[2025학년도 9월 모의평가 21번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \leq \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \leq 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오.

[답] 31

이건 첫 번째 레슨 : 부등식 풀기

문제에 부등식이 주어졌고, 중앙에는 $f(x)$에 관한 식이, 양 끝은 우리가 알고 있는 친숙한 다항함수가 자리 잡고 있습니다. 이럴 때는 우선 양 끝의 두 함수가 서로 만나는 지점(교점)이 있는지 확인해보는 것이 좋습니다.

$2k-8=4k^2+14k$

이므로 $k=-1$ 또는 $k=-2$가 나옵니다.

문제에서 주어진 식 $2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$에 $k=-1$, $k=-2$를 대입해 봅시다.

(i) $k=-1$ 대입

$-10 \le \frac{f(1)-f(-1)}{2} \le -10$이므로 $f(1)-f(-1)=-20$입니다.

(ii) $k=-2$ 대입

$-12 \le \frac{f(0)-f(-2)}{2} \le -12$이므로 $f(0)-f(-2)=-24$입니다.

문제의 조건에서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이라고 했으므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

로 놓고 위에서 구한 두 식을 연립하면 다음과 같은 결과를 얻습니다.

$f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-11x+c$

이를 미분하면

$f'(x)=3x^2+5x-11$

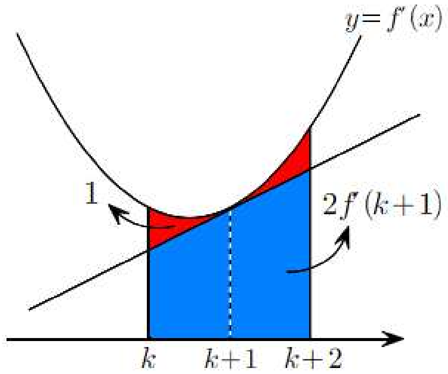
이므로

$$\begin{aligned} f'(3) &= 3\times 3^2+5\times 3-11 \\ &= 31 \end{aligned}$$

이건 두 번째 레슨 : 함숫값의 차를 적분으로 바라보기

문제에서 최종적으로 구하라고 한 것은 $f(x)$의 값이 아닌 $f'(3)$의 값입니다.
그렇다면 주어진 부등식 중앙에 있는 $f(x)$에 관한 식을 $f'(x)$에 관한 식으로 한 번 바꾸어 생각해볼 수 있습니다.

$f(k+2)-f(k)$를 $f'(k)$에 관한 식으로 바꾸기 위해선 정적분이 필요합니다.
즉, 미적분학의 기본 정리에 의해 $f(k+2)-f(k)=\int_k^{k+2} f'(x)\,dx$로 표현할 수 있습니다.
이를 시각적으로 파악하기 위해 그래프를 그려 관찰해봅시다.



$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로, $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 아래로 볼록한 이차함수입니다.
이차함수 성질에 의해 적분 구간의 길이가 2인 $\int_k^{k+2} f'(x)\,dx$의 넓이는 중앙값에서의 함숫값을 이용해 다음과 같이 깔끔하게 나타낼 수 있습니다.

$$\int_k^{k+2} f'(x)dx = 2f'(k+1)+2$$

이를 통해 주어진 부등식을 다시 써보면

$$2k-8 \le f'(k+1)+1 \le 4k^2+14k$$

으로 도함수에 관한 식으로 새롭게 변형됩니다.

이 부등식은 모든 정수 k에 대하여 성립해야 합니다.
풀이 1번의 레슨에서 얻은 힌트를 활용하면

$k=-1$일 때 (양 끝 값이 -10이므로)
$f'(0)+1=-10 \Rightarrow f'(0)=-11$

$k=-2$일 때 (양 끝 값이 -12이므로)
$f'(-1)+1=-12 \Rightarrow f'(-1)=-13$
$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로, $f'(x)=3x^2+px+q$로 둘 수 있습니다.
$f'(0)=-11$이므로 상수항 $q=-11$입니다.

$f'(-1)=3-p-11=-13$이므로 $p=5$입니다.

$f'(3)=3\times 3^2+5\times 3-11=31$