수학 영역(공동) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ① (출제자 : 24 김진영)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

[해설]

$\sqrt[3]{\frac{64}{81}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

$= \left(\frac{4^3}{3^4}\right)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{4}{3^{\frac{4}{3}}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{4}{3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}}$

$= \frac{4}{3^1}$

$= \frac{4}{3}$

2) [정답] ② (출제자 : 25 양은서)

[출제의도] 미분계수를 계산할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ 에서

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 6$

이므로

$f'(2) = 12 - 16 + 6 = 2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+2h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+2h) - f(2)}{2h} \times 2$$
$$= f'(2) \times 2 = 2 \times 2 = 4$$

3) [정답] ③ (출제자 : 26 손은우)

[출제의도] 시그마의 정의와 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\sum_{k=1}^{4}(6a_k - k) = 6\sum_{k=1}^{4} a_k - \sum_{k=1}^{4} k$$
$$= 6\sum_{k=1}^{4} a_k - \frac{4 \times 5}{2}$$
$$= 6\sum_{k=1}^{4} a_k - 10$$
$$= 8$$

에서 $6\sum_{k=1}^{4} a_k = 18$

따라서 $\sum_{k=1}^{4} a_k = 3$

4) [정답] ⑤ (출제자 : 25 김현)

[출제의도] 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$

이 성립해야 한다. 이때,

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (ax^2 - a^2) = 4a - a^2$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = f(2) = 4$

이므로

$4a - a^2 = 4$

$a^2 - 4a + 4 = 0$

$(a-2)^2 = 0$

따라서 $a = 2$

5) [정답] ③ (출제자 : 26 두윤주)

[출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = (x^2 + 3x + 3)(x - 4)$ 에서 미분하면

$f'(x) = (2x+3)(x-4) + x^2 + 3x + 3$

이때 $f'(2) = 7 \times (-2) + 13$

$= -14 + 13$

$= -1$

6) [정답] ② (출제자 : 25 김근원)

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

로그의 성질에 의하여

$\log a = \log_a b = k$ 에서

$a = 10^k$, $b = a^k$ 이고,

로그의 성질에 의하여

$\log_a 2 \times \log b = \log 4$ 에서

$\log_a 2 \times \log_2 b = 2$

$\log_a b = 2$ 이므로

$k = 2$

따라서 $a=10^2$, $b=10^4$ 이므로

$\log ab=\log 10^6$

$=6$

7) [정답] ② (출제자 : 25 이소은)

[출제의도] 두 곡선에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]

$y=x^3-x^2-x$ 에서

$y'=3x^2-2x-1$

이므로 점 $(1,-1)$ 에서의 접선의 방정식은

$y+1=0\times(x-1)$

$y=-1$

또한, $y=x^4+4x+a$ 에서

$y'=4x^3+4$

이고 곡선 $y=x^4+4x+a$ 와 직선 $y=-1$ 이

접하므로 접점의 x 좌표는

$4x^3+4=0$, $x^3=-1$

$x=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,-1)$ 이고

이 점은 곡선 $y=x^4+4x+a$ 위의 점이므로

$-1=1-4+a$

$a=2$

8) [정답] ④ (출제자 : 26 김리나)

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$6\cos^2(\pi-\theta)=-\cos\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)+4$ 에서

$\cos^2(\pi-\theta)=(-\cos\theta)^2=\cos^2\theta$ 이고,

$-\cos\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\sin\theta$,

이므로

$6\cos^2\theta=\sin\theta+4$

$6\cos^2\theta-\sin\theta-4=0$

$6(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-4=0$

$6\sin^2\theta+\sin\theta-2=0$

$(2\sin\theta-1)(3\sin\theta+2)=0$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{2}{3}$

θ 는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

따라서

$\sin\theta=-\frac{2}{3}$ 이고

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$

$=-\sqrt{\frac{5}{9}}$

$=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서

$\cos\theta+\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$=\frac{\sqrt{5}}{15}$

9) [정답] ② (출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 등식

$2F(x)=xf(x)-x^3$

의 양변을 x 에 대해 미분하면

$2f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2$

$f(x)=xf'(x)-3x^2$

다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을

ax^n ($a\neq 0$, n 은 음이 아닌 정수)이라 하면

(i) $n=1$ 일 때

최고차항끼리 비교하면

$ax=-3x^2$

양변의 차수가 맞지 않아 모순이다.

(ii) $n=2$ 일 때

최고차항끼리 비교하면

$ax^2=(2a-3)x^2$

$a=3$

(iii) $n>2$ 일 때

최고차항끼리 비교하면

$ax^n=nax^n$

$a\neq 0$ 이므로 $n=1$

이는 $n>2$ 에 모순이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $n=2$, $a=3$

따라서

$f(x)=3x^2+bx+c$ (b, c 는 상수)라 하면

$f'(x)=6x+b$ 이므로

$3x^2+bx+c=x(6x+b)-3x^2$

$3x^2+bx+c=3x^2+bx$

양변의 계수를 비교하면

$c=0$

즉, $f(x)=3x^2+bx$

이때, $f(1)=2$ 이므로

$3+b=2$

$b=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-x$ 이므로
주어진 등식
$2F(x)=xf(x)-x^3$ 에서
$2F(2)=2\times f(2)-2^3$
$F(2)=f(2)-2^2$
$\quad =(3\times 2^2-2)-2^2$
$\quad =6$

10) [정답] ① (출제자 : 24 김진영)
[출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

[해설]
곡선 $y=a^{|x|+x}-1$ 에서
$x\le 0$ 일 때 $|x|+x=-x+x=0$ 이므로 $y=a^0-1=0$ 이다.
$x>0$ 일 때 $|x|+x=x+x=2x$ 이므로 $y=a^{2x}-1>0$ 이다.

따라서 점 A 의 좌표는
$\mathrm{A}(-\sqrt{5},\,0)$
이고, $b>0$ 이므로 점 B 의 좌표는
$\mathrm{B}(b,\,a^{2b}-1)$
이다.

이때 조건에서 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{BO}}$ 이고, $\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{5}$ 이므로
$\overline{\mathrm{BO}}=\sqrt{5}$
이다.
점 B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면
$\overline{\mathrm{OH}}=b,\ \overline{\mathrm{BH}}=a^{2b}-1$
이다.

