

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호						—				
----	--	-------	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

심장이 하늘에서 땅까지 아찔한 진자운동을 계속했다

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하십시오.

- 공통과목 1~8쪽
- 선택과목
 - 확률과 통계 (π π)
 - 미적분 13~16쪽
 - 기하 (π π)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{2} \times 4^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 2$

2. 함수 $f(x) = 5x^3 - 3x + 5$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은?
[2점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f' = 15x^2 - 3$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$a_1 - a_2 = 2, \quad a_1 + a_2 = 10$

를 만족시킬 때, a_3 의 값은? [3점]

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

$\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} = \frac{1+r}{1-r} = 5 \rightarrow r = \frac{2}{3}, a_1 = 6$

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = B$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 2$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

5. 함수 $f(x) = (2x^2 + x)(x^2 + x)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

$$3 \cdot 3 + 5 \cdot 2$$

7. 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 가 $x = 1$,
 $x = 2$ 에서 극값을 가질 때, $|a \times b|$ 의 값은? [3점]

- ① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

$$f' = 3x^2 + 2ax + b = 3(x-1)(x-2)$$

$$a = -\frac{9}{2}, b = 6$$

6. 두 양수 a, b ($b < a$)가

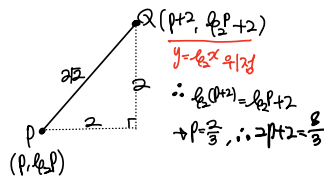
$$\log_2 a + \log_2 b = 2, \quad \log_4 (a^2 + b^2) = \log_2 (a - b) + \frac{1}{2}$$

를 만족시킬 때, $(a+b)^2$ 의 값은? [3점]

- ① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

8. 곡선 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 두 점 P, Q에 대하여 직선 PQ의 기울기가 1이고 $PQ = 2\sqrt{2}$ 일 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 합은? [3점]

- ㉠ $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4



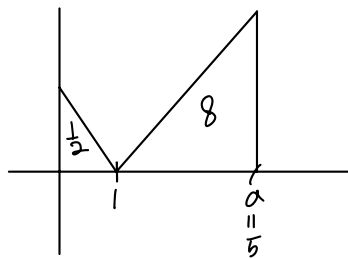
9. 시각이 $t(t \geq 0)$ 일 때 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가

$v(t) = |x - 1|$

이다. 시각 $t = a$ 에서 점 P의 위치가 $\frac{17}{2}$ 일 때, a 의 값은?

[3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ㉠ 5 ⑤ 6



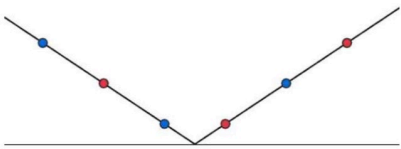
10. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$\sum_{n=1}^3 |a_{2n-1}| = \sum_{n=1}^3 |a_{2n}| = 3$

를 만족시킬 때, a_{20} 의 값은? [4점]

- ① 7 ② 9 ㉠ 11 ④ 13 ⑤ 15

$|a_n|$ 의 그래프의 대칭성을 고려하면
 $|a_1| + |a_3| + |a_5| = |a_2| + |a_4| + |a_6|$ 인 상황은
다음 그림과 같음을 알 수 있다.



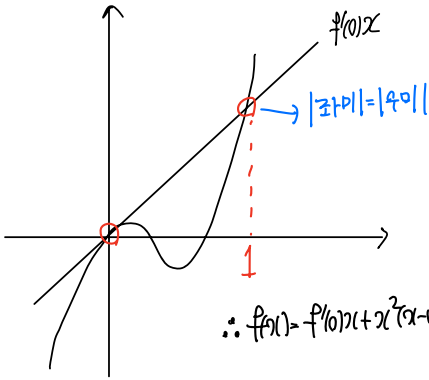
(파란 점 $|a_1|, |a_3|, |a_5|$, 빨간 점 $|a_2|, |a_4|, |a_6|$)
따라서 공차를 $d(d > 0)$ 라 하면
 $a_n = d\left(n - \frac{3+4}{2}\right)$ 라 둘 수 있고
 $|a_1| + |a_3| + |a_5| = 3$ 에서 중항의 성질에 의해
 $|a_5| = |a_2| = 1$ 이고 $d = \frac{2}{3}$ 이다.
 $\therefore a_{20} = 11$

