## 〈수학II 극한 정복하기〉

### - 극한값이 존재할 조건

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

### - 함수의 극한에 대한 성질 ($x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ 인 경우에도 성립)

두 함수 $f(x), g(x)$ 에서 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ ($\alpha, \beta$는 실수)일 때,

$$\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha + \beta$$

$$\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = \alpha - \beta$$

$\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = c\alpha$ **(단, $c$는 상수)**

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$$

$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ **(단, $\beta \neq 0$)**

### - 분수가 수렴하면 ($x \to a+$, $x \to a-$ 인 경우에도 성립)

**1. [ 분모 → 0 이므로 분자 → 0 이다 ]**

$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ **이고** $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ **이면** $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ **이다.**

**Proof. (by 극한의 성질)**

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \to a} g(x) = L \times 0 = 0$$

**2. [ 분자 → 0 이므로 분모 → 0 이다 ]**

$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ **이고** $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ **이면** $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ **이다. (단, $L \neq 0$)**

**Proof. (by 극한의 성질)**

$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \left\{ f(x) \div \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\} = \lim_{x \to a} f(x) \div \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \div L = 0$ **(단, $L \neq 0$)**

- **무조건 발산하는 경우**

$f(x), g(x)$ **가 연속함수일 때,**

$\lim_{x \to a} f(x) = L\,(L \neq 0)$ **이고** $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ **이면** $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ **는 발산한다.**

**Proof. (by 귀류법)**

$\lim_{x \to a} f(x) = L\,(L \neq 0)$ **이고** $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ **라고 하자.**

**이때** $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k\,(\text{단}, k\text{는 상수})$ **라고 하자.**

**따라서** $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \to a} g(x) = k \times 0 = 0$ **이므로** $L = 0$ **이다.**

**이는 가정에 모순이다.**

**따라서** $f(x), g(x)$ **가 연속함수 일 때,**

$\lim_{x \to a} f(x) = L\,(L \neq 0)$ **이고** $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ **이면** $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ **는 발산한다.**

- **함수의 극한의 대소 관계 : 조임 정리(Squeeze Theorem), 샌드위치 정리(Sandwich Theorem)**

$a$ **에 충분히 가까운 모든 실수** $x$ **에 대해**

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ **이고** $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ **이면** $\lim_{x \to a} g(x) = L$ **이다.**

**[응용]**

$a$ **에 충분히 가까운 모든 실수** $x$ **에 대해**

$f(x) < g(x) < h(x)$ **이고** $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ **이면** $\lim_{x \to a} g(x) = L$ **이다.**

**[주의]**

**모든 실수** $x$ **에 대해** $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ **이고** $\lim_{x \to 1} f(x) = 3, \lim_{x \to 1} h(x) = 4$ **이면** $3 \leq \lim_{x \to 1} g(x) \leq 4$ **(거짓)**

## <극한으로 정의된 함수> - 빈출 주제

모든 실수 $t$에 대하여 $\lim_{x \to t} \frac{x}{x^2+x+1}$ 은 항상 수렴한다. (참) by 극한의 성질

분자가 수렴하고 분모가 0이 아닌 수로 수렴하면 아무 문제 없이 극한의 성질 이용 가능

이때, $\lim_{x \to t} \frac{x}{x^2+x+1}$ 는 $t$에 따라 변하므로 $t$에 대한 함수임.

따라서 "모든 실수 $t$에 대하여 $\lim_{x \to t} \frac{x}{x^2+x+1}$ 은 항상 수렴한다." 와 같은 말은

"함수 $g(t)=\lim_{x \to t} \frac{x}{x^2+x+1}$ 가 모든 실수 $t$에 대해 정의되어 있다." $\Rightarrow$ 극한으로 정의된 함수

모든 실수 $t$에 대하여 $\lim_{x \to t} \frac{x^2-2x}{(x-1)(x+1)}$ 은 항상 수렴한다. (거짓)

$\Rightarrow$ $t=1, t=-1$일 때 발산 ( - 무조건 발산하는 경우 참고 )

