\frac{g(\alpha + \pi) - g(\beta)}{(\alpha + \pi) - \beta}$ 이고, 이는 두 점 $(\alpha + \pi, g(\alpha + \pi))$, $(\beta, g(\beta))$ 를 지나는 직선의 기울기입니다.



그림으로부터 $x = \alpha + \pi$ 에서의 접선의 기울기가 두 점 $(\alpha + \pi, g(\alpha + \pi))$, $(\beta, g(\beta))$ 를 지나는 기울기보다 작다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 $\frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} > \sec^2 \alpha$ 입니다. (거짓)

05

2018년 9평-수능 사이 일격필살 출제 18번

두 함수

$$f(x) = |\sin x|, \quad g(x) = -\frac{1}{9}(x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8)$$

에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 두 실근을 α , β 라 하자. 다음 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha < \beta$)

보기

ㄱ. 곡선 $y = g(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 위로 볼록하다.

ㄴ. $\frac{1}{2} < \beta < 1$

ㄷ. $\frac{f(\alpha) - g(\frac{1}{2})}{\alpha - \frac{1}{2}} < \frac{f(\beta) - g(-\frac{1}{2})}{\beta + \frac{1}{2}}$

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ③

해설

두 곡선과 교점의 위치

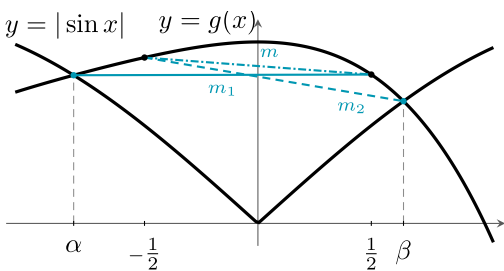
$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 두면

$$\begin{aligned} h(-1) &= \sin 1 - \frac{2}{3} > 0, & h\left(-\frac{1}{2}\right) &= \sin \frac{1}{2} - \frac{13}{16} < 0, \\ h\left(\frac{1}{2}\right) &= \sin \frac{1}{2} - \frac{35}{48} < 0, & h(1) &= \sin 1 > 0 \end{aligned}$$

입니다. 문제에서 교점이 두 개라고 하였으므로

$$-1 < \alpha < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \beta < 1$$

의 순서가 정해집니다.



볼록성과 할선의 기울기

$$g''(x) = -\frac{1}{9}(12x^2 + 18x + 8) = -\frac{2}{9}(6x^2 + 9x + 4)$$

이고 $6x^2 + 9x + 4$ 의 판별식은 음수입니다. 따라서 모든 실수 x 에서 $g''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y = g(x)$ 는 위로 볼록합니다. $\neg$ 은 참이고, $\frac{1}{2} < \beta < 1$ 이므로 $\neg$ 도 참입니다.

$f(\alpha) = g(\alpha)$, $f(\beta) = g(\beta)$ 이므로 $\neg$ 의 양변은 모두 곡선 $y = g(x)$ 위의 두 점을 잇는 할선의 기울기입니다. 그림처럼

$$m_1 = \frac{f(\alpha) - g(\frac{1}{2})}{\alpha - \frac{1}{2}}, \quad m_2 = \frac{f(\beta) - g(-\frac{1}{2})}{\beta + \frac{1}{2}}, \quad m = \frac{g(\frac{1}{2}) - g(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})}$$

이라 하면 $\neg$ 은 $m_1 < m_2$ 라는 주장이고, 두 점 $(-\frac{1}{2}, g(-\frac{1}{2}))$, $(\frac{1}{2}, g(\frac{1}{2}))$ 을 잇는 할선의 기울기 m 을 사이에 끼워 비교합니다.