삼각형 OBH 는 직각삼각형이므로
$b^2+(a^{2b}-1)^2=5$ ⋯⋯ ㉠
이다.

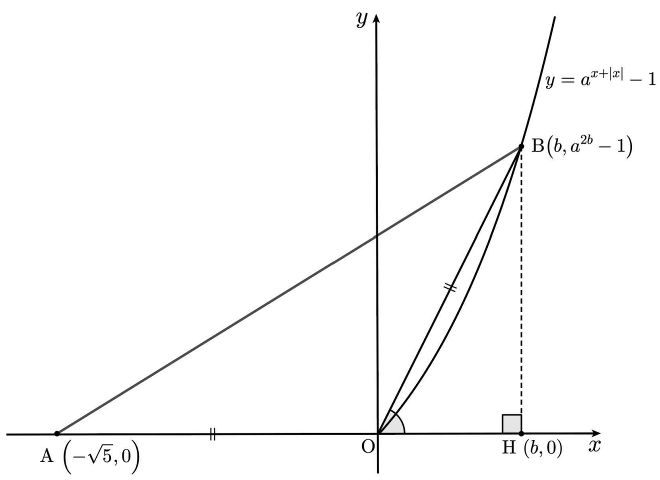
한편, 점 A 는 x 축의 음의 방향 위의 점이고, 점 H 는 x 축의 양의 방향 위의 점이고, 세 점 A, O, H 는 이 순서대로 한 직선 위에 있으므로
$\angle\mathrm{AOB}=\pi-\angle\mathrm{BOH}$
이다.

따라서
$\cos(\angle\mathrm{AOB})=-\cos(\angle\mathrm{BOH})$
이고, 직각삼각형 OBH 에서
$\cos(\angle\mathrm{BOH})=\dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{BO}}}=\dfrac{b}{\sqrt{5}}$
이므로
$\cos(\angle\mathrm{AOB})=-\dfrac{b}{\sqrt{5}}$
이다.
그런데 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로
$-\dfrac{b}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$
이므로
$b=1$
이다.

㉠에 $b=1$ 을 대입하면
$1+(a^2-1)^2=5$
이므로
$(a^2-1)^2=4$
이다.
이때 $a>1$ 이므로 $a^2-1>0$ 이다.
따라서
$a^2-1=2$
에서
$a^2=3$
이다.

그러므로
$a^2+b^2=3+1=4$

[별해]
참고용 그림



11) [정답] ⑤ (출제자 : 25 양은서)
[출제의도] 가속도와 속도의 관계를 이해하여 속도 함수를 구하고, 이를 활용해 점의 운동 방향과 위치 변화를 추론할 수 있는가?

[해설]
점 P 의 시각 $t\ (t\ge 0)$ 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하자.
$0\le t<4$ 일 때,
$v(t)=t^3-6t^2+C$ (C 는 적분상수)
문제의 조건에서 시각 $t=1$ 에서의 속도가 22 이므로
$v(1)=1^3-6\times 1^2+C=-5+C=22$ 에서 $C=27$
즉, $0\le t<4$ 에서 $v(t)=t^3-6t^2+27$

ㄱ. $t\ge 4$ 일 때 $a(t)=0$ 이므로 $v(t)=c$ (단, c 는 상수)
속도 $v(t)$ 는 $t\ge 0$ 인 모든 실수에서 연속이므로 $t=4$ 에서
$c=4^2(4-6)+27=-5$
따라서 $t\ge 4$ 에서 $v(t)=-5$ 이다. (참)

ㄴ. $0\le t<4$ 일 때 $v(t)=t^3-6t^2+27=(t-3)(t^2-3t-9)$
$t=3$ 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.
따라서
시각 $t=3$ 에서 점 P 의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄷ. 시각 t 에서의 점 P 의 위치를 $x(t)$ 라 하고, 시각 $t=0$ 에서의 위치를 $x(0)$ 이라 하자.
출발한 후 점 P 의 위치와 시점 $t=0$ 에서 점 P 의 위치가 같아지려면 $x(t)-x(0)=\int_0^t v(s)ds=0$ 을 만족시켜야 한다.

$$v(t)=\begin{cases} t^3-6t^2+27 & (0\le t<4) \\ -5 & (t\ge 4)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$0<t<3$ 인 모든 시각 t 에서 점 P 가 양의 방향으로 이동하고,
시각 $t=3$ 이후 점 P 는 계속 음의 방향으로 이동하여 위치가 감소하므로 ㉠을 만족시키는 순간은
$t>3$ 에서 반드시 한 번뿐이다. (참)

12) [정답] ④ (출제자 : 26 정진우)
[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

[해설]
$a_{35}+a_{36}=7$ 이므로
$a_{35}\times a_{36}=a_{35}\times(7-a_{35})=6$
$(a_{35})^2-7a_{35}+6=(a_{35}-6)(a_{35}-1)=0$
따라서
$a_{35}=6$ 또는 $a_{35}=1$ 이다.

(i) $a_{35}=6$ 인 경우
$a_{34}+a_{35}=7$
$a_{34}=2a_{11}$
$a_{34}=1$ 이므로
$a_{11}=\frac{1}{2}$
이므로 모든 항이 정수라는 조건에 모순이다.

(ii) $a_{35}=1$ 인 경우
$a_{34}+a_{35}=7$
$a_{34}=2a_{11}$
$a_{34}=6$ 이므로
$a_{11}=3$
같은 방법으로
$a_{10}+a_{11}=7$
$a_{10}=2a_3$
$a_{10}=4$ 이므로
$a_3=2$

또한
$a_1+a_2=7$, $a_5+a_6=7$, $a_8+a_9=7$,
$a_4=2a_1$, $a_7=2a_2$
이다

따라서
$$\sum_{k=1}^{9}a_k=7+a_3+2a_1+7+2a_2+7=23+2(a_1+a_2)=37$$

13) [정답] ① (출제자 : 26 두윤주)
[출제의도] 함수의 극한에 대한 조건이 주어졌을 때 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]
$\lim_{x\to t}\frac{|f(x)|-|f(t)|}{f(x)-f(1)}$ 에서
$f(t)\ne f(1)$ 이면
$\lim_{x\to t}\frac{|f(x)|-|f(t)|}{f(x)-f(1)}=0$
따라서
$f(t)=f(1)$

주어진 조건을 만족시키는 실수 t 의 값이 -2 와 1 뿐이므로
$x=-2$, $x=1$ 은 방정식 $f(x)=f(1)$ 의 실근이다.

