15. 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}ax^2+b,\quad g(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2$$

이 있다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)+|f(x)-g(x)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이고
> $x=\alpha$, $x=\beta\,(\alpha<\beta)$에서 극소이다.

$h(\alpha)\geq h(\beta)$일 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

(가): $h(x)$의 미가성 → $|f(x)-g(x)|$의 미가성
→ $f(x)-g(x)$가 x축을 관통하면 미가 x
= 접하지 않으면서 통과

항상 왼쪽 범위부터 쓰면 혼동을 줄일수 있다.

$x=-1$에서 미가 x이다. ... ㉠
→ 관통한다.

2 분해해 생각.

다른 곳들은 모다 미가 o이다. ... ㉡
→ 통과 x (or 접하면서 통과한다.)
→ $f(x)-g(x)=0$이 (3이상 홀수) 중근을 갖는다.
그런데 조건에 따라, $f(x)-g(x)$는 3차함수, 즉 3중근까지만 가질 수 있는데
$x=-1$ 근을 갖지만 $x=-1$이 3중근이 아니므로
이 문제에서는 이 경우는 불가능하다. ... ㉢

$t(x)=f(x)-g(x)=-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}ax^2+b$

$x=-1$: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+b=0$, $b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$

-1	1	a	0	$1-a$
		-1	$1-a$	$a-1$
	1	$a-1$	$1-a$	0

$t(x)=-\frac{1}{2}(x+1)\left(x^2+(a-1)x-(a-1)\right)$

$x=-1$을 해로 갖지 않아야 한다. ← ㉠
$x=-1$: $1-(a-1)-(a-1)=\boxed{3-2a\neq 0}$

실근이 중근이거나, 없어야 한다. ← ㉡
$D=(a-1)^2+4(a-1)\leq 0$, $\boxed{-3\leq a\leq 1}$
$(a-1)(a+3)$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{n}+4$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$n=1$: $a_2=a_1+4=6$
$n=2$: $a_3=\frac{a_2}{2}+4=3+4=\boxed{7}$

17. 함수 $f(x)=3x^2+4$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)+F(2)=14$일 때, $F(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$F(x)=x^3+4x+C$
$x=0$: C
$+$ $x=2$: $8+8+C$
$16+2C=14$, $C=-1$

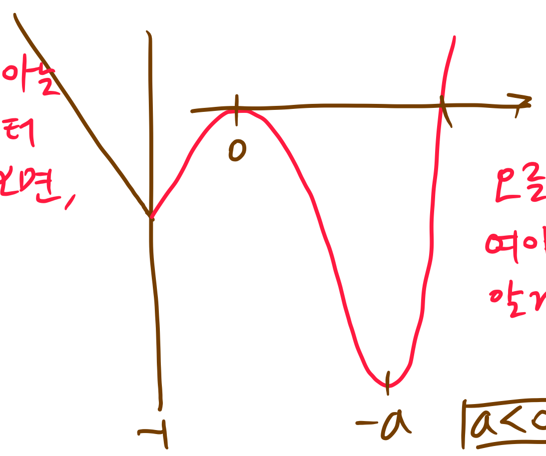
㉮ $=27+12+C$
$=\boxed{38}$

(나): ㉡으로 인해, 절댓값 다르게 벗겨지는 경계 1곳만: $x=-1$
$x\to+\infty$를 상상하면 $\frac{1}{6}x^3<\frac{2}{3}x^3$에서 $f(x)<g(x)$이므로
각 범위에서 절댓값이 어떻게 벗겨질지 알수 있다.

$x<-1$: 2대로 $2f(x)-g(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+a-1-\frac{2}{3}x^3-ax^2$
$h(x)=-\frac{1}{3}x^3+a-1$, $h'(x)=-x^2$

$x\geq-1$: 반대로 $g(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2=h(x)$, $h'(x)=2x^2+2ax$
$=2x(x+a)$

대략



증감을 확실히 아는 왼쪽부터 그려보면,

오른쪽은 여야 함을 알게 된다. $\boxed{a<0}$

$h(-1)=-\frac{2}{3}+a$

$h(-a)=-\left(\frac{a}{3}\cdot\frac{(-a)^3}{2}\right)=\frac{1}{3}a^3$

$\frac{1}{3}a^3\leq-\frac{2}{3}+a$
$a^3-3a+2\leq 0$
$(a-1)^2(a+2)$
$\boxed{a=-1 \text{ or } a\leq-2}$

□의 교집합을 찾으면, 최종: $-3\leq a\leq-2$

$a+b=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}$

㉮ $=\frac{3}{2}(-2-(-3))=\boxed{\frac{3}{2}}$