먼저 m_1 과 m 은 오른쪽 끝점 $(\frac{1}{2}, g(\frac{1}{2}))$ 을 공유합니다. 위로 볼록한 곡선에서 오른쪽 끝점을 고정한 채 왼쪽 끝점을 오른쪽으로 옮기면 할선의 기울기가 작아지는데, 왼쪽 끝점이 $x = \alpha$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 로 옮겨가므로($\alpha < -\frac{1}{2}$)

$$m_1 > m$$

입니다. 다음으로 m 과 m_2 는 왼쪽 끝점 $\left(-\frac{1}{2}, g\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ 을 공유합니다. 같은 이유로 왼쪽 끝점을 고정한 채 오른쪽 끝점을 $x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = \beta$ 로 옮기면($\frac{1}{2} < \beta$) 기울기가 작아지므로

$$m > m_2$$

입니다. 두 부등식을 이으면 $m_1 > m > m_2$ 이므로 ㄷ의 부등호 방향은 반대이고, 정답은 ㄱ, ㄴ입니다.

06

2019학년도 수능 수학 가형 20번

점 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에서 곡선 $y = \sin x$ ($x > 0$)에 접선을 그어 접점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

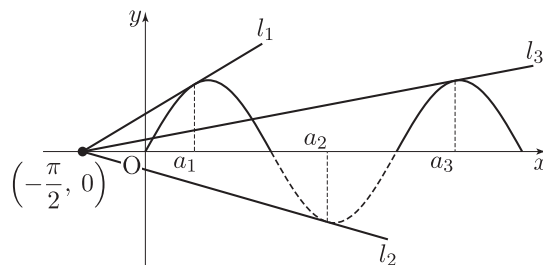
④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ⑤

해설

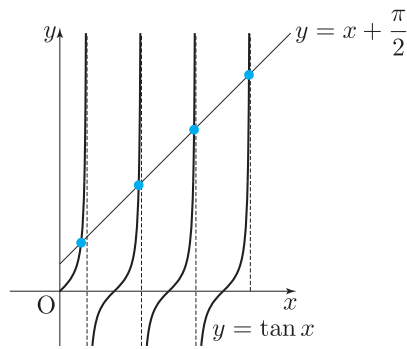
ㄱ. 주어진 상황을 그림으로 나타내어보면 다음과 같습니다.



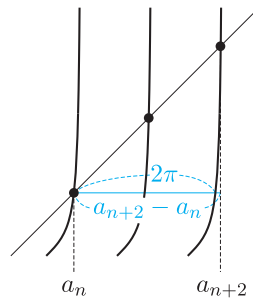
이때 임의의 점 $(a_n, \sin a_n)$ 에서의 접선의 기울기는 $\cos a_n$ 입니다. 이 접선의 기울기가 두 점 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(a_n, \sin a_n)$ 을 지나는 직선의 기울기와 같으므로 $\frac{\sin a_n}{a_n + \frac{\pi}{2}} =$

$\cos a_n$ 이 성립합니다. 이를 정리하면 $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$ 을 얻습니다. (참)

ㄴ. ㄱ은 a_n 이 방정식 $\tan x = x + \frac{\pi}{2}$ 의 실근임을 말하고 있습니다. 이를 이용하여 해석해봅시다.

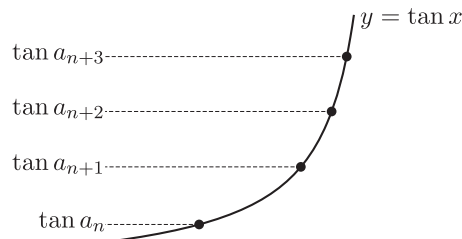


$y = \tan x$, $y = x + \frac{\pi}{2}$ 의 그래프를 그리면 그림과 같고, 두 점 $(a_n, \tan a_n)$, $(a_{n+2}, \tan a_{n+2})$ 를 지나는 직선의 기울기는 1입니다.



