일격필살 모의고사 3회 해설

정답과 해설

23번	24번	25번	26번
③	①	⑤	③
27번	**28번**	**29번**	**30번**
④	⑤	**12**	**61**

23. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=(3,\ 0)$, $2\vec{a}+\vec{b}=(5,\ 6)$일 때, $\left|\vec{b}\right|$의 값은? [2점]

① $4\sqrt{2}$ ② $\sqrt{35}$ ③ $\sqrt{37}$
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

$2\vec{a}+\vec{b}=(5,\ 6)$이고 $2\vec{a}=(6,\ 0)$이므로 $\vec{b}=(-1,\ 6)$이다. 따라서

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+6^2}=\sqrt{37}$$

이다.

정답 : ③

24. 포물선 $y^2=12x$의 초점은 타원 $\dfrac{x^2}{3a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$의 한 초점이다. 양수 a의 값은? [3점]

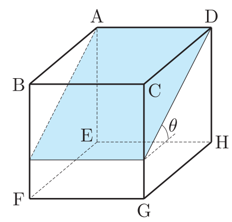
① $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ ② $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ ③ 3
④ $\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

포물선 $y^2=12x$의 초점은 점 $(3,\ 0)$입니다. 타원 $\dfrac{x^2}{3a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$의 한 초점은 점 $\left(\sqrt{2}a,\ 0\right)$입니다. 즉 $\sqrt{2}a=3$에서 $a=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$입니다.

정답 : ①

25. 한 변의 길이가 1인 정육면체 ABCD − EFGH가 있다. 직선 AD를 포함하고 평면 ABCD와 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$의 각을 이루는 평면으로 정육면체를 잘랐을 때 생기는 단면의 넓이가 $\dfrac{4}{3}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$
④ $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}$



단면의 평면 ABCD 위로의 정사영은 사각형 ABCD입니다. 즉 $\cos\theta=\dfrac{1}{\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{4}$입니다.

정답 : ⑤

26. 좌표평면에서 점 $(4, a)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{d}=(a, 2)$인 직선이 점 $(3a, 4)$를 지날 때, 모든 a의 값의 합은? [3점]

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

주어진 직선의 방정식은 $\dfrac{x-4}{a}=\dfrac{y-a}{2}$입니다. 즉 $\dfrac{3a-4}{a}=\dfrac{4-a}{2}$에서 $a=2$또는 $a=-4$이므로 모든 a의 값의 합은 -2입니다.

정답 : ③

27. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있고 x좌표와 y좌표가 모두 0이 아닌 점 P에 대하여, 점 P에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P의 x좌표가 점 Q의 x좌표의 3배일 때, $\dfrac{b^2}{a^2}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

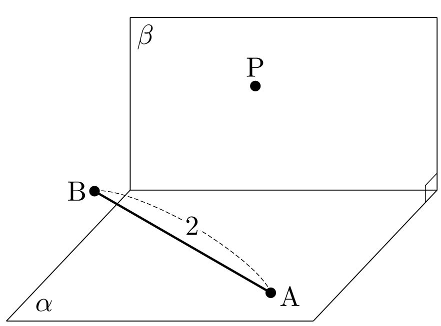
점 $\mathrm{P}\,(p,\ q)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$입니다. 따라서 접선의 기울기는 $-\dfrac{b^2p}{a^2q}$이고, 직선 l과 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{a^2q}{b^2p}$입니다. 즉 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식은 $y-q=\dfrac{a^2q}{b^2p}(x-p)$입니다. 여기에 $y=0$을 대입하면 $x=p-\dfrac{b^2p}{a^2}$입니다. 따라서 점 Q의 x좌표는 $p-\dfrac{b^2p}{a^2}$이므로 $3\left(p-\dfrac{b^2p}{a^2}\right)=p$에서 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{2}{3}$입니다.

정답 : ④

28. 그림과 같이 서로 수직인 두 평면 α, β가 있다. 평면 α 위의 점 A와 두 평면 α, β 위에 있지 않은 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

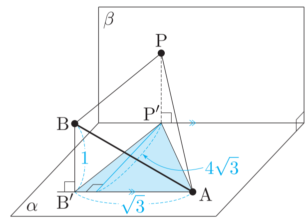
> (가) 평면 β 위의 임의의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 항상 6이다.
> (나) 점 B와 평면 α 사이의 거리는 1이고, 선분 AB의 길이는 2이다.

삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은? [4점]



① $6\sqrt{3}$ ② $\dfrac{11}{2}\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{3}$
④ $\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

두 점 B, P의 평면 α 위로의 정사영을 각각 B$'$, P$'$이라 하겠습니다. 점 P$'$이 두 평면의 교선 위의 점이고 삼각형 B$'$AP$'$의 넓이가 6으로 일정하므로 직선 AB$'$은 두 평면의 교선과 평행합니다.