$f(x)-f(1)=(x-1)(x+2)(x-k)$

(i) $k\ne 1, k\ne -2$ 일 때
$f(0)=-4$ 이므로
$-4-f(1)=(-1)\times 2\times(-k)=2k$
$f(1)=-4-2k$
$k\ne -2$ 이므로 $f(1)\ne 0$

(i -ⓐ) $f(t)>0$ 일 때
$\lim_{x\to t}\frac{|f(x)|-|f(t)|}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(t)}{f(x)-f(1)}$
$t=1$, $t=-2$ 일 때 극한값이 1 이므로 모순이다.

(i -ⓑ) $f(t)<0$ 일 때
$\lim_{x\to t}\frac{|f(x)|-|f(t)|}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to t}\frac{-f(x)+f(t)}{f(x)-f(1)}$
$t=1$, $t=-2$, $t=k$ 일 때 모두 극한값이 -1 로 수렴한다.
따라서 극한값이 음수가 되도록 하는 실수 t 의 값이 -2 와 1 뿐임에 모순이다.

(ii) $k=-2$ 일 때
$f(0)=-4$ 이므로
$-4-f(1)=(-1)\times 2^2=-4$
$f(1)=0$
따라서
$f(x)=(x-1)(x+2)^2$

$t=1$ 일 때
$\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{|(x-1)(x+2)^2|}{(x-1)(x+2)^2}$
$\lim_{x\to 1+}\frac{|f(x)|}{f(x)}=1$
$\lim_{x\to 1-}\frac{|f(x)|}{f(x)}=-1$
극한값이 존재하지 않아 모순이다.

(iii) $k=1$ 일 때
$f(0)=-4$ 이므로
$-4-f(1)=(-1)^2\times 2=2$
$f(1)=-6$
따라서
$f(x)=(x-1)^2(x+2)-6$

$t=-2$, $t=1$ 에서 $f(t)=f(1)=-6$ 이므로

$$\lim_{x\to t}\frac{|f(x)|-|f(t)|}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to t}\frac{-f(x)-(-f(t))}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to t}\frac{-(f(x)-f(t))}{f(x)-f(1)}=-1$$

따라서 조건을 만족시킨다.

(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)에 의하여 $f(x)=(x-1)^2(x+2)-6$ 이므로

$$f(3)=(3-1)^2(3+2)-6=4\times5-6=14$$

14) [정답] ⑤ (출제자 : 25 하효진)

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용해 변의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

직선 AC 와 직선 BD 가 평행하므로 $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{BAC}$ 이고

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ACE}$ 이므로

삼각형 ABD 와 삼각형 CAE 는 서로 닮음이다.

이때 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{AE}}=5:4$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CA}}=5:4$

$\overline{\mathrm{AB}}=5k$, $\overline{\mathrm{CA}}=4k$ 라 하자.

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{BAC}$ 이고 $\angle\mathrm{ABD}<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos(\angle\mathrm{BAC})=\frac{1}{8}$

이때 삼각형 BAC 에서 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos(\angle\mathrm{BAC})=25k^2+16k^2-2\times5k\times4k\times\frac{1}{8}=36k^2$$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=6k$

이때 원 O 의 반지름의 길이가 $\frac{8\sqrt{7}}{7}$ 이므로

삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{16\sqrt{7}}{7}\times\sin(\angle\mathrm{BAC})=6$$

따라서 $k=1$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{CA}}=4$

이때 선분 CE 는 각 ACB 의 각의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{CA}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{BE}}=2:3$

$\overline{\mathrm{AB}}=5$ 이므로

$\overline{\mathrm{BE}}=5\times\frac{3}{5}=3$

15) [정답] ⑤ (출제자 : 25 김현)

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 식

$$g(x)=\int_0^x(|f(t)|-f(t))\,dt$$

의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\ge0)\\ -2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$$

이다.

$\int_a^{a+k}g(x)\,dx=kg(a)$ 에서

$\int_a^{a+k}(g(x)-g(a))\,dx=0$

이어야 한다.

이때 $x\ge a$ 인 모든 실수 x 에 대해 $g(x)\ge g(a)$ 이므로

구간 $[a,\ a+k]$ 에서 $g(x)=g(a)$ 여야 한다.

따라서 구간 $[a,\ a+k]$ 에서 $g'(x)=0$, 즉 $f(x)\ge0$ 이다.

방정식 $f(x)=0$ 의 세 실근을 α,β,γ $(\alpha\le\beta\le\gamma)$ 라 하자.

(ⅰ) $4<\alpha$ 일 때

$a=2$ 일 때 $1<k\le2$ 에 대해 구간 $[2,\ 2+k]$ 에서 $f(x)\ge0$ 을 만족시키므로 자연수 a 의 값의 집합 $\{1,4\}$ 라는 주어진 조건에 모순이다.

(ⅱ) $\beta<1$ 이고 $4<\gamma$ 일 때

$a=2$ 일 때 실수 k 의 값의 범위 $1<k\le2$ 에 대해 구간 $[2,\ 2+k]$ 에서 $f(x)\ge0$ 을 만족시키므로 자연수 a 의 값의 집합 $\{1,4\}$ 라는 주어진 조건에 모순이다.

(ⅲ) $1<\alpha\le\beta<4<\gamma$ 일 때

$\int_a^{a+k}g(x)\,dx=kg(a)$ 를 만족시키는 자연수 a 의 값의 집합 $\{1,4\}$를 집합 A 라 하자.

$f(x)\ge0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는 $x\le\alpha$ 또는 $\beta\le x\le\gamma$ 이다.

즉, 집합 A 는 $a\le\alpha-k$ 또는 $\beta\le a\le\gamma-k$ 를 만족시키는 자연수 a 의 값의 집합이다.

$1\in A$ 이므로 $1\le\alpha-k$ 이고 $2\notin A$ 이므로 $\alpha-k<2$ 이다.

이 부등식이 모든 $1<k\le2$ 에 대하여 성립해야 하므로 $\alpha=3$ 이다.

$4\in A$ 이므로 $4\le\gamma-k$ 이고 $5\notin A$ 이므로 $\gamma-k<5$ 이다.

이 부등식이 모든 $1<k\le2$ 에 대하여 성립해야 하므로 $\gamma=6$ 이다.

