

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호												
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

해설강의는 유튜브 대은이대은에서 수강가능합니다.

- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하십시오.

- 공통과목 1~8쪽
- 선택과목
 - 확률과 통계 9~12쪽
 - 미적분 13~16쪽
 - 기하 17~20쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

선생님 덕분에 3등급에서 1등급으로 올랐습니다. 수업을 듣다보면 열심히 가르치실려고 노력하시는게 느껴집니다. 이해하기 쉽게 설명해주시려는 열정, 많은 양의 질 높은 자료가 좋았습니다. 또한 수업에 지루해하지 않게 하기 위해 재미있는 모습을 많이 보여주셔서 만족스러웠다고 생각합니다. 많은 수학 학원을 다녀봤지만 단지 특정 문제를 푸는 방법만이 아닌 문제가 궁극적으로 물어보는 것을 읽고 해야하는 사고의 틀과 그 순서까지 잡아주는 곳은 이대은 선생님이 처음이었습니다. 문제를 보고 그냥 아무 생각이 없이 손부터 움직이는 사람들은 꼭 들어야 하는 수업이라고 생각합니다. 덕분에 변형된 문제를 보더라도 당황하지 않고 천천히 풀어 나갈 수 있게 되었습니다

목소리 안정감이 매우 좋은 편임. 그리고 매우 단계적으로 잘 가르치심. 필기가 정말 예뻐. 현우진 느낌. 매 문제마다 이러한 개념을 사용했다고 명확하게 가르치심. 계속 반복되는 노트로 머리에 안들어올래야 안들어 올 수 없는 주입식 수업! 내가 이미 알고있다고 생각하고 도외시하기 쉬운데 강제로 노트를 과제통해서 쓰게해서 어쩔 수 없이 반복하게 됨.

2~3등급일때 선생님 강의를 들었다면 더욱 원하는 점수에 빨리 도달하지 않았을까 싶습니다 문제를 그냥 풀어제끼고 버리는 것이 아니고 선생님이 적어주신 노트(문제를 보고 떠올려야 하는 것들)처럼 정리해가며 범주화 시키며 공부해야 한다는 것을 재수 할때 깨달았었는데 현역때 선생님 강의를 들었다면 더 빨리 지금 실력으로 도약 할 수 있었을거 같습니다
3등급 정도의 후배가 강사를 추천해달라고 하면 바로 선생님을 추천할 것 같습니다.

결국 1등급을 받고보니 1등급으로 성적을 올리는 방법은 정해져 있다는 생각이 드네요! 유튜브로 선생님을 처음 봤을때, 그저 학원에서 알려주는 기계적인 풀이가 아니라 조건을 "해석"할 수 있는 사고를 도와주는 수업이라 꼭 듣고 싶었어요! 선부터 듣기 시작했는데 선에서 기출을 풀면서 풀이 도구들을 정리하고, 면으로 사고 과정과 부족한 부분을 매꾸고, 커튼콜로 시간배분까지 연습하며 많은 도움이 되었던 것 같아요 ㅎㅎ

저는 수능을 제외한 시험에서 평소 4등급을 맞던 한 수강생입니다. 쌤을 만나기전까지는 문제를 풀때 별생각없이 풀이 써보고 어? 풀리네 이런식으로 그냥 아무생각없이 문제를 풀었습니다. 하지만 이대은선생님이 알려주시는 문제풀이에 들어가기전에 문제에 조건, 우리가 모르고 무심코 지나갈법한 조건들을 보고 "이렇게 풀어야된다" "이 조건을 보고 이렇게 반응 해야된다" 어떻게 풀지 생각을 하고 풀이에 들어간다는 것을 선생님께서 귀에 딱지가 붙도록 말씀하셨고, 실제로 수능에서 이 방법이 크게 도움이 되었어요 진짜 감사합니다!

저는 수학을 꽤나 잘하는 편에 속했습니다. 고난도 문제도 잘 풀어냈습니다. 하지만 준킬러를 빠르게 풀어내지 못하여 고난도 문제를 볼 시간도 없었습니다. 그렇지만 이대은 T 수업을 듣고 준킬러 부분을 빨리 풀어낼 수 있었습니다. 그 덕분에 25수능을 15번까지 20분정도 걸리며 시험지 운영을 쉽게 할 수 있었습니다. 이대은T 수업은 3,4등급 친구들에게도 좋지만 저는 1,2등급 친구들도 충분히 들을 만한 가치가 있다고 생각합니다. 특히 시간은 문제를 풀 수 있지만 오래걸리는 친구들에게 강추합니다👍👍



유튜브



오르비클래스

수학강사 이대은

<온라인>

현) 오르비클래스

<오프라인>

현) 매시브학원 대치, 광화문

현) 대치명인학원 중계

전) 사관등용문학원 대치

전) 비상에듀 재수종합반

* 23, 24, 25학년도 수학 단독 수강생수 1위



수학 영역

홀수형

5지선다형

9. 양수 t 에 대하여 함수 $f(x)=2x^3-7x^2+1$ 의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나도록 하는 t 의 값은?

- ① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

9번

Note1. 곡선 밖의 점 (x_1, y_1) 에서 그은 접선

⇒ ① $(t, f(t))$ 에서 접선의 방정식 세우기

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

② 곡선 밖의 점 (x_1, y_1) 을 대입하여 t 구하기

③ 위에서 나온 t 를 접선의 방정식에 대입하면 접선의 방정식 구할 수 있다.

10. 양수 a 에 대하여 닫힌구간 $[0, 2a]$ 에서 정의된 함수

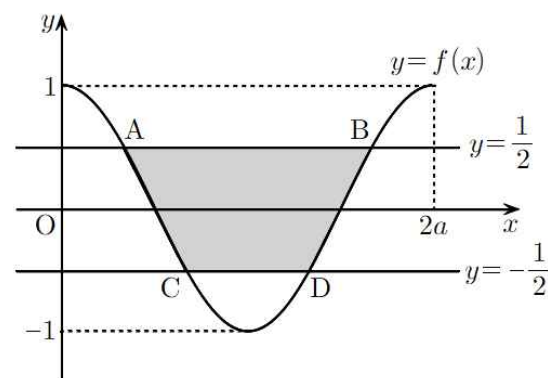
$f(x)=\cos \frac{\pi x}{a}$ 가 있다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선

$y=\frac{1}{2}$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=f(x)$ 의

그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$ 과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자.

사각형 ACDB의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, $a \times \overline{AB}$ 의 값은? (단, 점

A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작고, 점 C의 x 좌표는 점 D의 x 좌표보다 작다.)