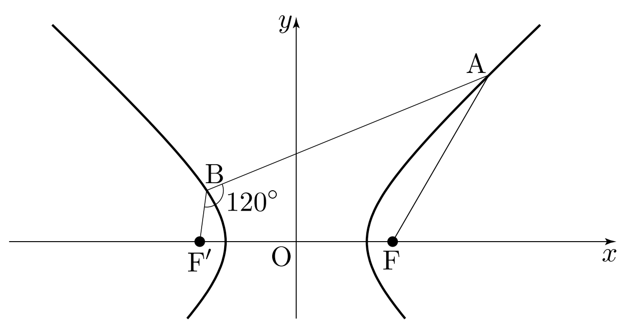


$\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 $\overline{\mathrm{BB'}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{3}$입니다. 따라서 점 P$'$과 직선 AB$'$ 사이의 거리는 항상 $4\sqrt{3}$입니다. 즉 직선 AB와 점 P 사이의 거리의 최솟값은 $4\sqrt{3}$입니다. 따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$입니다.

정답 : ⑤

29. 두 양수 a, b에 대하여 두 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, $a^2-b^2=p+q\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]

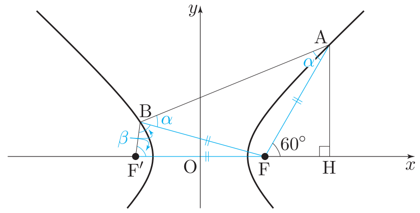
> (가) 점 A는 제1사분면 위에 있고, 점 B는 제2사분면 위에 있다.
> (나) $\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{FF'}}$, $\angle\mathrm{ABF'}=120°$



주어진 쌍곡선에서 $a^2+b^2=4\cdots$①이고, 주축의 길이는 $2a$입니다.

1) 점 A의 좌표를 구하는 과정

풀이 1) 이등변삼각형을 이용하기



조건 (나)에서 $\overline{FA} = \overline{FB} = \overline{FF'}$이므로 두 삼각형 FAB와 FBF′은 각각 $\overline{FA} = \overline{FB}$, $\overline{FB} = \overline{FF'}$인 이등변삼각형입니다.

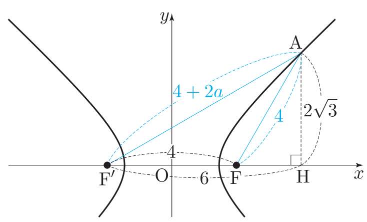
$\angle FAB = \alpha$, $\angle FBF' = \beta$라 하겠습니다. 조건 (나)에서 $\angle ABF' = 120°$라 하였으므로 $\alpha + \beta = 120°$입니다. 두 삼각형 FAB, FBF′이 이등변삼각형이므로 $\angle AFB = 180° - 2\alpha$, $\angle BFF' = 180° - 2\beta$이고, $\angle AFF' = 360° - 2(\alpha + \beta) = 120°$입니다. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle AFH = 60°$입니다. $\overline{AF} = 4$이므로 $\overline{FH} = 2$, $\overline{AH} = 2\sqrt{3}$입니다. 그러면 점 A의 좌표는 $(4,\ 2\sqrt{3})$입니다.

풀이 2) 원의 성질을 이용하기

세 점 A, B, F′는 점 F를 중심으로 하는 원 위의 점입니다. 그러면 $\angle ABF' = 120°$를 원주각으로 하는 호 AF′를 생각할 수 있고, 중심각과 원주각의 관계에 의해 호 AF′(제1,3,4사분면을 지나는 호)의 중심각이 $240°$임을 알 수 있습니다. 그런데 호 AF′의 중심각은 $180° + \angle AFH$이므로 $\angle AFH = 60°$입니다. $\overline{AF} = 4$이므로 $\overline{FH} = 2$, $\overline{AH} = 2\sqrt{3}$입니다.

2) $a^2 - b^2$을 구하는 과정

풀이 1) 쌍곡선의 정의 이용하기



삼각형 AFH에서 $\overline{AF} = 4$이고, 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{AF'} = 4 + 2a$입니다. 삼각형 AF′H에서 피타고라스의 정리에 의해 $(2a+4)^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2$이고, 이 식을 정리하면 $a^2 + 4a - 8 = 0$입니다. 근의 공식에 의해 $a = -2 \pm \sqrt{12}$이고, a는 양수이므로 $a = -2 + \sqrt{12} = -2 + 2\sqrt{3}$입니다. 따라서 $a^2 = 16 - 8\sqrt{3}$입니다.