$4\in A$, $3\notin A$ 이므로 $3<\beta\le4$ 이다.

$f(x)=-(x-3)(x-\beta)(x-6)$ $(3<\beta\le4)$ 라 하면

$f'(x)=-(x-6)(x-\beta)-(x-3)(x-\beta)-(x-3)(x-6)$

$f'(5)=(5-\beta)-2(5-\beta)+2=\beta-3$

$|f'(5)|=\frac{1}{2}$

$f'(5)=\frac{1}{2}$ 일 때

$\beta-3=\frac{1}{2}$

$\beta=\frac{7}{2}$

$f'(5)=-\frac{1}{2}$ 일 때

$\beta-3=-\frac{1}{2}$

$\beta=\frac{5}{2}$

$3 < \beta \le 4$ 이므로

$\beta = \dfrac{7}{2}$

따라서

$f(x) = -(x-3)(x-6)\left(x-\dfrac{7}{2}\right)$

$f(0) = 63$

16) [정답] 9 (출제자 : 25 하효진)

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 특정 항의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$S_1 = a_1 = 3$

등차중항의 성질에 의하여

$S_5 = 5a_3 = 30$

$a_3 = 6$

$\dfrac{a_1 + a_5}{2} = a_3$

$a_1 + a_5 = 2a_3$

$a_5 = 2a_3 - a_1 = 9$

17) [정답] 23 (출제자 : 26 김리나)

[출제의도] 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f'(x) = 4x^3 + 2x + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int (4x^3 + 2x + 3)\,dx \\ &= x^4 + x^2 + 3x + C \end{aligned}$$

(단, C 는 적분상수)

$f(1) = 1 + 1 + 3 + C = 2$ 에서

$C = -3$

따라서

$f(x) = x^4 + x^2 + 3x - 3$

이므로

$f(2) = 16 + 4 + 6 - 3 = 23$

18) [정답] 39 (출제자 : 26 정진우)

[출제의도] 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라고 하자.

$\dfrac{a_2 + a_3 + a_4}{a_1} = \dfrac{a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3}{a_1} = r + r^2 + r^3 = a_5$ …… ㉠

$\dfrac{a_8 + a_9 + a_{10}}{a_9} = \dfrac{a_1 r^7 + a_1 r^8 + a_1 r^9}{a_1 r^8} = \dfrac{1}{r} + 1 + r = 9a_5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$9(r + r^2 + r^3) = \dfrac{1}{r^2}(r + r^2 + r^3)$ 이므로 $r = \dfrac{1}{3}$ 또는 $r = -\dfrac{1}{3}$

모든 항이 양수이므로 $r = \dfrac{1}{3}$

$a_5 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} = \dfrac{13}{27}$

따라서 $a_1 = a_5 \times \dfrac{1}{r^4} = \dfrac{13}{27} \times 81 = 39$

19) [정답] 11 (출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 함수의 극값을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 9x + 2 & (x < 0) \\ x^2 - 4x + a & (x \ge 0) \end{cases}$ 에서

$x < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 12x + 9 \\ &= 3(x+1)(x+3) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = -1$

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값

$f(-3) = -27 + 54 - 27 + 2 = 2$

를 갖고 $x = -1$ 에서 극솟값

$f(-1) = -1 + 6 - 9 + 2 = -2$

를 갖는다.

$x > 0$ 일 때,

$f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 2$

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값

$f(2) = 4 - 8 + a = -4 + a$

를 갖는다.

$x = 0$ 에서

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 2$ 이고, $f(0) = a$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 $-1 < x < 0$ 에서 증가하고 $0 < x < 2$ 에서 감소한다.

(i) $a \ge 2$ 일 때,

$x = 0$ 을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

$f(x) \le f(0) = a$ 가 성립하므로

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값 a 를 갖는다.

그러므로 함수 $f(x)$ 의 극값은 $2, -2, a, a-4$ 이다.

극값 중 서로 같은 값이 없는 경우 서로 다른 극값의 합은

$2 + (-2) + a + (a-4) = 2a - 4$

이때 $2a - 4 = 6$ 에서 $a = 5$ 이다.

$a = 5$ 일 때 극값은 $2, -2, 5, 1$ 로 모두 다르므로 조건을 만족시킨다.

극값 중 서로 같은 값이 있는 경우 $a \ge 2$ 이므로

$a = 2$ 또는 $a - 4 = -2$ 또는 $a - 4 = 2$ 이다.

$a = 2$ 이면 극값은 $2, -2, 2, -2$ 이고 서로 다른 극값의 합은

$2 + (-2) = 0 \ne 6$ 이다.

$a = 6$ 이면 극값은 $2, -2, 6, 2$ 이고 서로 다른 극값의 합은

$2 + (-2) + 6 = 6$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a < 2$ 일 때,

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 2 > a$ 이므로 $x = 0$ 에서 극댓값을 갖지 않고,
$0 < x < 2$ 에서 $f(x) < a$ 이므로 $x = 0$ 에서 극솟값도 갖지 않는다.
그러므로 함수 $f(x)$ 의 극값은 $2, -2, a-4$ 이다.
이때 서로 다른 극값의 합이 6 이 되려면 $2 + (-2) + (a-4) = 6$ 에서
$a = 10$
$a < 2$ 에 모순이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 상수 a 의 값은 $5, 6$ 이다.
따라서 모든 상수 a 의 값의 합은
$5 + 6 = 11$

20) [정답] 18 (출제자 : 26 손은우)

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 실수의 값의 범위를 구할 수 있는가?