11. $f(0)=0$ 이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 두 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < k) \\ f'(0)x & (x \geq k) \end{cases}, \quad h(x) = \left| \lim_{t \rightarrow x+} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right|$$

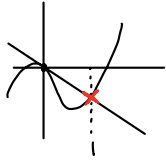
가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합이 1일 때, $f(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 42 ② 44 ③ 46 ④ 48 ⑤ 50



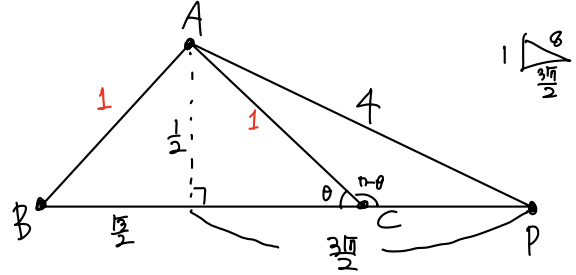
$\therefore f(1) = f'(0) \cdot 1 + \frac{1}{6}(1-1)^3$, $f'(1) = -f'(0) \rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$
 $\therefore f(4) = 46$

[실제 그림]



12. $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC의 연장선 위의 점 P를 $\overline{AP} = 4$ 가 되도록 잡는다. 두 삼각형 ABC와 APC의 외접원의 반지름의 길이가 각각 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $\overline{BP} \times \overline{CP}$ 의 값은? [4점]

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19



$\triangle ABC$ 에서: $\frac{1}{\sin \theta} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \overline{BP} \times \overline{CP} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 15$

13. $f(0) \times f(1) \times f(2) = 0$ 인 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(x+1) + f(x+2)}{f(x) \times f(x+1) \times f(x+2)}$$

의 값이 존재할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

- < 보 기 >
- ㉠ $f(0) + f(1) + f(2) = 0$
 ㉡ 함수 $f(x)$ 가 일차함수이면, $f(1) = 0$ 이다.
 ㉢ 함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이고 $f(2) - f(0) = 1$ 이면, $f(3) = 6$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉢

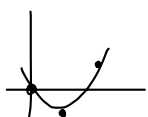
㉣. 7 에 의해 $f(0), f(1), f(2)$ 중 적어도 하나 0
 and
 $f(0) + f(1) + f(2) = 0$
 by 직선의 대칭성 $\rightarrow f(1) = 0$ ($f(0) = 0$ or $f(2) = 0$ 이면 $f(1) = 0$)

㉤. ㉡에 의해 $f(1) = 0$ 일 경우 이차함수 $f(x)$ 가
 한 직선 위 세 점을 지남 (㉡)

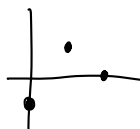
$f(0) = 0$ 인 경우 $f(1) + f(2) = 0, f(2) - f(0) = 1$
 $\rightarrow f(1) = -1, f(2) = 1$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$f(3) = 6$$



$f(2) = 0$ 인 경우 같은 논리로 $f(0) = -1, f(1) = 1$



f 은 최고차항인 이차 (㉡)

14. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 0$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여

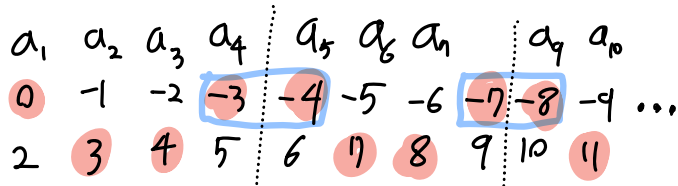
$$|a_n - 1| = n,$$

$$\sum_{k=1}^{4n} a_k = 4n, \quad a_{4n} a_{4n+1} > 0$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{26} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

$$a_n = \pm n$$



$$\sum_1^{26} a_n = \sum_1^{24} a_n + a_{25} + a_{26} = 24 + a_1 + a_2 = 27$$

15. 두 다항함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=0$, $x=t$ ($t>0$)로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$ 라 하자.