- ① 3 ② $\frac{19}{6}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

10번

Note1. 삼각함수의 미지수 구하기

⇒ 미지수의 역할 이용하기

$$y=a\sin bx+c\text{에서 } M=|a|+c, m=-|a|+c,$$

$$\text{주기}=\frac{2\pi}{|b|}$$

11. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k 에 대하여 시각이 t ($t \geq 0$)일 때 점 P의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 3t^2 - 6t + k$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $k=0$ 이면, 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 위치는 -2 이다.
 ㄴ. $k=2$ 이면, 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는 점 P의 위치의 변화량과 같다.
 ㄷ. $k=-9$ 이면, 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는 34 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11번

Note1. 위치변화량과 움직인 거리

$$\Rightarrow \text{위치변화량 } \int_a^b v(t)dt, \text{ 움직인 거리 } \int_a^b |v(t)|dt$$

Note2. 두 시각에서의 위치에 대한 정보가 주어진 경우

$$\Rightarrow \text{위치 변화량 } \int_a^b v(t)dt \text{를 이용해 관계식 설정}$$

12. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_5 \times (a_6 + a_7) = 20a_{10}, S_4 = 65$$

일 때, a_2 의 값은?

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

12번

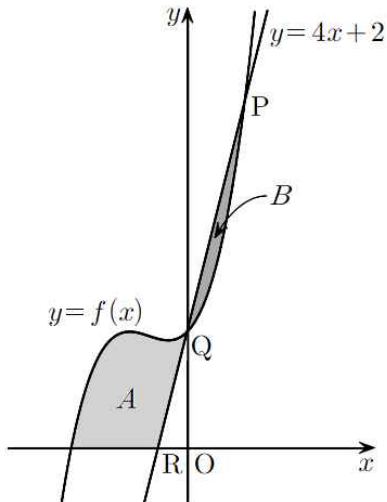
Note1. 등차수열, 등비수열의 일반항 구하기

$\Rightarrow$ 관계식 2개 구하기

Note2. 등차수열, 등비수열의 일반항 구하기

$\Rightarrow$ 관계식 2개 구하기

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3+2x^2+x+2$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+2$ 가 제1사분면에서 만나는 점을 P, y 축 위에서 만나는 점을 Q라 하자. 직선 $y=4x+2$ 가 x 축과 만나는 점을 R라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 선분 RQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 QP로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A-B$ 의 값은?



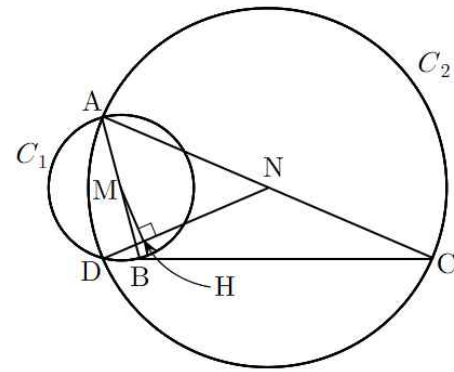
- ① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

13번

- Note1.** 동일한 곡선으로 둘러싸인 두 영역이 한점을 공유할 때 넓이차를 구하는 경우
 $\Rightarrow$ 겹치는 영역을 소거하는 방향으로 하나의 정적분으로 영역의 넓이차 구하기
- Note2.** 두 곡선으로 둘러싸인 넓이 구하기
 $\Rightarrow$ 차함수를 이용한 정적분 (차함수 관점에서 해석 가능)

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=8$, $\angle CBA > \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형

ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{16\sqrt{15}}{15}$ 이다. 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 할 때, 두 점 M, N을 각각 중심으로 하고 점 A를 지나는 두 원 C_1 , C_2 가 있다. 두 원 C_1 , C_2 가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 점 M에서 선분 DN에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 MH의 길이는?



- ① $\frac{5\sqrt{15}}{16}$ ② $\frac{11\sqrt{15}}{32}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{8}$ ④ $\frac{3\sqrt{15}}{8}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

14번

- Note1.** 사인법칙을 주로 사용하는 경우
 $\Rightarrow$ ① 각 2개, 변 1개가 주어진 경우
 ② 외접원의 반지름
 ③ 길이비 또는 sin비가 주어진 경우
- Note2.** 수선의 발이 언급된 경우
 $\Rightarrow$ 삼각형의 높이, 넓이 관점에서 해석하기
- Note3.** 원 위의 점이 주어진 경우
 $\Rightarrow$ 원의 중심과 보조선 연결하여 반지름임을 이용하기
- Note4.** 코사인법칙을 주로 사용하는 경우
 $\Rightarrow$ ① 각 1개 변 2개 주어진 경우
 ② 변 3개가 주어진 경우
 ③ 세 변의 길이비가 주어진 경우

15. 두 실수 a, b 에 대하여 두 함수

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + b, \quad g(x) = \frac{2}{3}x^3 + ax^2$$

이 있다. 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = f(x) + |f(x) - g(x)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $h(x)$ 는 $x = -1$ 에서만 미분가능하지 않다.
 (나) 함수 $h(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대이고 $x = \alpha$,
 $x = \beta$ ($\alpha < \beta$)에서 극소이다.

$h(\alpha) \geq h(\beta)$ 일 때, $a+b$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M-m$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

15번

Note1. 절댓값 함수

$$\Rightarrow \text{절댓값 벗기기 } |f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

Note2. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우
 $\Rightarrow$ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여
 모순인 경우 제외시키기

Note3. 삼차함수와 접선의 교점의 x 좌표가 언급된 경우
 $\Rightarrow$ 비율관계 이용

Note4. 이차방정식 실근의 개수 & 절대부등식인
 이차부등식
 case1. 실근의 구간이 주어지지 않은 경우 $\Rightarrow$
 판별식 이용하기
 case2. 실근의 구간이 주어진 경우 $\Rightarrow$ 근의 분리
 이용하기

20. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{b_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} 2(S_n - na_n) & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ (n-1)a_n & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 다음은 $b_2 = 2$ 일 때, $\sum_{n=1}^{20} b_n$ 의 값을 구하는
 과정이다.

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$\text{자연수 } n \text{에 대하여 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

(i) $n = 2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

㉑에 의하여

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= 2 \times \left\{ \frac{(2k-1)(a_1 + a_{2k-1})}{2} - (2k-1)a_{2k-1} \right\} \\ &= (\boxed{\text{가}}) \times (a_1 - a_{2k-1}) \end{aligned}$$

(ii) $n = 2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$b_{2k} = (2k-1)a_{2k}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} b_{2k-1} + b_{2k} &= (\boxed{\text{가}}) \times (a_1 - a_{2k-1}) + (2k-1)a_{2k} \\ &= \boxed{\text{나}} \quad \dots\dots \textcircled{㉒} \end{aligned}$$

이다.

㉒에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} b_n &= (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots + (b_{19} + b_{20}) \\ &= \boxed{\text{다}} \end{aligned}$$

이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 하고,
 (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $f(2) + g(3) + p$ 의 값을
 구하시오.

20번

Note1. 네모네모

- $\Rightarrow$ ① 답지를 읽듯이 문제를 풀면 된다.
 ② 등호관계를 반드시 이용한다.
 ③ 박스 위 주어진 공식을 활용한다.

Note2. 등차수열의 두 항이 주어진 경우

$$\Rightarrow a_p - a_q = (p-q)d$$

Note3. 홀수와 짝수번째 a_{2n} , a_{2n-1} 이 따로 정의되고

시그마 $\sum$ 를 구하는 경우

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) \text{ 이용하기}$$

21. 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)(x-4) & \left(a \leq x \leq \frac{3}{2}a\right) \\ (x-a)(x-b) & \left(x < a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}a\right) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $|f(x)|=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 6$

(나) 함수 $g(t)$ 는 $t = \alpha, t = \beta$ ($\alpha \neq \beta$)에서만 불연속이고,
 $\lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t) = \lim_{t \rightarrow \beta-} g(t) = 1$ 이다.