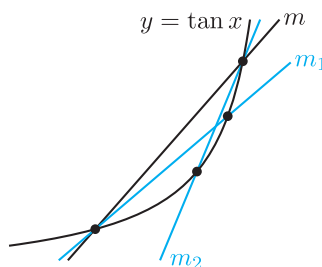
그러면 그림과 같이 $a_{n+2} > a_n + 2\pi$ 이므로 $a_{n+2} - a_n > 2\pi$ 이 성립합니다. 이 식에 $\neg$ 을 대입하면 $\neg$ 이 성립함을 알 수 있습니다. (참)

ㄷ. 네 항 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ 에 대한 정보와 $\neg$, $\neg$ 을 이용하여 해결해야 합니다.



1) $\tan a_{n+1} > \tan a_n$
이므로 $a_{n+1} > a_n$ 이
성립합니다.

$\neg$ 에 의해 a_n 이 증가하는 수열임을 알 수 있고, 1) 탄젠트함수의 주기성을 이용하여 $y = \tan x$ 에 네 점 $(a_{n+k} - (n+k-1)\pi, \tan a_{n+k})$ ($k = 0, 1, 2, 3$)을 표시하면 그림과 같습니다. $\neg$ 을 이용하기 위해 $\neg$ 을 변형하면 $a_{n+2} - a_n > a_{n+3} - a_{n+1}$ 이므로, 이 부등식이 성립하는지를 확인하려면 같은 변에 위치한 두 점씩 묶어서 해석할 방법을 찾아야 합니다.



이때 탄젠트함수가 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 아래로 볼록이므로 다음의 부등식이 성립합니다.²⁾

$$\frac{\tan a_{n+2} - \tan a_n}{a_{n+2} - (a_n + 2\pi)} < \frac{\tan a_{n+3} - \tan a_{n+1}}{a_{n+3} - (a_{n+1} + 2\pi)}$$

이 식에 ㄱ을 대입하고 정리하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+2} + \frac{\pi}{2} - \left(a_n + \frac{\pi}{2}\right)}{a_{n+2} - (a_n + 2\pi)} &< \frac{a_{n+3} - \frac{\pi}{2} - \left(a_{n+1} + \frac{\pi}{2}\right)}{a_{n+3} - (a_{n+1} + 2\pi)} \\ \frac{a_{n+2} - a_n}{a_{n+2} - a_n - 2\pi} &< \frac{a_{n+3} - a_{n+1}}{a_{n+3} - a_{n+1} - 2\pi} \\ \frac{1}{1 - \frac{2\pi}{a_{n+2} - a_n}} &< \frac{1}{1 - \frac{2\pi}{a_{n+3} - a_{n+1}}} \end{aligned}$$

따라서 $a_{n+2} - a_n > a_{n+3} - a_{n+1}$ 입니다.

(참)

2) 더 자세히 설명하자면,
두 점
 $(a_n - (n-1)\pi, \tan a_n)$
과
 $(a_{n+3} - (n+2)\pi, \tan a_{n+3})$
을 이은 기울기를 m
이라 하고, 좌변과
우변을 각각 m_1, m_2 라
할 때, $m_1 < m < m_2$
가 성립하기 때문입니다.

07

2019년 8월 일격필살 출제 20번

곡선 $y = 2x \cos x$ ($x > 0$)의 변곡점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. $-a_n = 2 \tan a_n$
 ㄴ. $2n\pi - a_n > n\pi$
 ㄷ. $\frac{a_n}{2n\pi - 2a_n} < \frac{a_{n+1}}{2(n+1)\pi - 2a_{n+1}}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ⑤

해설

변곡점 조건을 탄젠트 방정식으로 바꾸기

$y = 2x \cos x$ 를 두 번 미분하면

$$y'' = -2(2 \sin x + x \cos x)$$

입니다. 변곡점의 x 좌표에서는 $\cos x \neq 0$ 이므로 $y'' = 0$ 을 정리하면

$$2 \tan x + x = 0$$

을 얻습니다. 따라서 $-a_n = 2 \tan a_n$ 이고 ㄱ은 참입니다.