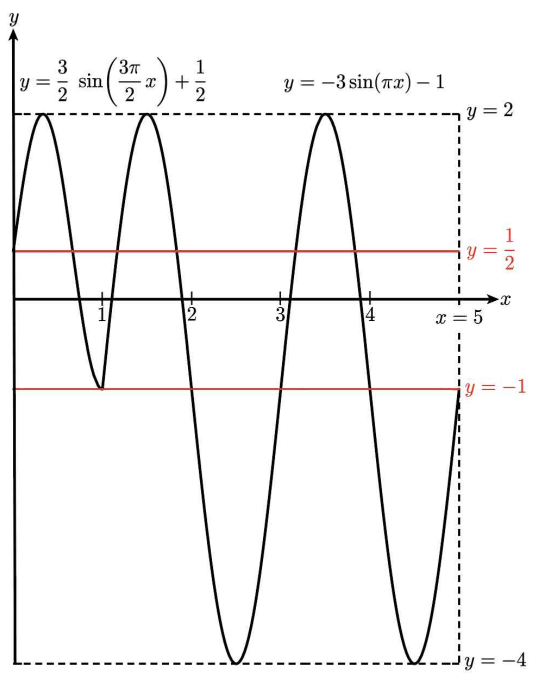
[해설]
$0 \le x < 1$ 에서 함수 $y = \frac{3}{2}\sin\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{2}$ 의 그래프는 이 구간에서 함수 $y = \frac{3}{2}\sin\frac{3\pi}{2}x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 $y = \frac{3}{2}\sin\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{2}$ 의 최댓값은 2 이고, 최솟값은 -1 이다.

$1 \le x \le a$ 에서 함수 $y = -3\sin\pi x - 1$ 의 그래프는 이 구간에서 함수 $y = -3\sin\pi x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 $y = -3\sin\pi x - 1$ 의 최댓값은 2 이고, 최솟값은 -4 이다.

그러므로 닫힌구간 $[0, a]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sin\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{2} & (0 \le x < 1) \\ -3\sin\pi x - 1 & (1 \le x \le a) \end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



문제의 조건에서 집합 $\{x \mid f(x) = t\}$ 의 원소의 개수가 4 또는 5 가 되도록 하는 모든 실수 t 의 값의 범위는 $-1 \le t < \frac{1}{2}$ 이다.
따라서 $t < -1$ 또는 $t \ge \frac{1}{2}$ 에서 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4 또는 5 가 아니다.
$-1 \le t < \frac{1}{2}$ 에서 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 또는 5 가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 $4 \le a \le 5$ 이다.
이때 $a > \frac{9}{2}$ 이면 $t < -1$ 에서 집합 $\{x \mid f(x) = t\}$ 의 원소의 개수가 4 또는 5 가 되도록 하는 실수 t 가 존재한다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는 $4 \le a \le \frac{9}{2}$ 이다.
즉 $p = 4$, $q = \frac{9}{2}$ 이므로
$p \times q = 4 \times \frac{9}{2} = 18$

21) [정답] 98 (출제자 : 25 이소은)

[출제의도] 새롭게 정의된 함수의 연속성을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

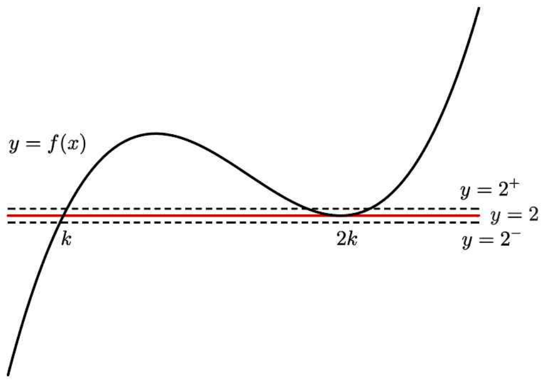
[해설]
방정식 $g(\alpha) = 0$ 을 만족시키는 α 는
$x < 0$ 일 때, $\alpha = a$ 이거나 $f(\alpha) = 0$ 을 만족시키는 α 이고
$x \ge 0$ 일 때, $f(\alpha) = t$ 를 만족시키는 α 이다.

따라서
함수 $h(t)$ 가 $t = \beta$ 에서 불연속인 경우는
$x \ge 0$ 에서 t 의 값에 따라 $f(x) = t$ 를 만족시키는 x 의 개수가 달라질 때,
즉, β 가 함수 $f(x)$ 의 극솟값이거나 $\beta = f(0)$ 인 경우이다.

조건 (가)에서
$\lim_{t \to 2+} h(t) = \lim_{t \to 2-} h(t) = 0$ 이면
$\lim_{t \to 2+} h(t) = 0$ 이므로 방정식 $g(\alpha) = 0$ 을 만족시키는 실수 α 의 최댓값이 0 으로 수렴해야 한다.
이때, $t < 2$ 이면 $f(\alpha) = t$ 를 만족시키는 0 이상의 실수 α 가 존재하지 않아야 하므로 $\lim_{t \to 2-} h(t) < 0$ 이다.
즉, $\lim_{t \to 2+} h(t) = \lim_{t \to 2-} h(t) = 0$ 을 만족시키지 않으므로
함수 $h(t)$ 는 $t = 2$ 에서 불연속이다.

함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 경우는
방정식 $f(x) = t\ (x \ge 0)$ 의 실근의 개수가 변하는 경우이다.
따라서 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 로 양수이므로
함수 $f(x)$ 가 극솟값인 경우이다.
즉, 함수 $f(x)$ 는 극솟값 2 를 갖는다.

이때, $\lim_{t \to 2-} h(t) = k$ 라 하면 $\lim_{t \to 2+} h(t) = 2k$ 이므로
조건을 만족시키려면

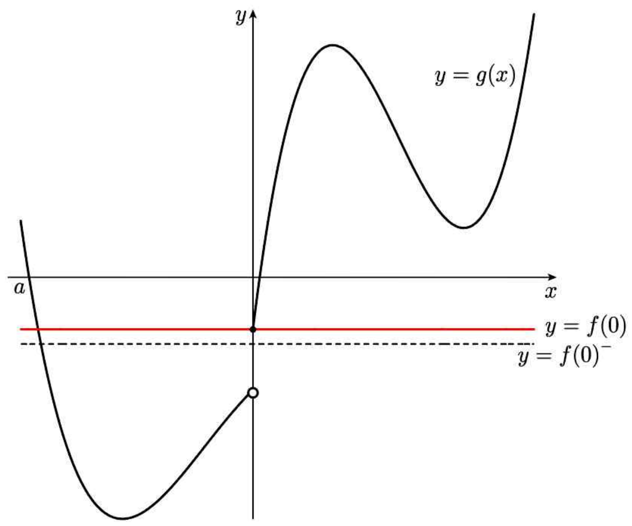


따라서

$f(x)=(x-k)(x-2k)^2+2$

조건 (나)에서

$h(a)-\lim_{t\to a^-}h(t)=2$ 이므로 함수 $h(t)$ 는 $t=a$ 에서 불연속이다.