한편, ①에서 $b^2 = 4 - a^2$이므로 이를 $a^2 - b^2$에 대입하면 $a^2 - b^2 = 2a^2 - 4 = 28 - 16\sqrt{3}$입니다.

풀이 2) 점의 좌표를 쌍곡선의 방정식에 대입하기

점 $A(4,\ 2\sqrt{3})$이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식에 $x = 4$, $y = 2\sqrt{3}$을 대입하면 $\dfrac{16}{a^2} - \dfrac{12}{b^2} = 1$, $16b^2 - 12a^2 = a^2b^2$입니다. 여기에 $b^2 = 4 - a^2$를 대입하면 $a^4 - 32a^2 + 64 = 0$이고 이것을 풀면 $a^2 = 16 - 8\sqrt{3}$입니다.[1] 따라서 $a^2 - b^2 = 2a^2 - 4 = 28 - 16\sqrt{3}$이고, $p + q = 12$입니다.

정답 : 12

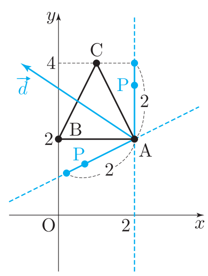
[1] ①에서 $a^2 = 4 - b^2$이고 $b^2 > 0$이므로 $a^2 < 4$인데, $a^2 = 16 + 8\sqrt{3}$이면 $a^2 > 4$이므로 조건을 만족시키지 않습니다.

30. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,2)$, $\mathrm{B}(0,2)$, $\mathrm{C}(1,4)$에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

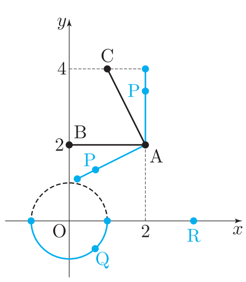
> (가) $\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\times\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=0$
>
> (나) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\le 2$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\ge 0$

$x^2+y^2=1$ 위의 점 Q와 x축 위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\le 0$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|\le 12$ 일 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|$의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{5}$이다. $5(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

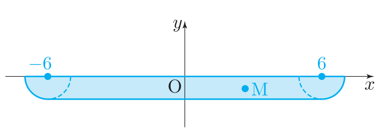
세 점 A, B, C를 나타내면 다음과 같습니다.



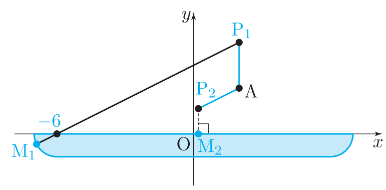
(가)에 의해 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$또는 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 또는 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$와 수직입니다. 즉 점 P는 점 A를 지나고 직선 AB또는 직선 AC에 수직인 직선 위에 있습니다. 그런데 $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$에 대하여 $\vec{d}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\ge 0$이므로, 점 A를 기준으로 왼쪽 아래로 내려가는 방향, 위쪽으로 올라가는 방향에만 점 P가 존재할 수 있습니다. 또한 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\le 2$이므로 선분 AP의 길이는 2이하입니다. 따라서 점 P가 존재할 수 있는 위치는 위 그림과 같습니다.



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 6)$이므로 점 Q는 원 $x^2+y^2=1$의 $y\le 0$인 부분을 움직입니다. 또한 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|\le 12$이므로 점 R는 x축 위의 $-12\le x\le 12$인 부분을 움직입니다.



두 점 Q, R의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}=2\overrightarrow{\mathrm{PM}}$입니다. 이때 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$이므로, 점 M은 점 $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 종점을 $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 만큼 평행이동한 점입니다. $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 종점은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원이므로, 이 원을 x축 방향으로 -6이상 6 이하만큼 평행이동한 원 위의 점이 M이 될 수 있습니다. 즉 점 M은 위 그림의 색칠한 영역의 내부 또는 경계에 존재합니다.



점 P, M이 각각 위 그림의 P_1, M_1의 위치에 있을 때 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|$이 최대가 됩니다. 점 P, M이 각각 위 그림의 P_2, M_2의 위치에 있을 때 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|$이 최소가 됩니다. 즉 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|$의 최댓값은 $4\sqrt{5}+\frac{1}{2}$, 최솟값은 $2-\frac{2}{5}\sqrt{5}$입니다. 따라서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|$의 최댓값은 $8\sqrt{5}+1$, 최솟값은 $4-\frac{4}{5}\sqrt{5}$이므로 $M+m=5+\frac{36}{5}\sqrt{5}$이고, $5(a+b)=61$입니다.

정답 : 61