$$S(t) = \frac{1}{3}t^3 + at^2 + bt$$

이다. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$ 이고

$$\int_0^x (f(t))^2 dt - \int_0^x (g(t))^2 dt = 2x^2(x^2 + x + 2)$$

일 때, $f(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

[풀이]

$$S(t) = \int_0^t (f(t) - g(t)) dt = \frac{1}{3}t^3 + at^2 + bt \text{의 양변을 미분하면}$$

$$f(x) - g(x) = x^2 + 2ax + b \text{을 얻고 (1)}$$

$$\int_0^x (f(x))^2 dx - \int_0^x (g(x))^2 dx = 2x^2(x^2 + x + 2) \text{의 양변을 미분하면}$$

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = 8x^3 + 6x^2 + 8x \text{이다. (1)에 대입하면}$$

$$8x^3 + 6x^2 + 8x = (x^2 + 2ax + b)(f(x) + g(x)) \text{이고 } f(x), g(x) \text{가 다항함수이므로 계수비교를 통해}$$

$$f(x) + g(x) = 8x, a = \frac{3}{8}, b = 1 \text{을 얻는다. (2)}$$

(1), (2)에 $x=4$ 를 대입하면

$$f(4) + g(4) = 32, f(4) - g(4) = 20 \text{이므로 } f(4) = 26 \text{이다.}$$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-5) = \log_4(x+15)$$

를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

$$(x-5)^2 = x+15 \rightarrow x = 10 \text{ or } 10$$

$$(\because x > 5)$$

$$(10)$$

17. 다항함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1, f(0) = 0$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$f(x) = x^3 + x^2 + x$$

$$f(2) = (14)$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k)^2 = 100, \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k \times b_k) = 10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + \sum_{k=1}^{10} (b_k)^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

$100 = A + 2 \times 10 \rightarrow (80)$

19. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{x^3} = 5$$

일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$n=2 \text{ 대입} \rightarrow \frac{f(2)}{2^3} = 5$

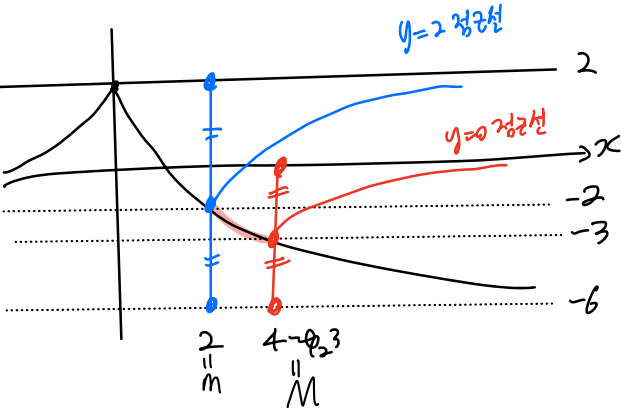
(40)

20. 실수 $a (a > 1)$ 와 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & (x \leq 1) \\ 2^{4-x} - 6 & (1 < x < a) \\ -2^{4-x} + 2^{5-a} - 6 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족하도록 하는 실수 a 의 범위가 $m \leq a < M$ 일 때, $3 \times m^M$ 의 값을 구하시오. [4점]

x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t 의 개수가 2이다.



$3 \times m^M = (16)$

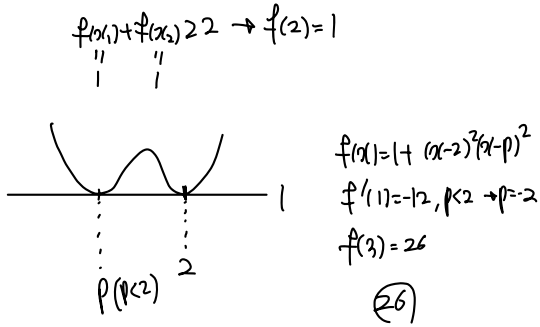
21. 최고차항의 계수가 1이고 최솟값 1을 갖는 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$x_1 < x_2$ 인 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(f(x_1) + f(x_2)) \leq 1$$

를 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2) 의 개수는 1이다.