이때,

$t=f(0)$ 일 때, 방정식 $g(\alpha)=0$ 을 만족시키는 실수 α 의 최댓값이 0 이므로 $h(t)=0$

$t<f(0)$ 일 때, $g(\alpha)=0$ 을 만족시키는 α 는 a 뿐이므로 $h(t)=a$ 이다.

즉, 함수 $h(t)$ 가 $t=f(0)$ 에서 불연속이므로

$a=f(0)$

따라서, $h(a)=0$ 이고 $\lim_{t\to a-}h(t)=a$ 이다.

$h(a)-\lim_{t\to a-}h(t)=2$ 이므로

$0-a=2$

$a=-2$

$f(0)=-2$ 이므로

$f(0)=(0-k)(0-2k)^2+2=-2$

$4k^3=4$

즉, $k=1$ 이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)^2+2$

$g(a-1)=(-3-(-2))f(-3)$

$=(-1)\times(-4\times(-5)^2+2)$

$=(-1)\times(-98)=98$

22) [정답] 8 (출제자 : 25 김근원)

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 위치 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

[해설]

네 점 A, B, C, D 를 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선을

$y=\frac{1}{2}x-b$ 라 할 때,

$\frac{1}{2}x-b=\log_4\left(\frac{x+a}{2}\right)-2$ 에서

$x=\log_2\left(\frac{x+a}{2}\right)+2b-4$

$x=2^{x-2b+5}-a$ 이므로

방정식 $x=2^{x-2b+5}-a$ 는

두 점 C, D 의 x 좌표를 두 실근으로 갖는다. …… ㉠

$\overline{AB}=\overline{CD}$ 이고, 네 점 A, B, C, D 가 직선 $y=\frac{1}{2}x-b$ 위의 점이므로

곡선 $y=2^{x-a}$ 와 어떤 실수 k 에 대하여

x 축 방향으로 $-2k$ 만큼, y 축 방향으로 $-k$ 만큼 평행이동한

곡선 $y=2^{x-a+2k}-k$ 가 두 점 C, D 를 지나면

$\frac{1}{2}x-b=2^{x-a+2k}-k$ 에서

$x=2^{x-a+2k+1}-2k+2b$ 이므로

방정식 $x=2^{x-a+2k+1}-2k+2b$ 는

두 점 C, D 의 x 좌표를 두 실근으로 갖는다.

㉠에서 $2^{x-2b+5}-a=2^{x-a+2k+1}-2k+2b$ 이므로

$2k-2b=a,\ -2b+5=-a+2k+1$

$b=1,\ a=2k-2$

곡선 $y=2^{x-a}$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$ 의 교점 A 에 대하여

점 A 의 좌표를 $A\left(t,\ \frac{1}{2}t-1\right)$ 라 할 때

점 C 는 점 A 를

x 축 방향으로 $-2k$ 만큼, y 축 방향으로 $-k$ 만큼 평행이동한 점이므로

점 C 의 좌표는 $C\left(t-a-2,\ \frac{t-a}{2}-2\right)$ 이다.

$\overline{AC}$ 의 길이는 $\sqrt{5}\times\frac{a+2}{2}$ 이고,

직선 $2y-x+2=0$ 와 원점 사이의 거리는 $\frac{|0+0+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 이므로

삼각형 AOC 의 넓이는

$\frac{1}{2}(a+2)=5$

$a=8$

[별해]

1. $y=x$ 대칭

$y=2^{x-a}\to y=\log_2 x+a$

2. $x\to\frac{1}{2}x,\ y\to 2y$ 치환

$y=\log_2 x+a\to y=\log_4\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{a}{2}$

3. x 축 방향으로 $-a$, y 축 방향으로 $-\frac{a}{2}-2$ 만큼 평행이동

$$y=\log_4\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{a}{2}\to y=\log_4\left(\frac{x+a}{2}\right)-2$$

따라서 곡선 $y=2^{x-a}$ 이 위 과정 1, 2, 3 을 거치면
곡선 $y=\log_4\left(\frac{x+a}{2}\right)-2$ 이다.

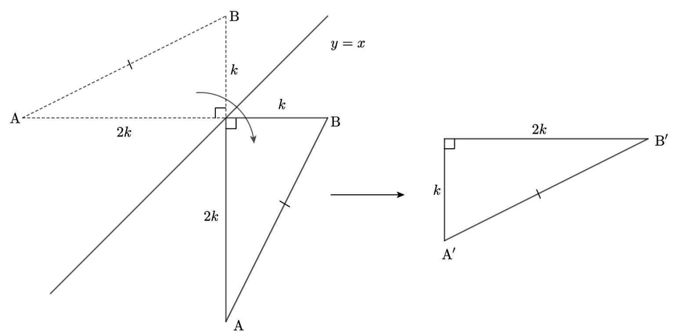
네 점 A, B, C, D 를 지나는 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선을
$y=\frac{1}{2}x-b$ 라 할 때
위 과정을 직선 $y=\frac{1}{2}x-b$ 와 곡선 $y=2^{x-a}$ 의 교점에 적용하자.

1. $y=x$ 대칭
 $y=2^{x-a}$ 와 $y=\frac{1}{2}x-b$ 교점
 $\to y=\log_2 x+a$ 와 $y=2x+2b$ 의 교점

2. $x\to\frac{1}{2}x$, $y\to 2y$ 치환
 $y=\log_2 x+a$ 와 $y=2x+2b$ 의 교점
 $\to y=\log_4\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{a}{2}$ 와 $y=\frac{1}{2}x+b$ 의 교점

3. x 축 방향으로 $-a$, y 축 방향으로 $-\frac{a}{2}-2$ 평행이동
 $y=\log_4\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{a}{2}$ 와 $y=\frac{1}{2}x+b$ 의 교점
 $\to y=\log_4\left(\frac{x+a}{2}\right)-2$ 와 $y=\frac{1}{2}x+b-2$ 의 교점 …… ㉠

과정 3 은 선분 AB 의 길이에 영향을 주지 않기에
과정 1, 2 를 선분 AB 의 길이에 적용하자.
과정 1, 2 를 적용한 두 점 A, B 를 각각 A′, B′ 라 할 때,
그림과 같은 이유로
$\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{CD}}$ 이다. …… ㉡



㉠과 ㉡에서 곡선 $y=\log_4\left(\frac{x+a}{2}\right)-2$ 가 직선 $y=\frac{1}{2}x+b-2$ 와
만나는 교점과 직선 $y=\frac{1}{2}x-b$ 와 만나는 교점이 같기에
직선 $y=\frac{1}{2}x-b$ 는 직선 $y=\frac{1}{2}x+b-2$ 이고,
$b=1$ 이다.

