일격필살 모의고사 4회 해설

정답과 해설

23번	24번	25번	26번
①	⑤	①	④
27번	**28번**	**29번**	**30번**
④	⑤	**325**	121

23. 두 벡터 $\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(-2,5)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은? [2점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-2)+1\times5=-1$

정답 : ①

24. 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선이 점 $(2\sqrt{2},\ a)$를 지난다. a의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\left(\sqrt{2},\ 2\right)$에서의 접선의 방정식은 $\sqrt{2}x-\dfrac{2y}{4}=1$입니다. 점 $\left(2\sqrt{2},\ a\right)$가 이 직선 위의 점이므로 $\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\right)-\dfrac{2a}{4}=1$에서 $a=6$입니다.

정답 : ⑤

25. 좌표공간의 구 $x^2+y^2+z^2-4x+2y+4z=0$위의 한 점 P에 대하여 점 P의 z좌표의 최댓값은? [3점]

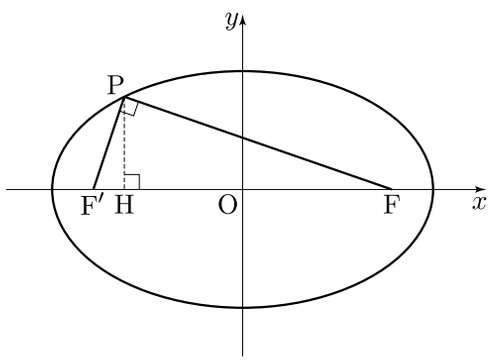
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

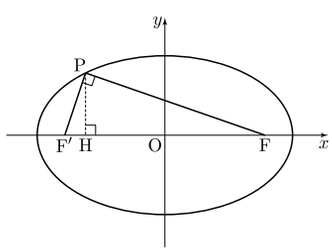
주어진 구의 방정식을 정리하면
$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$이므로 주어진 방정식은
중심이 점 $(2,\ -1,\ -2)$이고 반지름의 길이가 3인 구를
나타냅니다. 따라서 점 P의 z좌표의 최댓값은 $-2+3=1$입니다.

정답 : ①

26. 좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 x축 위의 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원이 있다. 이 타원 위의 점 P에 대하여 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\angle\mathrm{FPF'}=90°$이고 $\overline{\mathrm{FH}}=8$, $\overline{\mathrm{F'H}}=1$일 때, 이 타원의 단축의 길이는?
(단, 점 P는 제2사분면의 점이다.) [3점]

① $2\cdot3^{\frac{1}{4}}$ ② $3\cdot2^{\frac{1}{4}}$ ③ $5\cdot2^{\frac{1}{4}}$
④ $6\cdot2^{\frac{1}{4}}$ ⑤ $5\cdot3^{\frac{1}{4}}$





두 삼각형 PF′H, FPH는 서로 닮음이므로 $\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{F'H}}=\overline{\mathrm{FH}}:\overline{\mathrm{PH}}$입니다. 따라서 $\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{FH}}\times\overline{\mathrm{F'H}}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=2\sqrt{2}$입니다.
$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FH}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2}=6\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{F'H}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2}=3$이므로 이 타원의 장축의 길이는 $6\sqrt{2}+3$입니다. 또한 $\overline{\mathrm{FF'}}=9$이므로 타원의 단축의 길이를 구하면 다음과 같습니다.

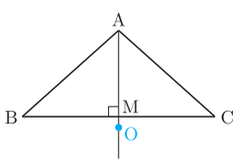
$$(\text{단축의 길이})=\sqrt{(\text{장축의 길이})^2-(\text{초점 거리})^2}$$
$$=\sqrt{(6\sqrt{2}+3)^2-9^2}$$
$$=\sqrt{36\sqrt{2}}$$
$$=6\cdot2^{\frac{1}{4}}$$

정답 : ④

27. 좌표공간 위에 세 점 $\mathrm{A}(1,0,1)$, $\mathrm{B}(3,2,2)$, $\mathrm{C}(3,-2,0)$이 있다. 삼각형 ABC의 외심의 좌표가 (a,b,c)일 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$이므로 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형입니다. 따라서 삼각형 ABC의 외심은 점 A를 지나고 직선 BC에 수직인 직선 위에 있습니다.