모든 실수 $t$에 대하여 $\lim_{x \to t} \frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x-2)}$ 는 항상 수렴한다. (거짓)

$\Rightarrow$ $t=2$일 때 발산 ( - 무조건 발산하는 경우 참고, $t=-1$일 때 수렴함 주의)

모든 실수 $t$에 대하여 $\lim_{x \to t} \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^3(x-2)}$ 는 항상 수렴한다. (거짓)

$\Rightarrow$ $t=-1, t=2$일 때 발산 ( - 무조건 발산하는 경우 참고 )

**#예제1. 최고차항 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.**

(가) 모든 실수 $t$에 대하여 $\lim_{x \to t} \frac{f(x)}{(x-1)^2(x+3)}$ 가 존재한다.

(나) $f(2)=15$

**#예제2. 이차함수 $f(x)$와 모든 실수 $t$에서 정의된 함수 $g(t)=\lim_{x \to t} \frac{f(x)}{(x-2)(x^2+x+1)}$ 에 대하여,**

**함수 $f(x)$와 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.**

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2-2x+3}=3$

(나) $g(1)=-5$

studentl

**#예제1 Solution.**

$\lim_{x \to t} \dfrac{f(x)}{(x-1)^2(x+3)}$ 는 일반적으로 존재함.

분자가 수렴하고 분모가 0이 아닌 수로 수렴하면 아무 문제 없이 극한의 성질을 이용할 수 있기 때문.
단, 분모가 0으로 가는데 분자가 0으로 가지 않는 경우에는 발산함. (무조건 발산하는 경우)
따라서 분모가 0으로 가는 지점이 의심됨. 그러나 그럼에도 불구하고 극한값은 항상 존재해야 함.
그러므로 $f(x)$는 분모가 0으로 가는 지점에서 같이 0으로 가줘야함.
따라서 $f(x)=(x-1)^2(x+3)Q(x)$. ($x-1$의 개수 주의)
이때 $f(x)$는 최고차항 계수가 1인 사차함수이므로 $f(x)=(x-1)^2(x+3)(x-k)$라 하면
$f(2)=15$이므로 $f(2)=5(2-k)=15$. 따라서 $k=-1$이다.
그러므로 $f(x)=(x-1)^2(x+3)(x+1)$에서 $f(-2)=-9$이다.

**#예제2 Solution.**

함수 $g(t)$가 모든 실수 $t$에서 정의되었으므로 모든 실수 $t$에 대하여 $\lim_{x \to t} \dfrac{f(x)}{(x-2)(x^2+x+1)}$ 가 존재해야함.

이때 $\lim_{x \to t} \dfrac{f(x)}{(x-2)(x^2+x+1)}$ 는 일반적으로 존재함.

분자가 수렴하고 분모가 0이 아닌 수로 수렴하면 아무 문제 없이 극한의 성질을 이용할 수 있기 때문.
단, 분모가 0으로 가는데 분자가 0으로 가지 않는 경우에는 발산함. (무조건 발산하는 경우)
따라서 분모가 0으로 가는 지점이 의심됨. 그러나 그럼에도 불구하고 극한값은 항상 존재해야 함.
그러므로 $f(x)$는 분모가 0으로 가는 지점에서 같이 0으로 가줘야함.
따라서 $f(x)=(x-2)Q(x)$.

이때 $f(x)$는 이차함수이고 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^2-2x+3}=3$이므로 $f(x)=3(x-2)(x-k)$.

(그 어떤 실수 $x$에 대해서도 $x^2+x+1 \neq 0$이므로 $x^2+x+1$은 인수로 가질 필요 없음 주의)

한편 $g(1)=\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{(x-2)(x^2+x+1)}=\dfrac{f(1)}{-3}=-5$이므로 $f(1)=15$.

그러므로 $f(1)=-3(1-k)=15$, $k=6$.
따라서 $f(x)=3(x-2)(x-6)$이므로 구하고자 하는 답은 $f(4)=3\times2\times(-2)=-12$.