$f'(1) = -12$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]



22. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = \sqrt{2}$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \sqrt{(a_n)^2 + 1}$$

를 만족시킨다. 100 이하의 두 짝수 $p, q (p < q)$ 에 대하여

$\left(\frac{1}{a_p} + \frac{1}{a_q}\right)^2$ 의 값이 유리수가 되도록 하는 순서쌍 (p, q) 의

개수를 구하시오. [4점]

$a_n = \sqrt{n+1}$ 이다. 이를 $\left(\frac{1}{a_p} + \frac{1}{a_q}\right)^2$ 에 대입하여 정리한 값이 유리수이기

위해 (통분한 후 제곱할텐데 곱셈공식으로 전개해도 유효리 없이 같은 결론을 얻는다.) 임의의 세 실수 k, x, y 에 대해 $p = kx^2 - 1, q = ky^2 - 1$

$(x < y)$ 꼴이다.

p, q 가 짝수이므로 세 실수 k, x, y 는 모두 홀수이다. $p, q \leq 100$ 임을 유념하여 카운팅하면 다음과 같다.

$k=1$ 일 때, x, y 의 값은 3, 5, 7, 9 중 하나이다.

$(p, q \neq 0)$ 이므로 $x, y = 1$ 인 경우 제외)

${}_4C_2 = 6$ 가지

$k=3$ 일 때, x, y 의 값은 1, 3, 5 중 하나이다.

${}_3C_2 = 3$ 가지

$k=5$ 일 때, x, y 의 값은 1, 3 중 하나이다.

${}_2C_2 = 1$ 가지

$k=7$ 일 때, x, y 의 값은 1, 3 중 하나이다.

${}_2C_2 = 1$ 가지

$k=9$ 일 때, x, y 의 값은 1, 3 중 하나이다.

하지만, 이는 $k=1$ 에서 센 것과 중복이다.

$k=11$ 일 때, x, y 의 값은 1, 3 중 하나이다.

${}_2C_2 = 1$ 가지

$k \geq 13$ 부터는 서로 다른 x, y 가 존재하지 않는다.

따라서 $6 + 3 + 1 + 1 + 1 = 12$ 가지이다.

(12)

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 8 ③ 9 ④ 16 ⑤ 27

24. $\int_1^4 \underbrace{(x \times \sqrt{x})}_{x^{\frac{5}{2}}} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

$\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}+1} \Big|_1^4 = \frac{2}{5} \times 31 = \left(\frac{62}{5}\right)$

25. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{10}$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - 0 \right) = \frac{1}{10} \Rightarrow a_1 = 5$$

26. 함수 $f(x) = x^2 \ln x$ 에 대하여 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(e^x) dx$ 의 값은? [3점]

- ① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

$$f(x) = x^2 \ln x + x, \quad f'(e^x) = 2xe^x + e^x$$

$$(2x-1)e^x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = e$$

27. 두 상수 a, b 와 $x > 0$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{4}{x^2 + 1} \times \sin \frac{\pi}{2} x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times b$ 의 값은? [3점]

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=atanbx$ 가 만나는 임의의 점의 x 좌표를 k 라 하면, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$ 에서의 접선은 x 축과 만나지 않는다.

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\begin{aligned} \int x \cdot \frac{1}{x^2} dx &= a \tan b x \int x \cdot \frac{1}{x^2} dx = 0 \\ &\downarrow \\ &\frac{2\pi(\cos^2 x (\frac{1}{x^2+1}) - 2x \cdot 4\sin \frac{\pi}{2} x)}{(x^2+1)^2} = 0 \\ &\downarrow \\ \int \frac{1}{x} dx &= a \tan b x \quad \quad \quad x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\pi} x \tan \frac{\pi}{2} x \\ &\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}} \\ &\quad \quad \quad a = \frac{4}{\pi}, b = \frac{\pi}{2} \rightarrow a \cdot b = 2 \end{aligned}$$

28. 두 자연수 a, b 와 함수 $f(x) = axe^{bx}$ 에 대하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(\sin x)f(\cos x)}{e^{b\sin x}} + \frac{f(\sin x)f(\cos x)}{e^{b\cos x}} \right) dx = 32$$

일 때, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{f(x)}{x} \times \sin x \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{f(x)}{x} \times \cos x \right) dx$ 의 값은?