$f(0) = p + q\sqrt{2}$ 일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.)

21번

Note1. 교점(실근)의 개수

⇒ 그래프 그려서 판단하기

Note2. 곡선과 직선의 위치관계

⇒ 직선이 접선이나 점근선일 때 답이 되는 경우가 많다.

Note3. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우

⇒ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여 모순인 경우 제외시키기

Note4. 조건을 만족시키는 점의 개수가 주어진 경우

⇒ 무조건 생기는 점의 개수 파악하기

22. 두 자연수 m, n 에 대하여 곡선 $y = 2^{x-m} + n$ 위의 점

$A(a, b)$ ($a < b$)가 제1사분면에 있다. 점 A 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B 라 하자. 점 B 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 인 원이 곡선

$y = \log_2(x-n+1) + m - 7$ 과 만나는 두 점 중 x 좌표가 작은

점을 C 라 할 때, 세 점 A, B, C 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 AC 와 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 는 서로 수직이다.

(나) 삼각형 AOB 와 삼각형 ACB 의 넓이의 비는 $27 : 8$ 이다.

$m+n$ 의 최댓값을 구하시오. (단, 0 는 원점이다.)

22번

Note1. 기하적 조건 (길이, 넓이, 평행 등)이 주어진 경우

⇒ 그래프를 그려서 최대한 기하적 관점에서 해석을 진행한다.

Note2. 대칭성 혹은 평행이동, 대칭이동을 한 함수가 주어진 경우

⇒ 그래프를 그려서 기하적인 해석을 시도하기

Note3. 직선의 기울기, 직선 위 두 점 거리, $\Delta x, \Delta y$ 중 두 가지가 주어진 경우

⇒ 나머지 한 가지를 구해서 이용하기

Note4. 기울기가 -1 인 직선이 주어진 경우

⇒ 직선 위 임의의 점의 x 좌표와 y 좌표의 합이 항상 y 절편과 같음을 이용할 수 있다.

Note5. 곡선이 미지수 포함하는 경우

⇒ 곡선 위의 점 구해서 관계식으로 이용하기

Note6. (미지수 개수) > (관계식 개수)

case1. 자연수 조건이 있는 경우 ⇒ 부정방정식 이용하기

case2. 자연수 조건이 없는 경우 ⇒ 각각의 미지수를 구하지 않고 최종값 직접 구하기

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

28. 빈 상자 4개가 일렬로 놓여 있고, 검은 공 4개, 흰 공 6개가 있다. 이 10개의 공을 상자에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공이 들어 있지 않은 상자가 있을 수 있다.)

- (가) 검은 공이 들어 있지 않은 상자의 개수는 2 이상이다.
(나) 검은 공이 들어 있는 상자에 들어 있는 흰 공의 개수는 1 이하이다.

- ① 580 ② 592 ③ 604 ④ 616 ⑤ 628

28번

Note1. 서로 같은 것을 같은 것에 나눠주기 $\Rightarrow$ 자연수 분할

서로 같은 것을 다른 것에 나눠주기 $\Rightarrow$ 중복조합
서로 다른 것을 다른 것에 나눠주기 $\Rightarrow$ 중복순열
서로 다른 것을 같은 것에 나눠주기 $\Rightarrow$ 집합의 분할

Note2. 케이스를 나누는 경우

$\Rightarrow$ 케이스가 나뉘지기까지 경우의 수 또는 확률 고려하기

Note3. 적어도, 또는, 이상 이하가 주어진 경우

$\Rightarrow$ 여사건을 이용하면 빠를 가능성이 높다.

29. 주머니에 1부터 $2n+1$ 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $2n+1$ 개의 공이 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다. 확인한 두 수가 각각 홀수와 짝수이면 확인한 두 수 중 짝수를 기록하고, 확인한 두 수가 모두 홀수이거나 모두 짝수이면 숫자 0을 기록한다.

이 시행을 한 번 하여 기록한 수를 확률변수 X 라 하자.

$E(X^2)=14E(X)$ 일 때, $E\left(7X+\frac{2}{3}\right)$ 의 값을 구하시오. (단, n 은 자연수이다.)

29번

Note1. 이산확률분포에서 조건이 주어지고 평균, 분산을 구하는 경우

$\Rightarrow$ 확률분포표를 그려서 평균이나 분산 구하기

Note2. 확률끼리 곱하는 경우

$\Rightarrow$ 사건의 발생순서 고려하기

Note3. 평균, 분산, 표준편차의 정의

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

Note4. 두 확률변수 사이의 관계가 주어지고 평균, 분산, 표준편차를 구하는 경우

$$\Rightarrow E(aX+b) = aE(X)+b, \quad V(aX+b) = a^2 V(X),$$

$$\sigma(ax+b) = |a|\sigma(x)$$

30. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 k 라 하자.
 k 가 1이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
 k 가 2이면 점 P를 음의 방향으로 1만큼 이동시키고,
 k 가 3 이상이면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 7번 반복할 때, n ($1 \leq n \leq 7$)번째 시행 후 점 P의 좌표를 a_n 이라 하자. $a_1 = 0$ 이고 $a_7 = 1$ 일 때, 집합 $\{a_m \mid m \text{은 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 원소 중 가장 큰 값이 2일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

30번

Note1. A일 때 B일 확률

$\Rightarrow$ A가 전사건이 아니라면 조건부확률이다.

Note2. n 회 시행하고 사건마다 수에 대한 조건이 붙은 경우

$\Rightarrow$ 각각의 사건의 발생횟수를 미지수로 두고
 연립방정식 이용

Note3. 조건부확률에서 분모의 case 분류시 case 중 분자에 해당하는 case가 존재하지 않는 경우
 $\Rightarrow$ 분자의 확률은 직접 구할 때 반드시 분모의 조건을 만족시키는 확률 구하기

Note4. 확률끼리 곱하는 경우
 $\Rightarrow$ 사건의 발생순서 고려하기

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

28. 함수 $f(x)=x-\frac{1}{e^x+1}$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 와 $x>0$ 에서 정의된 연속함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^{e^x} f^{-1}(g(t))dt = (x-1)e^x + k \quad (k \text{는 상수})$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 의 역함수 $g^{-1}(x)$ 에 대하여

$$\int_{f(0)}^{f(k)} (f^{-1}(x)+g^{-1}(x))dx \text{의 값은?}$$

- ① e ② $\frac{3}{2}e$ ③ $2e$ ④ $\frac{5}{2}e$ ⑤ $3e$

28번

Note1. $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ 가 주어진 경우

$\Rightarrow g(a) = 0, g'(x) = f(x)$ 적어두고 조건해석 시작하기

Note2. 역함수의 정적분

① 역함수 단독 정적분

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f'(x)dx = bf(b) - af(a)$$

이용하기

② 역함수가 포함된 복잡한 함수의 정적분 $\Rightarrow$ 항등함수 $f(f^{-1}(x)) = x$ 가 되도록 치환적분

Note3. 항등식과 정적분이 주어진 경우

$\Rightarrow$ 항등식을 이용할 수 있도록 정적분의 피적분함수 꼴 맞추기 (주로 치환적분인 경우가 많다.)

29. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고, 수열 $\{b_n\}$ 을 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -a_n & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_{2n} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n b_n < 0$ 이다.

$$(나) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right)^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 63$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ 의 값을 구하시오.

29번

Note1. 등차수열, 등비수열의 일반항 구하기

$\Rightarrow$ 관계식 2개 구하기

Note2. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우

$\Rightarrow$ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여 모순인 경우 제외시키기

Note3. 등차수열과 등비수열의 부호와 관련된 조건이 주어진 경우

등차수열 부호 $\Rightarrow$ $++--$ or $--++$

등비수열 부호 $\Rightarrow$ $+-+-$ or $-+-+$

30. $a > 0$, $b > 0$ 인 두 상수 a , b 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$(f(x))^3 + f(x) = \frac{a}{x^2 + 12} - bx - \frac{16}{3}b \text{이다.}$$

(나) 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하고, $f'(k) = 0$ 인 실수 k 가 존재한다.

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -bx$ 가 만나는 서로 다른 모든 점의 x 좌표의 합이 $k+8$ 일 때, $a \times b = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

30번

Note1. 역함수 존재

⇒ 미분 가능한 함수는 $f'(x)$ 의 부호일정으로 해석하고, 미분 불가능한 경우 일대일대응인 경우 해석하기

Note2. 직선과 곡선의 위치관계

⇒ 직선이 접선 또는 점근선인 경우부터 의심한다. 특히 접선은 변곡접선이 가장 먼저 의심의 대상이다.

Note3. 미지수 구하기

⇒ 미지수 개수만큼 관계식 구해서 연립하기

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

정답 및 해설

9) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=6x^2-14x$
함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의
점 $(t, f(t))$ ($t>0$)에서의 접선의 방정식은
 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$
 $y=(6t^2-14t)(x-t)+2t^3-7t^2+1$
접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로
 $1=(6t^2-14t)(0-t)+2t^3-7t^2+1$
 $1=-4t^3+7t^2+1$
 $4t^3-7t^2=t^2(4t-7)=0$
따라서 $t=\frac{7}{4}$

10) [정답] ①

[해설]

함수 $y=\cos \frac{\pi x}{a}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}}=2a$
 $0\leq x\leq 2a$ 에서 $\cos \frac{\pi x}{a}=\frac{1}{2}$
 $\frac{\pi x}{a}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{a}=\frac{5\pi}{3}$ 이므로
 $x=\frac{a}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}a$
점 A의 좌표는 $(\frac{a}{3}, \frac{1}{2})$
점 B의 좌표는 $(\frac{5}{3}a, \frac{1}{2})$
 $0\leq x\leq 2a$ 에서 $\cos \frac{\pi x}{a}=-\frac{1}{2}$
 $\frac{\pi x}{a}=\frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{a}=\frac{4\pi}{3}$ 이므로
 $x=\frac{2}{3}a$ 또는 $x=\frac{4}{3}a$
점 C의 좌표는 $(\frac{2}{3}a, -\frac{1}{2})$
점 D의 좌표는 $(\frac{4}{3}a, -\frac{1}{2})$
 $\overline{AB}=\frac{4}{3}a, \overline{CD}=\frac{2}{3}a$
사각형 ACDB는 사다리꼴이므로
사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}a\right)\times 1=a=\frac{3}{2}$$
$$\overline{AB}=\frac{4}{3}a=2$$

따라서 $a\times\overline{AB}=\frac{3}{2}\times 2=3$

11) [정답] ③

[해설]

시각이 t ($t\geq 0$)일 때
점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면 $x(0)=0$
ㄱ. $k=0$ 이면, $v(t)=3t^2-6t$
$$x(1)=x(0)+\int_0^1 v(t)dt$$
$$=\int_0^1 (3t^2-6t)dt$$
$$=\left[t^3-3t^2\right]_0^1=-2 \quad \text{(참)}$$

ㄴ. $k=2$ 이면, $v(t)=3t^2-6t+2$
시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리와 점 P의
위치의 변화량이 같아지려면 $0\leq t\leq 3$ 인 모든 t 에 대하
여 $v(t)\geq 0$ 이어야 한다.
 $v(1)=-1$ 이므로
시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는 점 P의
위치의 변화량과 같지 않다. (거짓)

ㄷ. $k=-9$ 이면, $v(t)=3t^2-6t-9$
 $3t^2-6t-9=3(t+1)(t-3)$ 이므로
시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는
$$\int_0^4 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^3 (-3t^2+6t+9)dt+\int_3^4 (3t^2-6t-9)dt$$
$$=\left[-t^3+3t^2+9t\right]_0^3+\left[t^3-3t^2-9t\right]_3^4$$
$$=27+7=34 \quad \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

12) [정답] ①

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a>0$), 공비를 r ($r>0$)이라 하
자.
 $a_n=ar^{n-1}$ (단, n 은 자연수)
 $a_5\times(a_6+a_7)=20a_{10}$ 이므로
 $ar^4\times(ar^5+ar^6)=20ar^9$
양변을 ar^9 으로 나누면
 $a(1+r)=20$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} = 3$$

점 D는 원 C_1 위의 점이므로 $\overline{MD} = 2$

점 D는 원 C_2 위의 점이므로 $\overline{DN} = 4$

$\angle MND = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)라 하자.

삼각형 MDN에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\overline{MN}^2 + \overline{DN}^2 - \overline{MD}^2}{2 \times \overline{MN} \times \overline{DN}} \\ &= \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

따라서 직각삼각형 MHN에서

$$\overline{MH} = \overline{MN} \times \sin \alpha = 3 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

[다른 풀이]

$$\overline{AB} = 2\overline{AM}, \overline{AC} = 2\overline{AN},$$

$\angle MAN$ 은 공통이므로

두 삼각형 ABC와 AMN은 서로 닮음이고

닮음비는 2:1, 넓이의 비는 4:1이다.

$$\overline{AM} = \overline{DM}, \overline{AN} = \overline{DN} \text{ 이고}$$

선분 MN은 공통이므로

두 삼각형 AMN과 DMN은 서로 합동이다.

삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin \theta &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4} \\ &= 3\sqrt{15} \end{aligned}$$

삼각형 DMN의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \times 3\sqrt{15} &= \frac{1}{2} \times \overline{DN} \times \overline{MH} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{MH} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \overline{MH} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

15) [정답] ①

[해설]

$p(x) = f(x) - g(x)$ 라 하자.

$$h(x) = f(x) + |p(x)|$$

함수 $h(x)$ 는 $p(x) \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서 미분가능하다.