해가 놓이는 주기 구간

방정식 $2 \tan x + x = 0$ 의 양의 해는 각 구간

$$\left(\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi, n\pi \right)$$

에 하나씩 존재합니다. 그러므로 $a_n < n\pi$ 이고 $2n\pi - a_n > n\pi$ 이므로 ㄴ 도 참입니다.

ㄷ 의 분수를 한 변수의 함수로 보기

$b_n = n\pi - a_n$ 이라 두면 $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ 이고

$$\tan b_n = \frac{a_n}{2} = \frac{n\pi - b_n}{2}, \quad 2 \tan b_n + b_n = n\pi.$$

왼쪽 함수 $2 \tan x + x$ 가 증가하므로 b_n 도 n 에 따라 증가합니다. 한편

$$\frac{a_n}{2n\pi - 2a_n} = \frac{n\pi - b_n}{2b_n} = \frac{\tan b_n}{b_n}$$

입니다. $\frac{\tan x}{x}$ 는 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 증가하고 $b_n < b_{n+1}$ 이므로 ㄷ 도 참입니다. 따라서 정답은 $\text{ㄱ}, \text{ㄴ}, \text{ㄷ}$ 입니다.

08

2025학년도 6월 모의평가 수학(미적분) 30번

함수 $y = \frac{\sqrt{x}}{10}$ 의 그래프와 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 만나는 모든 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 \tan^2(a_{n+1} - a_n)$$

의 값을 구하시오.

정답 25

해설

교점이 놓이는 위치

교점의 정의에서

$$\tan a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{10}$$

입니다. $y = \tan x$ 가 연속인 각 구간에서 $y = \frac{\sqrt{x}}{10}$ 은 천천히 증가하므로, 충분히 큰 n 에서 교점은 각 점근선의 왼쪽에 하나씩 놓입니다. 따라서 어떤 $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ 에 대하여

$$a_n = (n-2)\pi + \alpha_n, \quad 0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

로 쓸 수 있습니다. 여기서

$$a_{n+1} - a_n \rightarrow \pi, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$$

을 얻습니다.

탄젠트의 차를 교점 조건으로 정리하기

탄젠트의 차 공식에서

$$\tan(a_{n+1} - a_n) = \frac{\tan a_{n+1} - \tan a_n}{1 + \tan a_{n+1} \tan a_n}$$

이고, 교점 조건 $\tan a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{10}$, $\tan a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}$ 을 대입하면

$$\tan(a_{n+1} - a_n) = \frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10} - \frac{\sqrt{a_n}}{10}}{1 + \frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100}} = \frac{10(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})}{100 + \sqrt{a_{n+1}a_n}}$$

입니다. 분자를 유리화하면

$$\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}$$

이므로

$$\tan(a_{n+1} - a_n) = \frac{10(a_{n+1} - a_n)}{(100 + \sqrt{a_{n+1}a_n})(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})}$$

입니다.

극한이 계산되도록 a_n 의 거듭제곱으로 나누기

구하는 극한이 $a_n^3 \tan^2(a_{n+1} - a_n)$ 의 꼴이므로 먼저 $a_n^{3/2} \tan(a_{n+1} - a_n)$ 의 극한을 구합니다. $a_n^{3/2} = a_n \cdot \sqrt{a_n}$ 을 분모의 두 인수에 하나씩 나누어 넣으면

$$a_n^{3/2} \tan(a_{n+1} - a_n) = \frac{10(a_{n+1} - a_n)}{100 + \sqrt{a_{n+1}a_n}} \cdot \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}} = \frac{10(a_{n+1} - a_n)}{\left(\frac{100}{a_n} + \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right) \left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} + 1\right)}$$

입니다. 앞에서 구한 $a_{n+1} - a_n \rightarrow \pi$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ 과 $a_n \rightarrow \infty$ 에서 $\frac{100}{a_n} \rightarrow 0$ 을 대입하면

$$a_n^{3/2} \tan(a_{n+1} - a_n) \rightarrow \frac{10\pi}{(0+1)(1+1)} = 5\pi$$

입니다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 \tan^2(a_{n+1} - a_n) = (5\pi)^2 = 25\pi^2$$

이고, 구하는 값은

$$\frac{1}{\pi^2} \cdot 25\pi^2 = 25$$

입니다.