이후의 풀이 과정은 앞의 해설과 같다.

수학 영역(확률과 통계) 해설지

정답 및 해설

23) [정답] ④ (출제자 : 25 김서연)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

다항식 $(x^2+4)^3$ 의 전개식의 일반항은

${}_3\mathrm{C}_r \times 4^{3-r} \times (x^2)^r \ (r=0,1,2,3)$

x^4 항은 $r=2$ 일 때이므로 x^4 의 계수는

${}_3\mathrm{C}_2 \times 4 = 3 \times 4 = 12$

24) [정답] ⑤ (출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 독립사건을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

두 사건 A, B 가 서로 독립이고

$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{5}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\ &= \frac{1}{3} + \mathrm{P}(B) - \frac{1}{3}\mathrm{P}(B)\\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{P}(B)\\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

따라서

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

25) [정답] ③ (출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 조건부확률을 활용할 수 있는가?

[해설]

1 학년과 2 학년에서 선택한 학생의 성별이 같을 사건을 A,
선택한 학생이 모두 남학생일 사건을 B 라 하자.
이때, 사건 A 가 나오는 경우는 모두 남학생이거나
모두 여학생이어야 하므로

$\mathrm{P}(A) = \frac{a(10-a)}{10 \times 8} + \frac{(10-a)(a-2)}{10 \times 8}$

또,

$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{a(10-a)}{10 \times 8}$

그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\ &= \frac{\frac{a(10-a)}{10\times 8}}{\frac{a(10-a)}{10\times 8} + \frac{(10-a)(a-2)}{10\times 8}}\\ &= \frac{a(10-a)}{a(10-a)+(10-a)(a-2)}\\ &= \frac{a}{a+(a-2)} \quad (2<a<10)\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

이때,

$5a = 3(2a-2)$

$5a = 6a - 6$

$a = 6$

26) [정답] ② (출제자 : 26 김선우)

[출제의도] 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

[해설]

모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$ 이므로

$$\begin{aligned}b-a &= 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{36}}\\ &= 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{6}\\ &= 0.86\sigma\end{aligned}$$

따라서 $0.86\sigma = 1.72$ 이므로 $\sigma = 2$ 이다.

27) [정답] ① (출제자 : 25 손준기)

[출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

A 는 남학생과 이웃하지 않고 B 는 적어도 한 명의 여학생과 이웃해야 하므로 여사건을 사용하여 다음과 같이 경우의 수를 구할 수 있다.

(i) A 가 남학생과 이웃하지 않는 경우
A 의 양옆에는 여학생이 앉아야 하므로 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2 \times 4! = 144$

(ii) A, B 가 각각 남학생, 여학생과 이웃하지 않는 경우
A 의 양옆에는 여학생이 앉아야 하고 B 의 양옆에는 남학생이 앉아야 하므로 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2 \times 2 \times 2! = 24$

(i), (ii)에 의하여 구하려는 경우의 수는

$144 - 24 = 120$

28) [정답] ④ (출제자 : 25 손준기)

[출제의도] 조건부확률을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

X 에서 Y 로의 모든 일대일대응 f 의 개수는 $7!=5040$

조건 (가)에서 $f(x)+4=g(x)$ 라 할 때, 함수 g 는 X 에서 X 로의 일대일대응이므로 합성함수 $f(g(x))=x-4$

즉, $f(g(x))+4=x$ 는 합성함수 $g(g(x))=x$ 와 같다.

조건 (나)에서 함수 g 에 대하여 $|g(1)-4|-(g(3)-4)\geq 4$

즉, $|g(1)-4|\geq g(3)$ 이므로 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(g(1),\ g(3))$ 은 $(1,\ 2)$ 또는 $(1,\ 3)$ 또는 $(3,\ 1)$ 또는 $(6,\ 2)$ 또는 $(7,\ 2)$ 또는 $(7,\ 3)$

(ⅰ) $(g(1),\ g(3))$ 이 $(1,\ 2)$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 $g(2)=3$ 이고 $k=4,\ 5,\ 6,\ 7$ 일 때 $g(k)=k$ 를 만족시키는 k 의 개수는 0 또는 2 또는 4 이므로 각각의 경우의 수의 합은

${}_3\mathrm{C}_1\times 1+{}_4\mathrm{C}_2\times 1+{}_4\mathrm{C}_4=10$

(ⅱ) $(g(1),\ g(3))$ 이 $(1,\ 3)$ 인 경우

$k=2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ 일 때 $g(k)=k$ 를 만족시키는 k 의 개수는 1 또는 3 또는 5 이므로 각각의 경우의 수의 합은

${}_5\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times 1+{}_5\mathrm{C}_3\times 1+{}_5\mathrm{C}_5=26$

(ⅲ) $(g(1),\ g(3))$ 이 $(3,\ 1)$ 인 경우

$k=2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ 일 때 $g(k)=k$ 를 만족시키는 k 의 개수는 1 또는 3 또는 5 이므로 각각의 경우의 수의 합은

${}_5\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times 1+{}_5\mathrm{C}_3\times 1+{}_5\mathrm{C}_5=26$

(ⅳ) $(g(1),\ g(3))$ 이 $(6,\ 2)$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 $g(2)=3,\ g(6)=1$ 이고 $k=4,\ 5,\ 7$ 일 때 $g(k)=k$ 를 만족시키는 k 의 개수는 1 또는 3 이므로 각각의 경우의 수의 합은 ${}_3\mathrm{C}_1\times 1+{}_3\mathrm{C}_3=4$

(ⅴ) $(g(1),\ g(3))$ 이 $(7,\ 2)$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 $g(2)=3,\ g(7)=1$ 이고 $k=4,\ 5,\ 6$ 일 때 $g(k)=k$ 를 만족시키는 k 의 개수는 1 또는 3 이므로 각각의 경우의 수의 합은 ${}_3\mathrm{C}_1\times 1+{}_3\mathrm{C}_3=4$

(ⅵ) $(g(1),\ g(3))$ 이 $(7,\ 3)$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 $g(7)=1$ 이고 $k=2,\ 4,\ 5,\ 6$ 일 때 $g(k)=k$ 를 만족시키는 k 의 개수는 0 또는 2 또는 4 이므로 각각의 경우의 수의 합은

${}_3\mathrm{C}_1\times 1+{}_4\mathrm{C}_2\times 1+{}_4\mathrm{C}_4=10$

(ⅰ) ~ (ⅵ)에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$10+26+26+4+4+10=80$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{80}{5040}=\dfrac{1}{63}$

29) [정답] 67 (출제자 : 26 김선우)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 이항분포를 구한 후 이항분포와 정규분포와의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4 이하일 확률은 $\dfrac{2}{3}$ 이고, 5 이상일 확률은 $\dfrac{1}{3}$ 이다.