조건 (가)에 의하여 $p(-1) = 0$, $p'(-1) \neq 0$

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + b$$

$$p(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a + b = 0, \quad b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}$$

$$p'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - ax$$

$$p'(-1) = -\frac{3}{2} + a \neq 0, \quad a \neq \frac{3}{2}$$

$p(x) = -\frac{1}{2}(x+1)\{x^2 + (a-1)x - (a-1)\}$ 에서

$a \neq \frac{3}{2}$ 이므로

x 에 대한 방정식 $x^2 + (a-1)x - (a-1) = 0$ 은 -1 을 근으로 갖지 않는다.

x 에 대한 방정식 $x^2 + (a-1)x - (a-1) = 0$ 의

판별식을 D 라 하면

$$D = (a-1)^2 + 4(a-1) = (a-1)(a+3)$$

$D > 0$ 이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $D \leq 0$, $-3 \leq a \leq 1$ ㉠

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + a - 1 & (x \leq -1) \\ \frac{2}{3}x^3 + ax^2 & (x > -1) \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} -x^2 & (x < -1) \\ 2x^2 + 2ax & (x > -1) \end{cases}$$

조건 (나)에 의하여

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이므로

$a < 0$ ㉡

함수 $h(x)$ 는 $x = -1$, $x = -a$ 에서 극소이므로

$$\alpha = -1, \quad \beta = -a$$

$$h(\alpha) = h(-1) = \frac{1}{3} + a - 1 = a - \frac{2}{3}$$

$$h(\beta) = h(-a) = \frac{1}{3}a^3$$

$$h(\alpha) \geq h(\beta), \quad a - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3}a^3$$

$$(a-1)^2(a+2) \leq 0$$

$$a = 1 \text{ 또는 } a \leq -2 \text{ ㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $-3 \leq a \leq -2$

$$b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$a + b = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{3}{2} \times (-2) - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$m = \frac{3}{2} \times (-3) - \frac{1}{2} = -5$$

$$\text{따라서 } M - m = -\frac{7}{2} - (-5) = \frac{3}{2}$$

20) [정답] 213

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$\text{자연수 } n \text{에 대하여 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \text{ ㉠}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

(i) $n=2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

㉠에 의하여

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= 2 \times \left\{ \frac{(2k-1)(a_1 + a_{2k-1})}{2} - (2k-1)a_{2k-1} \right\} \\ &= (2k-1)(a_1 + a_{2k-1}) - 2(2k-1)a_{2k-1} \\ &= (\boxed{2k-1}) \times (a_1 - a_{2k-1}) \end{aligned}$$

(ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$b_{2k} = (2k-1)a_{2k}$$

$$b_2 = (2-1)a_2 = a_2 = 2$$

(i), (ii)에 의하여

$$b_{2k-1} + b_{2k}$$

$$= (\boxed{2k-1}) \times (a_1 - a_{2k-1}) + (2k-1)a_{2k}$$

$$= (2k-1) \times \{a_1 + (a_{2k} - a_{2k-1})\}$$

$$= (2k-1) \times (a_1 + d)$$

$$= (2k-1) \times a_2$$

$$= \boxed{4k-2}$$

..... ㉡

이다.

㉢에 의하여

$$\sum_{n=1}^{20} b_n$$

$$= (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \cdots + (b_{19} + b_{20})$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (b_{2k-1} + b_{2k})$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (4k-2)$$

$$= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times 10$$

$$= \boxed{200}$$

이다.

$$f(k) = 2k-1, \quad g(k) = 4k-2, \quad p = 200$$

$$\text{따라서 } f(2) + g(3) + p = 3 + 10 + 200 = 213$$

21) [정답] 320

[해설]

조건 (가)에서 $\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 6$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 세 점의 x 좌표는

$$x=a, \quad x=b, \quad x=4 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a < 4 \leq \frac{3}{2}a, \quad b > \frac{3}{2}a \text{ 또는}$$

$$a < 4 \leq \frac{3}{2}a, \quad b < a$$

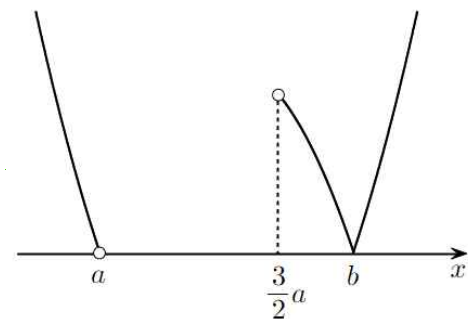
$$4 = \frac{3}{2}a \text{ 이면 } \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 5 \text{ 이므로}$$

$$4 < \frac{3}{2}a \text{ 이어야 한다.}$$

$$(I) \quad a < 4 < \frac{3}{2}a, \quad b > \frac{3}{2}a \text{ 인 경우}$$

$$x < a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}a \text{ 에서}$$

함수 $y=|(x-a)(x-b)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 양의 실수 m 에 대하여

$$x < a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}a \text{ 일 때,}$$

직선 $y=m$ 과

함수 $y=|(x-a)(x-b)|$ 의 그래프가

만나는 서로 다른 점의 개수는

2 이상이므로

$$\lim_{t \rightarrow m+} g(t) \geq 2 \text{ 이다.}$$

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(II) \quad a < 4 < \frac{3}{2}a, \quad b < a \text{ 인 경우}$$

$$\left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| = \left| \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - 4 \right) \right| = \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - 4 \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}a+} |f(x)| &= \left| \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - b \right) \right| \\ &= \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - b \right) \end{aligned}$$

$b < 4$ 이므로

$$\left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| < \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}a+} |f(x)| \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}a+} |f(x)| = k_1 \text{ 이라 하면}$$

$$\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \geq k_1 \text{ 또는 } \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \geq k_1 \text{ 일 때}$$

모든 양의 실수 m 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow m+} g(t) \geq 2 \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로

$$\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| < k_1 \text{ 이고, } \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| < k_1 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{t \rightarrow k_1-} g(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow k_1+} g(t) = 2 \text{ 이므로}$$

함수 $g(t)$ 는 $t=k_1$ 에서 불연속이다.

조건 (나)에 의하여 $\beta=k_1$ 이다.

(I), (II)에 의하여

$$b < a < 4 < \frac{3}{2}a, \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| < \beta,$$

$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| < \beta, \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| < \beta$$

함수 $g(t)$ 는 $t=\alpha$, $t=\beta$ 에서만 불연속이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \neq \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right|$ 인 경우

함수 $g(t)$ 가

$$t = \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right|, t = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right|,$$

$t=\beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \neq \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right|$ 인 경우

함수 $g(t)$ 가

$$t = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right|, t = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right|,$$

$t=\beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \neq \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right|$ 인 경우

함수 $g(t)$ 가

$$t = \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right|, t = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right|,$$

$t=\beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iv) $\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right|$ 인 경우

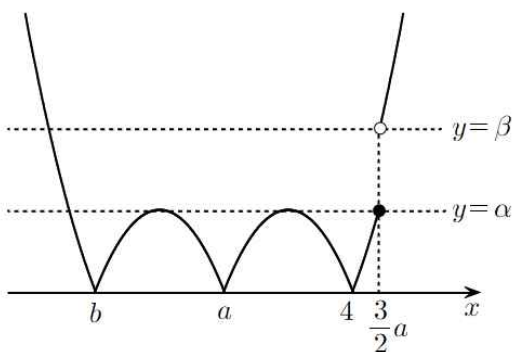
$$\left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| = k_2 \text{라 하면}$$

$$\lim_{t \rightarrow k_2^-} g(t) = 6, \lim_{t \rightarrow k_2^+} g(t) = 1 \text{이므로}$$

함수 $g(t)$ 는 $t=k_2$, $t=\beta$ 에서만 불연속이다.