[4점]

- ① $-6e^{\frac{\pi}{2}}$ ② $-4e^{\frac{\pi}{2}}$ ③ $-2e^{\frac{\pi}{2}}$ ④ $2e^{\frac{\pi}{2}}$ ⑤ $4e^{\frac{\pi}{2}}$

Let $\sin x = S, \cos x = C$

$$\int_0^2 \frac{a^2 s c e^{bc} + a^2 s c e^{bs}}{bc=x \quad bs=x} dx = 2a^2 \int_0^1 t e^{bt} dt = 2 \frac{a^2}{b^2} (b+1) = 32 \quad \text{with } b=1, a=4$$

$\therefore \frac{A_{01}}{x} = 4e^x$

$$4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x (\sin x + \cos x) dx = 4 [e^x \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -4e^{\frac{\pi}{2}}$$

단답형

29. 자연수 m 와 첫째항이 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\textcircled{1} 4 \times \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \times m) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \times a_m)$$

이고 $S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 에 대하여 $\textcircled{2} 4 \times \sum_{n=1}^{\infty} S_n = 3 \times a_1$ 일 때, 모든

a_{2m} 의 값의 합은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$\textcircled{1}: 4 \times \frac{a_m}{1-r^m} = \frac{a_m \cdot a_1}{1-r} \rightarrow a_1 = 4 \times \frac{1-r}{1-r^m}$$

$$S_n = \frac{a_{n+1}}{1-r}$$

$$\textcircled{2}: 4 \times \frac{1}{1-r} \times \frac{a_1 r}{1-r} = 3 \times a_1 \rightarrow r = \frac{1}{3} \text{ or } \cancel{r}$$

$$a_1 = \frac{8}{3} \times \frac{3^m}{3^m-1} = 2^{\frac{2m}{m-1}}$$

$$\begin{aligned} m=1 &\rightarrow a_1=4 \rightarrow a_2=\frac{4}{3} \\ m=2 &\rightarrow a_1=3 \rightarrow a_2=\frac{1}{9} \\ m=3 &\rightarrow \times \end{aligned} \quad \frac{13}{9}$$

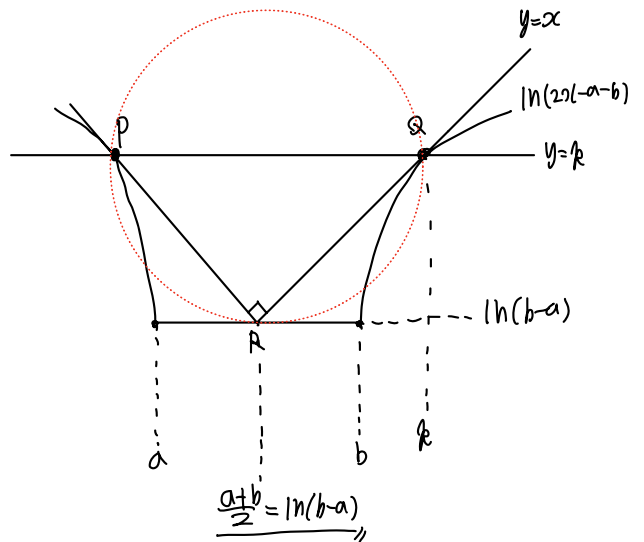
(22)

30. 두 상수 $a, b (a < b)$ 와 함수

$$f(x) = \ln(|x-a| + |x-b|)$$

가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $y=k$ 와 만나는 서로 다른 두 점을 x 좌표가 작은 것부터 각각 P, Q라 하면 두 점 P, Q에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 R에서 만난다. 두 점 P, Q를 지름의 양 끝으로 하는 원이 곡선 $y=f(x)$ 와 점 R에서 접하고

직선 QR이 원점을 지날 때, $e^k \times e^{f(\ln 2 + \frac{1}{e})}$ 의 값은 $p + \frac{q}{e}$ 이다. $p+q$ 의 값은? (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]



$$\frac{a+b}{2} = \ln(b-a)$$

$$\frac{2}{2k-a-b} = 1, \ln(2k-a-b) = k \rightarrow k = \ln 2, a+b = 2\ln 2 - 2, b-a = \frac{2}{e}$$

$$\begin{cases} b = \ln 2 - 1 + \frac{1}{e} \\ a = \ln 2 - 1 - \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\frac{7}{e} + 4 \rightarrow (8)$$