09

2025학년도 대학수학능력시험 수학(미적분) 30번

두 상수 a ($1 \leq a \leq 2$), b 에 대하여 함수 $f(x) = \sin(ax + b + \sin x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ f(0) = 0, \ f(2\pi) = 2\pi a + b$$

$$(나) \ f'(0) = f'(t) \text{인 양수 } t \text{의 최솟값은 } 4\pi \text{이다.}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극대인 α 의 값 중 열린구간 $(0, 4\pi)$ 에 속하는 모든 값의 집합을 A 라 하자. 집합 A 의 원소의 개수를 n , 집합 A 의 원소 중 가장 작은 값을 α_1 이라 하면 $n\alpha_1 - ab = \frac{q}{p}\pi$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정답 17

해설

먼저 (a, b) 의 후보를 줄이기

조건 (가)에서

$$f(0) = \sin b = 0, \quad f(2\pi) = \sin(2\pi a + b) = 2\pi a + b$$

입니다. 방정식 $\sin x = x$ 의 실근은 $x = 0$ 뿐이므로 $2\pi a + b = 0$, 즉 $b = -2\pi a$ 입니다. 또 $\sin b = 0$ 이고 $1 \leq a \leq 2$ 이므로

$$(a, b) = (1, -2\pi), \quad \left(\frac{3}{2}, -3\pi\right), \quad (2, -4\pi)$$

만 가능합니다.

$a = 1$ 또는 $a = 2$ 이면 이미 $t = 2\pi$ 에서 $f'(t) = f'(0)$ 이 되어 조건 (나)와 맞지 않습니다. 따라서 남는 값은

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -3\pi$$

입니다.

극대가 되는 위치 세기

이때

$$f(x) = -\sin\left(\frac{3}{2}x + \sin x\right), \quad f'(x) = -\cos\left(\frac{3}{2}x + \sin x\right)\left(\frac{3}{2} + \cos x\right).$$

항상 $\frac{3}{2} + \cos x > 0$ 입니다. 따라서 도함수의 부호 변화는 $\cos\left(\frac{3}{2}x + \sin x\right)$ 가 결정하고, 극값은

$$\frac{3}{2}x + \sin x = m\pi + \frac{\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

에서 생깁니다. 또한 $h(x) = \frac{3}{2}x + \sin x$ 는 $h'(x) = \frac{3}{2} + \cos x > 0$ 이므로 계속 증가합니다.

$0 < x < 4\pi$ 에서 $h(x)$ 는 0부터 6π 까지 한 번씩 지나갑니다. $f(x) = -\sin h(x)$ 가 극대가 되려면

$$h(x) = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}, \quad \frac{11\pi}{2}$$

이어야 하므로 이에 대응하는 해는 세 개입니다. 가장 작은 해는 $h(\pi) = \frac{3\pi}{2}$ 에서 $\alpha_1 = \pi$ 입니다. 따라서 $n = 3$, $\alpha_1 = \pi$ 이고

$$n\alpha_1 - ab = 3\pi - \left(\frac{3}{2}\right)(-3\pi) = \frac{15}{2}\pi.$$

이므로 $p = 2$, $q = 15$ 이고 $p + q = 17$ 입니다.

10

2026학년도 9월 모의평가 수학(미적분) 28번

삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = g(x) - \tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\{g(0)\}^2$ 의 값은?