(i)~(iv)에 의하여 $\alpha=k_2$ 이다.

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| \text{이므로}$$

$$\frac{(a-4)^2}{4} = \frac{a(3a-8)}{4}$$

$$a^2 - 8a + 16 = 3a^2 - 8a, a^2 = 8$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2\sqrt{2}$$

$$\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \text{이므로}$$

$$\frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(4-a)^2}{4}$$

$$b < a < 4 \text{이므로 } a-b=4-a$$

$$b = 2a - 4 = 4\sqrt{2} - 4$$

$$f(0) = ab = 2\sqrt{2}(4\sqrt{2} - 4) = 16 - 8\sqrt{2}$$

$$p = 16, q = -8$$

따라서

$$p^2 + q^2 = 256 + 64 = 320$$

22) [정답] 26

[해설]

$f(x) = 2^{x-n} + n$, $g(x) = \log_2(x-n+1) + m - 7$ 이라 하자.

점 $A(a, b)$ 는 제1사분면 위의 점이므로 $0 < a < b$

점 B 는 점 A 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 $B(b, a)$ 이고, 곡선 $y = \log_2(x-n) + m$ 위의 점이다.

곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y = \log_2(x-n) + m$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 곡선과 일치한다.

점 B 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 점을 $B'(b-1, a-7)$ 이라 하면 점 B' 은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이다.

점 B 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 인 원을 C 라 하자.

$$\overline{BB'} = 5\sqrt{2} \text{이므로}$$

점 B' 은 원 C 위의 점이다.

원 C 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 두 점을 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$ 라 하면 $x_1 < x_2$ 이고

함수 $g(x)$ 는 $x > n-1$ 인 실수 전체의 집합에서 증가하므로 $y_1 < y_2$

점 B' 은 원 C 와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

점 B' 은 점 C 와 일치하거나 점 D 와 일치한다.

점 B' 이 점 D 와 일치하는 경우

$$x_1 < b-1, y_1 < a-7$$

$$b-x_1 > 1, a-y_1 > 7$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(b-x_1)^2 + (a-y_1)^2} > 5\sqrt{2} \text{이므로}$$

점 C 가 원 C 위의 점이라는 조건에 모순이다.

그러므로 점 B' 은 점 C 와 일치한다.

조건 (가)에 의하여

직선 AC 의 기울기는

$$\frac{a-7-b}{b-1-a} = -3$$

$$a-7-b = -3(b-1-a)$$

$$a-b = -5$$

..... ㉠

두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -x + a + b \text{이므로}$$

두 점 O, C 와 직선 $x+y-a-b=0$ 사이의 거리를 각각

h_1, h_2 라 하면

$$h_1 = \frac{|-a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$$

$$h_2 = \frac{|(b-1)+(a-7)-a-b|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_1$ 이고

삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_2$ 이므로

삼각형 AOB와 삼각형 ACB의 넓이의 비는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_1 : \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_2 = 27 : 8$$

$$8h_1 = 27h_2$$

$$8 \times \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} = 27 \times 4\sqrt{2}$$

$$a+b=27$$

..... ㉔

㉓, ㉔에 의하여 $a=11, b=16$

점 A(11, 16)은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$2^{11-m} + n = 16$$

위 식을 만족시키는

두 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 은

(8, 8), (9, 12), (10, 14), (11, 15)이다.

따라서 $m+n$ 의 최댓값은 $11+15=26$

28) [정답] ⑤

[해설]

조건 (가)에 의하여 빈 상자 4개에 검은 공 4개를 남김없이 나누어 넣는 경우는 상자 1개에 4개 모두 넣는 경우, 상자 2개에 각각 3개, 1개 넣는 경우, 상자 2개에 2개씩 넣는 경우이다.

(i) 검은 공 4개를 상자 1개에 모두 넣는 경우

검은 공을 넣을 상자 1개를 고르는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

① 검은 공이 들어 있는 상자에 흰 공을 넣지 않고 빈 상자 3개에 흰 공 6개를 남김없이 넣는 경우의 수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = 28$$

② 검은 공이 들어 있는 상자에 흰 공 1개를 넣는 경우의 수는

$${}_1C_1 = 1$$

남은 흰 공 5개를 빈 상자 3개에 남김없이 넣는 경우의 수는

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$$

①, ②에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$4 \times (28 + 1 \times 21) = 196$$

(ii) 검은 공 4개를 상자 2개에 각각 3개, 1개 넣는 경우

검은 공 3개를 넣을 상자 1개,

검은 공 1개를 넣을 상자 1개를 고르는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$$

① 검은 공이 들어 있는 상자 2개에 모두 흰 공을 넣지 않고 빈 상자 2개에 흰 공 6개를 남김없이 넣는 경우의 수는

$${}_2H_6 = {}_7C_6 = 7$$

② 검은 공이 들어 있는 상자 2개 중 상자 1개에만 흰 공 1개를 넣는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

남은 흰 공 5개를 빈 상자 2개에 남김없이 넣는 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = 6$$

③ 검은 공이 들어 있는 상자 2개에 각각 흰 공을 1개씩 넣는 경우의 수는

$${}_2C_2 = 1$$

남은 흰 공 4개를 빈 상자 2개에 남김없이 넣는 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$$

①, ②, ③에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$12 \times (7 + 2 \times 6 + 1 \times 5) = 288$$

(iii) 검은 공 4개를 상자 2개에 2개씩 넣는 경우

검은 공을 넣을 상자 2개를 고르는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

① 검은 공이 들어 있는 상자 2개에 모두 흰 공을 넣지 않고 빈 상자 2개에 흰 공 6개를 남김없이 넣는 경우의 수는 ${}_2H_6 = {}_7C_6 = 7$

② 검은 공이 들어 있는 상자 2개 중 상자 1개에만 흰 공 1개를 넣는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

남은 흰 공 5개를 빈 상자 2개에 남김없이 넣는 경우의 수는 ${}_2H_5 = {}_6C_5 = 6$

③ 검은 공이 들어 있는 상자 2개에 각각 흰 공을 1개씩 넣는 경우의 수는 ${}_2C_2 = 1$

남은 흰 공 4개를 빈 상자 2개에 남김없이 넣는 경우의 수는 ${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$

①, ②, ③에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$6 \times (7 + 2 \times 6 + 1 \times 5) = 144$$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$196 + 288 + 144 = 628$$

29) [정답] 41

[해설]

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은

0, 2, 4, ..., $2n$ 이고

$$P(X=0) = \frac{{}_nC_2}{{}_{2n+1}C_2} + \frac{{}_{n+1}C_2}{{}_{2n+1}C_2} = \frac{n}{2n+1}$$