선분 BC의 중점 M에 대하여 $\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{5}$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=2$입니다. 따라서 $\sin(\angle\mathrm{ABC})=\frac{2}{3}$입니다. 한편 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{ABC})}=2R$입니다. 따라서 $R=\frac{9}{4}$입니다. 즉 $\overline{\mathrm{AM}}:\overline{\mathrm{OM}}=8:1$이므로 점 O는 두 점 A, M을 $9:1$로 외분하는 점입니다.

$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{M}(3,\ 0,\ 1)$이므로 점 O의 좌표는 다음과 같습니다.

$$\left(\frac{3\times 9-1\times 1}{9-1},\ \frac{0\times 9-0\times 1}{9-1},\ \frac{1\times 9-1\times 1}{9-1}\right)$$

$$=\left(\frac{13}{4},\ 0,\ 1\right)$$

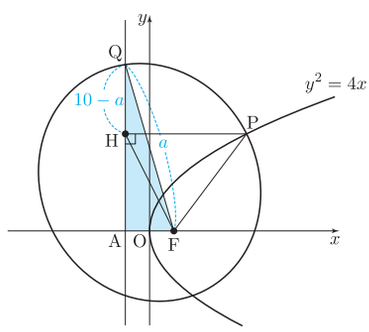
따라서 $a+b+c=\frac{17}{4}$입니다.

정답 : ④

28. 포물선 $y^2=4x$위에 있고 제 1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\mathrm{F}(1,0)$에 대하여, 두 점 F , H를 초점으로 하고 점 P를 지나는 타원이 포물선의 준선과 제 2사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{FH}}=2\sqrt{5}$일 때, 선분 FQ의 길이는? [4점]

① $\frac{46}{7}$ ② $\frac{47}{7}$ ③ $\frac{48}{7}$ ④ 7 ⑤ $\frac{50}{7}$

포물선의 준선과 x축의 교점을 A라 하겠습니다.



$\overline{\mathrm{FH}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AF}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=4$입니다. 즉 점 P의 y좌표는 4이므로 $\mathrm{P}(4,\ 4)$이고, $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PH}}=5$입니다. 따라서 타원의 장축의 길이는 10입니다.

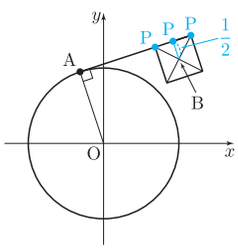
$\overline{\mathrm{FQ}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{HQ}}=10-a$입니다. 즉 $\overline{\mathrm{AQ}}=14-a$이므로 삼각형 AFQ에서 피타고라스의 정리에 의해 $(14-a)^2+2^2=a^2$이 성립합니다. 따라서 $a=\frac{50}{7}$입니다.

정답 : ⑤

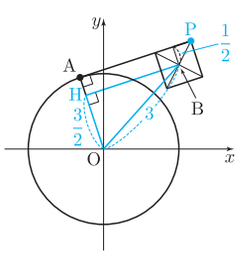
29. 좌표평면 위에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 2인 원 C가 있다. 원 C 위의 한 점 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 R가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 대각선의 교점은 점 $\mathrm{B}(2,\ \sqrt{5})$이다.
>
> (나) 정사각형 R 위의 임의의 점 P에 대하여
> $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$인 점 P가 무수히 많다.

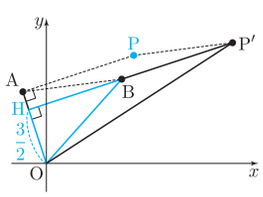
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2$의 최댓값이 $a+b\sqrt{3}$일 때, $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



위 그림과 같이 점 A에서의 접선이 정사각형의 한 변을 포함하면 (나) 조건을 만족하는 점 P가 무수히 많습니다. 이때 점 A에서의 접선과 점 B 사이의 거리는 $\frac{1}{2}$입니다.



