제2교시

수학 영역

홀수형

1. 정의역이 $\{x|0\le x\le\pi\}$인 함수 $f(x)=2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f'(a)=0$이면 $\tan a=\dfrac{1}{a}$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$에 있다.

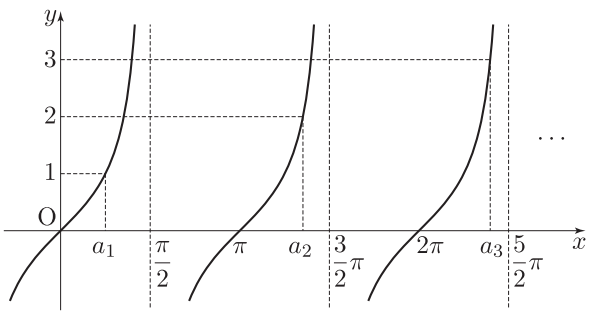
ㄷ. 구간 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\pi}{4}$ ② $\dfrac{\pi}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\dfrac{5}{4}\pi$



3. 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$가 극대가 되도록 하는 양수 x를 작은 수부터 크기 순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [점]

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $\tan a_n=a_n$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 갖도록 하는 a가 열린 구간 $(0,a_1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\pi$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 열린구간 $(0,2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+2x\sin x$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가진다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\beta$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan(\alpha+\pi)=-2\alpha$

ㄴ. $g(x)=\tan x$라 할 때, $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$이다.

ㄷ. $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}<\sec^2\alpha$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 두 함수

$$f(x)=|\sin x|, \qquad g(x)=-\frac{1}{9}(x^4+3x^3+4x^2-8)$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근을 α, β라 하자. 다음 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\beta$)

<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=g(x)$는 구간 $(-\infty,\infty)$에서 위로 볼록하다.

ㄴ. $\frac{1}{2}<\beta<1$

ㄷ. $\frac{f(\alpha)-g(\frac{1}{2})}{\alpha-\frac{1}{2}}<\frac{f(\beta)-g(-\frac{1}{2})}{\beta+\frac{1}{2}}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 점 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$에서 곡선 $y=\sin x$ $(x>0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan a_n=a_n+\frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2}-\tan a_n>2\pi$

ㄷ. $a_{n+1}+a_{n+2}>a_n+a_{n+3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 곡선 $y=2x\cos x\ (x>0)$의 변곡점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $-a_n=2\tan a_n$

ㄴ. $2n\pi-a_n>n\pi$

ㄷ. $\dfrac{a_n}{2n\pi-2a_n}<\dfrac{a_{n+1}}{2(n+1)\pi-2a_{n+1}}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\lim_{n\to\infty} a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오.

9. 두 상수 a $(1 \le a \le 2)$, b에 대하여 함수 $f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$, $f(2\pi)=2\pi a+b$
(나) $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0,4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면 $n\alpha_1-ab=\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [점]

10. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)-\tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\{g(0)\}^2$의 값은?

(가) $f(0)=0$, $f''(\pi)=0$
(나) $\sin g(\pi)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9