$1 \leq i \leq n$ 인 모든 자연수 i 에 대하여

$$P(X=2i)=\frac{{}_1C_1 \times {}_{n+1}C_1}{{}_{2n+1}C_2}=\frac{n+1}{n(2n+1)}$$

그러므로

$$P(X=2)=P(X=4)=\cdots=P(X=2n)$$

$$E(X)$$

$$=0 \times P(X=0)+2 \times P(X=2)$$

$$+4 \times P(X=4)+\cdots+2n \times P(X=2n)$$

$$=(2+4+\cdots+2n) \times P(X=2)$$

$$=2(1+2+\cdots+n) \times \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

$$=2 \times \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n+1}{n(2n+1)}=\frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

$$E(X^2)$$

$$=0^2 \times P(X=0)+2^2 \times P(X=2)$$

$$+4^2 \times P(X=4)+\cdots+(2n)^2 \times P(X=2n)$$

$$=\{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2\} \times P(X=2)$$

$$=4(1^2+2^2+\cdots+n^2) \times \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

$$=4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

$$=\frac{2}{3}(n+1)^2$$

$$E(X^2)=14E(X) \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{3}(n+1)^2=14 \times \frac{(n+1)^2}{2n+1} \text{ 에서}$$

$$2n+1=21 \text{ 이므로 } n=10$$

$$E(X)=\frac{(n+1)^2}{2n+1}=\frac{121}{21}$$

따라서

$$E\left(7X+\frac{2}{3}\right)=7E(X)+\frac{2}{3}=7 \times \frac{121}{21}+\frac{2}{3}=41$$

30) [정답] 725

[해설]

시행을 7번 반복할 때

$a_1=0$ 이고 $a_7=1$ 인 사건을 X ,

집합 $\{a_m | m \text{은 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 원소 중

가장 큰 값이 2인 사건을 Y 라 하자.

k 가 1일 확률은 $\frac{1}{6}$,

k 가 2일 확률은 $\frac{1}{6}$,

k 가 3 이상일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 이므로

(i) 7번 시행 후 $a_1=0$ 이고 $a_7=1$ 인 경우는

① 1의 눈이 1번, 3 이상의 눈이 6번 나오는 경우

구하는 확률은

$$\frac{2}{3} \times \left\{ 6 \times \left(\frac{1}{6} \right)^1 \times \left(\frac{2}{3} \right)^5 \right\} = \left(\frac{2}{3} \right)^6$$

② 1의 눈이 2번, 2의 눈이 1번, 3 이상의 눈이 4번 나오는 경우

구하는 확률은

$$\frac{2}{3} \times \left\{ \frac{6!}{2! \times 3!} \times \left(\frac{1}{6} \right)^2 \times \left(\frac{1}{6} \right)^1 \times \left(\frac{2}{3} \right)^3 \right\} \\ = 40 \times \left(\frac{1}{3} \right)^6$$

③ 1의 눈이 3번, 2의 눈이 2번, 3 이상의 눈이 2번 나오는 경우

구하는 확률은

$$\frac{2}{3} \times \left\{ \frac{6!}{3! \times 2!} \times \left(\frac{1}{6} \right)^3 \times \left(\frac{1}{6} \right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^1 \right\} = 5 \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 \times \left(\frac{1}{3} \right)^6$$

①, ②, ③에 의하여

$$P(X)=(128+80+5) \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 \times \left(\frac{1}{3} \right)^6$$

$$=71 \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 \times \left(\frac{1}{3} \right)^5$$

(ii) 7번 시행 후 $a_1=0$ 이고 $a_7=1$ 이므로

집합 $\{a_m | m \text{은 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 원소 중 가장 큰 값이 2인 경우는

① 1의 눈이 1번, 3 이상의 눈이 6번 나오는 경우

집합의 원소의 가장 큰 값이 1이므로

구하는 확률은 0

② 1의 눈이 2번, 2의 눈이 1번, 3 이상의 눈이 4번 나오는 경우

첫 번째 시행에서 3 이상의 눈이 나오고

1의 눈이 2번 모두 2의 눈보다 먼저 나와야 하므로

구하는 확률은

$$\frac{2}{3} \times \left\{ \frac{6!}{3! \times 3!} \times \left(\frac{1}{6} \right)^2 \times \left(\frac{1}{6} \right)^1 \times \left(\frac{2}{3} \right)^3 \right\} \\ = 40 \times \left(\frac{1}{3} \right)^7$$

③ 1의 눈이 3번, 2의 눈이 2번, 3 이상의 눈이 2번 나오는 경우

첫 번째 시행에서 3 이상의 눈이 나오고

1의 눈과 2의 눈은

1, 1, 2, 1, 2 또는

1, 1, 2, 2, 1 또는

1, 2, 1, 1, 2 또는

2, 1, 1, 1, 2

의 순서로 나와야 하고 각각에 대하여

3 이상의 눈이 1번 나와야 하므로

구하는 확률은

$$\frac{2}{3} \times \left\{ 4 \times 6 \times \left(\frac{1}{6} \right)^3 \times \left(\frac{1}{6} \right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^1 \right\} = \left(\frac{1}{3} \right)^6$$

①, ②, ③에 의하여

$$P(X \cap Y)=43 \times \left(\frac{1}{3} \right)^7$$

(i), (ii)에 의하여

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

$$= \frac{43 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7}{71 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5} = \frac{86}{639}$$

$$p = 639, \quad q = 86$$

$$\text{따라서 } p + q = 725$$

28) [정답] ①

[해설]

$$\int_1^{e^x} f^{-1}(g(t)) dt = (x-1)e^x + k \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = -1 + k, \quad k = 1$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f^{-1}(g(e^x)) \times e^x = x e^x \text{ 이고}$$

$$e^x > 0 \text{ 이므로 } f^{-1}(g(e^x)) = x$$

$$\text{그러므로 } g(e^x) = f(x)$$

$$g^{-1}(f(x)) = e^x$$

$$f^{-1}(x) = u \text{ 라 하면}$$

$$x = f(u) \text{ 이고 } 1 = f'(u) \frac{du}{dx}$$

$$x = f(0) \text{ 일 때 } u = 0,$$

$$x = f(k) = f(1) \text{ 일 때 } u = 1$$

$$\int_{f(0)}^{f(k)} (f^{-1}(x) + g^{-1}(x)) dx$$

$$= \int_0^1 \{u + g^{-1}(f(u))\} f'(u) du$$

$$= \int_0^1 (u + e^u) f'(u) du$$

$$= \left[(u + e^u) f(u) \right]_0^1 - \int_0^1 (1 + e^u) f(u) du$$

$$= \left[(u + e^u) f(u) \right]_0^1 - \int_0^1 (1 + e^u) \left(u - \frac{1}{e^u + 1} \right) du$$

$$= \left\{ (1 + e) \times \left(1 - \frac{1}{e + 1} \right) - 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} - \int_0^1 (u + u e^u - 1) du$$

$$= \left(e + \frac{1}{2} \right) - \int_0^1 (u - 1) du - \int_0^1 u e^u du$$

$$= e + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} u^2 - u \right]_0^1 - \left(\left[u e^u \right]_0^1 - \int_0^1 e^u du \right)$$

$$= e + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - \{ (e - 0) - (e - 1) \}$$

$$= e$$

$$\text{따라서 } \int_{f(0)}^{f(k)} (f^{-1}(x) + g^{-1}(x)) dx = e$$

29) [정답] 30

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = a \times r^{n-1} \quad (\text{단, } n \text{은 자연수})$$