(가) $f(0) = 0, f''(\pi) = 0$

(나) $\sin g(\pi) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$

① -12

② -6

③ -1

④ 3

⑤ 9

정답 ②

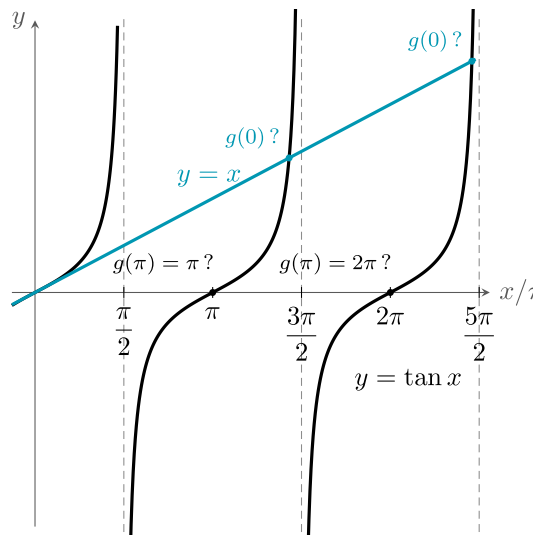
해설

$x - \tan x$ 의 두 가지 역할

$h(x) = x - \tan x$ 라 두면 주어진 식은 $f = h \circ g$ 입니다. 먼저 $f(0) = 0$ 은

$$g(0) - \tan g(0) = 0$$

을 뜻하므로 $g(0)$ 은 두 그래프 $y = x, y = \tan x$ 의 교점의 x 좌표입니다. 반면 $\sin g(\pi) = 0$ 은 $g(\pi)$ 가 정수배 π 라는 뜻입니다. 두 조건의 역할을 구분해야 합니다.



$g(\pi)$ 의 후보를 먼저 정하기

함수 g 는 연속이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$ 입니다. 또 모든 실수 x 에서 $\tan g(x)$ 가 정의되어야 하므로 $g(x)$ 는 탄젠트의 점근선을 가로지르지 않습니다. 따라서 정수 k 에 대하여 $g(\pi) = k\pi$ 라 할 때 가능한 값은

$$g(\pi) = \pi \quad \text{또는} \quad g(\pi) = 2\pi$$

뿐입니다.

$$f'(x) = g'(x)\{1 - \sec^2 g(x)\} = -g'(x) \tan^2 g(x)$$

이고 $\tan g(\pi) = 0$ 이므로 $f'(\pi) = 0$ 입니다. 여기에 $f''(\pi) = 0$ 도 주어졌으므로 삼차함수 f 는

$$f(x) = A(x - \pi)^3 + g(\pi)$$

의 꼴입니다.

두 후보 비교

$g(\pi) = \pi$ 라고 하면 $f(\pi) = \pi$ 이고 $f(0) = 0$, $f'(\pi) = 0$, $f''(\pi) = 0$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^3 + \pi$$

가 됩니다. $g(\pi) = \pi$ 에서 시작한 $g(x)$ 는 점근선을 건너지 못하므로 $\frac{3\pi}{2}$ 의 왼쪽에서 접근합니다. 이때

$$g(x) - \tan g(x) \rightarrow -\infty$$

이지만 위 삼차함수는 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로 모순입니다.

따라서 $g(\pi) = 2\pi$ 입니다. 이 경우에는 $g(x)$ 가 $\frac{3\pi}{2}$ 의 오른쪽에서 접근하고 $g(x) - \tan g(x) \rightarrow \infty$ 이므로 조건과 맞습니다. 따라서

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2}(x - \pi)^3 + 2\pi.$$

마지막으로

$$f'(0) = \frac{6}{\pi^2}(0 - \pi)^2 = 6$$

이고, 처음에 확인한 $\tan g(0) = g(0)$ 을 도함수 식에 대입하면

$$6 = -g'(0) \tan^2 g(0) = -g'(0)\{g(0)\}^2.$$

따라서 $g'(0)\{g(0)\}^2 = -6$ 입니다.