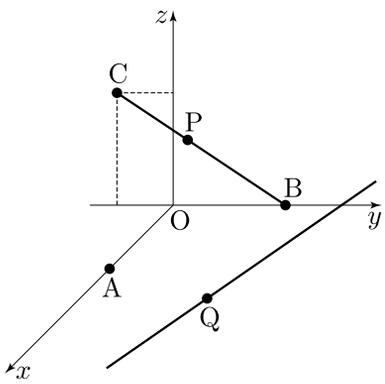
위 그림과 같이 점 P가 접선 위의 두 꼭짓점 중 점 A에서 더 멀리 있는 점일 때 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2$의 값이 최대가 됩니다. 점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OH}}=\frac{3}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BH}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$입니다. 즉 접선 방향 길이는 $\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}$입니다.

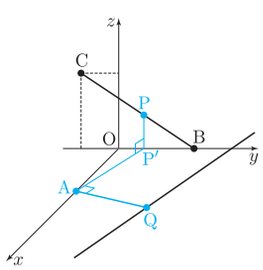


$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$를 점 B가 시점이 되도록 평행이동했을 때, 종점을 P'이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}$입니다. 이때 $\left|\overrightarrow{\mathrm{HP}'}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{HB}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}'}\right|=3\sqrt{3}+\frac{1}{2}$입니다. 따라서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2$의 최댓값은 $\frac{59}{2}+3\sqrt{3}$이므로 $10(a+b)=325$입니다.

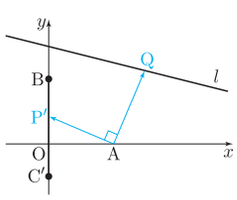
정답 : 325

30. 좌표공간에 세 점 A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, −1, 2)가 있고, xy평면 위에 두 점 (12, 0, 0), (0, 3, 0)을 지나는 직선 l이 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P와 직선 l 위를 움직이는 점 Q에 대하여 직선 AP와 직선 AQ가 서로 수직일 때, 선분 OQ의 길이의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $\dfrac{m^2}{M^2}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

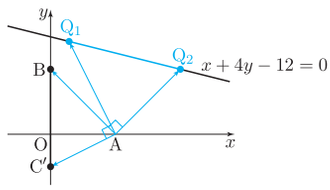




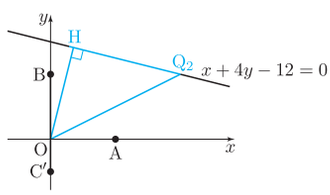
점 P의 xy평면 위로의 정사영을 P′이라 하면 직선 P′P는 xy평면과 수직입니다. 또한 직선 AP와 직선 AQ가 서로 수직입니다. 따라서 삼수선의 정리에 의해 직선 AP′과 직선 AQ도 서로 수직입니다. 즉 직선 AP′과 직선 AQ가 수직이 되는 점 Q가 어디에 존재하는지 파악하면 됩니다.



점 P′은 두 점 B (0, 2, 0), C′ (0, −1, 0)을 잇는 선분 위를 움직입니다. 점 Q는 점 A를 지나고 직선 AP′과 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점입니다. 따라서 점 Q는 다음 그림의 선분 위를 움직입니다.



Q_1은 점 P′이 점 C′일 때의 Q이고, Q_2는 점 P′이 점 B일 때의 Q입니다. 직선 AQ_1의 기울기는 -2이고 직선 l의 방정식은 $x+4y-12=0$이므로 $x+4y-12=0$과 $y=-2x+4$를 연립하면 $x=\dfrac{4}{7}$, $y=\dfrac{20}{7}$입니다. 직선 AQ_2의 기울기는 1이므로 $x+4y-12=0$과 $y=x-2$를 연립하면 $x=4$, $y=2$를 얻습니다.



원점에서 직선 $x+4y-12=0$에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $\left(\dfrac{12}{17},\ \dfrac{48}{17}\right)$이므로 점 H는 선분 Q_1Q_2 위에 있습니다. 즉 $\overline{OQ}$의 최솟값은 직선 $x+4y-12=0$과 원점 사이의 거리인 $\dfrac{12}{\sqrt{17}}$입니다. 한편 $\overline{OQ}$의 최댓값은 $\overline{OQ_2}=2\sqrt{5}$입니다. 따라서 $\dfrac{m^2}{M^2}=\dfrac{36}{85}$이고 $p+q=121$입니다.

정답 : 121