조건 (가)에 의하여 $a \neq 0, \quad r \neq 0$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로

$$-1 < r < 0 \text{ 또는 } 0 < r < 1$$

(i) $0 < r < 1$ 인 경우

① $a < 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n < a_{n+1} \text{ 이므로 } b_n = -a_n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 (나)에서

$$\left(\frac{-a}{1-r} \right)^2 = 2 \times \frac{a^2}{1-r^2}$$

$$2(1-r)^2 = 1-r^2$$

$$2(1-r) = 1+r \text{ 이므로}$$

$$r = \frac{1}{3}$$

①에 의하여

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + b_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 63 \text{ 을 만족시키지 않는다.}$$

② $a > 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n > a_{n+1} \text{ 이므로 } b_n = a_{2n} > 0$$

$$a_n b_n = a_n a_{2n} > 0 \text{ 이므로}$$

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $-1 < r < 0$ 인 경우

① $a < 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$$n = 2m - 1 \quad (m \text{은 자연수}) \text{일 때,}$$

$$a_{2m-1} < 0 < a_{2m} \text{ 이므로}$$

$$b_{2m-1} = -a_{2m-1}$$

$$a_n b_n = -a_{2m-1} a_{2m-1} = -(a_{2m-1})^2 < 0$$

$$n = 2m \quad (m \text{은 자연수}) \text{일 때,}$$

$$a_{2m+1} < 0 < a_{2m} \text{ 이므로}$$

$$b_{2m} = a_{4m} > 0$$

$$a_n b_n = a_{2m} a_{4m} > 0 \text{ 이므로}$$

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a > 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$$n = 2m - 1 \quad (m \text{은 자연수}) \text{일 때,}$$

$$a_{2m} < 0 < a_{2m-1} \text{ 이므로}$$

$$b_{2m-1} = a_{4m-2} < 0$$

$$a_n b_n = a_{2m-1} a_{4m-2} < 0$$

$$n = 2m \quad (m \text{은 자연수}) \text{일 때,}$$

$$a_{2m} < 0 < a_{2m+1} \text{ 이므로}$$

$$b_{2m} = -a_{2m}$$

$$a_n b_n = -a_{2m} a_{2m} = -(a_{2m})^2 < 0 \text{ 이므로}$$

조건 (가)를 만족시킨다.

조건 (나)에서

$$\left(\frac{a}{1+r}\right)^2 = 2 \times \frac{a^2}{1-r^2}$$

$$2(1+r)^2 = 1-r^2$$

$$2(1+r) = 1-r \text{ 이므로}$$

$$r = -\frac{1}{3}$$

$$a_n + b_n = \begin{cases} a_n + a_{2n} & (n=2m-1) \\ 0 & (n=2m) \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{4n-2})$$

$$= \frac{a}{1-r^2} + \frac{ar}{1-r^4}$$

$$= \frac{63}{80}a = 63$$

그러므로 $a = 80$

(i), (ii)에 의하여

$$a_n = 80 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_{2n} = -a_{2n} = \frac{80}{3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{\frac{80}{3}}{1-\frac{1}{9}} = 30$$

30) [정답] 59

[해설]

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 또는

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$

$$(f(x))^3 + f(x) = \frac{a}{x^2+12} - bx - \frac{16}{3}b$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\{3(f(x))^2 + 1\}f'(x) = \frac{-2ax}{(x^2+12)^2} - b$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\{3(f(0))^2 + 1\}f'(0) = -b$$

$$3(f(0))^2 + 1 > 0 \text{ 이고 } b > 0 \text{ 이므로 } f'(0) < 0$$

그러므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(x) = \frac{-2ax}{(x^2+12)^2} - b \text{ 라 하면}$$

$$g(x) = \{3(f(x))^2 + 1\}f'(x) \text{ 이고}$$

①에 의하여 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq 0$

조건 (나)에 의하여

$$g(k) = \{3(f(k))^2 + 1\}f'(k) = 0 \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=k$ 에서 최댓값 0을 갖는다.

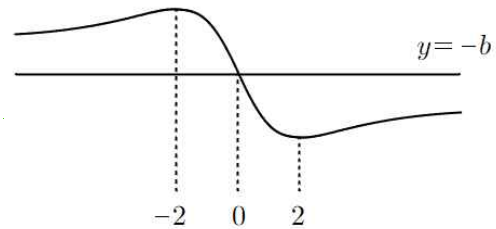
$$g'(x) = \frac{6a(x+2)(x-2)}{(x^2+12)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -b, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -b$$

함수 $y=g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$	2	$\dots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{a}{64} - b$	$\searrow$	$-\frac{a}{64} - b$	$\nearrow$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$ 의 최댓값은

$$x = -2 \text{ 일 때 뿐이므로 } k = -2$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-bx$ 가 만나는

서로 다른 모든 점의 x 좌표의 합은

$$k+8=6 \text{ 이다.}$$

$$f'(-2)=0 \text{ 이므로 } g(-2) = \frac{a}{64} - b = 0 \text{ 에서}$$

$$a = 64b$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-bx$ 가 만나는 점의 x 좌표를 t 라 하면

$$(f(t))^3 + f(t) = \frac{64b}{t^2+12} - bt - \frac{16}{3}b \text{ 이고}$$

$$f(t) = -bt \text{ 이므로}$$

$$(-bt)^3 - bt = \frac{64b}{t^2+12} - bt - \frac{16}{3}b$$

$$0 = b^3t^3 + \frac{64b}{t^2+12} - \frac{16}{3}b$$

$$0 = b^2t^3 + \frac{64}{t^2+12} - \frac{16}{3}$$

$$0 = \frac{3b^2t^3(t^2+12) + 192 - 16(t^2+12)}{3(t^2+12)}$$

$$0 = \frac{t^2(3b^2t^3 + 36b^2t - 16)}{3(t^2+12)}$$

그러므로 방정식 $f(t) = -bt$ 의 한 실근은 $t=0$

$$h(t) = 3b^2t^3 + 36b^2t - 16 \text{ 이라 하면}$$

$$h'(t) = 9b^2t^2 + 36b^2$$

모든 실수 t 에 대하여 $h'(t) > 0$ 이므로

삼차함수 $h(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

방정식 $h(t)=0$ 의 실근의 개수는 1이고

그 실근을 $t=t_1$ ($t_1 \neq 0$)이라 하자.

방정식 $f(t) = -bt$ 는 서로 다른 두 실근을 갖고

두 실근은 $t=0$ 과 $t=t_1$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-bx$ 가 만나는

curtain call

서로 다른 모든 점의 x 좌표의 합은

$$0+t_1=6 \text{ 이므로 } t_1=6$$

$$h(6)=648b^2+216b^2-16=0$$

$$b^2=\frac{1}{54} \text{ 이므로}$$

$$a \times b=64b \times b=64 \times b^2=\frac{32}{27}$$

$$p=27, \quad q=32$$

$$\text{따라서 } p+q=59$$