최댓값과 최솟값의 차가 3 인 순서쌍은

$(4,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 3),\ (7,\ 4),\ (8,\ 5),\ (9,\ 6)$ 로 총 6 가지이다.

(ⅰ) 주사위의 눈의 수가 4 이하인 경우

공 9 개 중 임의로 3 개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_3=84$ 이고, 최댓값과 최솟값 사이의 두 수 중 임의로 하나를 뽑아야 하므로, 이 경우의 확률은 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{6\times{}_2\mathrm{C}_1}{84}=\dfrac{2}{21}$

(ⅱ) 주사위의 눈의 수가 5 이상인 경우

공 9 개 중 임의로 4 개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_4=126$ 이고, 최댓값과 최솟값 사이의 두 수 모두 뽑아야 하므로, 이 경우의 확률은

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{6}{126}=\dfrac{1}{63}$

따라서 기록된 수가 3 일 확률은 $\dfrac{2}{21}+\dfrac{1}{63}=\dfrac{7}{63}=\dfrac{1}{9}$

이때, 기록된 수가 3 인 횟수를 확률변수 X 라 하면, X 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16200,\ \dfrac{1}{9}\right)$ 를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=16200\times\dfrac{1}{9}=1800,\ V(X)=1800\times\dfrac{8}{9}=1600=40^2$

16200 은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(1800,\ 40^2)$ 을 따른다.

따라서 $k=\mathrm{P}(X\geq 1860)=\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{1860-1800}{40}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)=0.5-0.433=0.067$

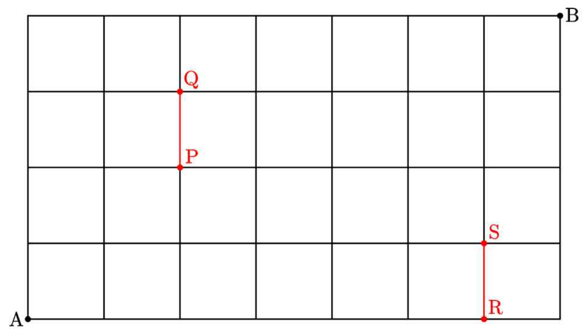
따라서 $1000\times k=67$ 이다.

30) [정답] 114　(출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 중복조합을 활용하여 도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 (→), 위쪽으로 한 칸 가는 것을 (↑)라 하자.
우회전은 (↑) 바로 다음 (→)가 배열되는 경우이다.
우선 도로망을 끊어진 부분이 없는 온전한 가로 7 칸, 세로 4 칸의 직사각형 모양의 도로망이라 가정하자.



(↑) 4 개가 배열되면, 그 사이에 (→)가 들어갈 수 있는 공간은 5 곳 이다.
_ (↑) _ (↑) _ (↑) _ (↑) _
우회전이 2 번 발생하려면 (↑) 뒤에 있는 4 개의 빈 공간 중 2 곳에만 1 개 이상의 (→)가 배치되어야 한다.

(i) 온전한 도로망에서 우회전을 2 회 할 때

(↑) 뒤의 4 자리 중 (→)가 들어갈 2 자리를 택하는 경우의 수는
${}_4C_2 = 6$
7 개의 (→)를 맨 앞 공간과 선택된 2 곳에 나누어 담는다. 선택된 2 곳에는 최소 1 개 이상의 (→)가 들어가야 하므로 구하는 경우의 수는 중복조합의 수 ${}_3H_5$와 같다.
${}_3H_5 = 21$
따라서 구하는 경우의 수는
$6 \times 21 = 126$

(ii) 선분 PQ 를 지날 때

(ii−ⓐ)
A 에서 P 까지 우회전을 1 번 하는 경우
_↑ _↑ _
${}_2C_1 \times {}_2H_1 = 4$
Q 에서 B 까지 우회전을 1 번 하는 경우
2
따라서 구하는 경우의 수는
$4 \times 2 = 8$

(ii−ⓑ)
A 에서 P 까지 우회전을 0 번 하는 경우
1
Q 에서 B 까지 우회전을 2 번 하는 경우
_↑ _
두 공간에 1 개 이상의 (→)가 있어야 한다.
${}_2H_3 = 4$
따라서 구하는 경우의 수는
$1 \times 4 = 4$

(iii) 선분 SR 를 지날 때
반드시 우회전이 한 번 일어난다.
따라서 구하는 경우의 수는
0

전체 경우의 수에서 (ii), (iii)의 경우를 빼면
$126 - 12 = 114$

수학 영역(미적분) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자 : 26 류현지)
[출제의도] 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{\cos x+1}\right)$$
$$=1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{3}$$

24) [정답] ③ (출제자 : 25 이성연)
[출제의도] 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

[해설]
$\ln x=t$라 하면
$\ln e^2=2$, $\ln e^4=4$이고
$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로
$$\int_{e^2}^{e^4}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\int_2^4\frac{1}{t^2}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_2^4$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

25) [정답] ⑤ (출제자 : 25 심준현)
[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]
$$\sum_{k=1}^{n}\left(n^2a_k-3k^2\right)=\frac{3}{4}(n+1)^2$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\frac{3k^2}{n^2}\right)=\frac{3(n+1)^2}{4n^2}$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{3(n+1)^2}{4n^2}$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\sum_{k=1}^{n}a_k-n-\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}=\frac{3(n+1)^2}{4n^2}$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_k-n=\frac{3(n+1)^2}{4n^2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-n\right)=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

26) [정답] ② (출제자 : 26 문재연)
[출제의도] 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

[해설]
구하는 입체도형의 부피는
$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{f(x)}\right)^2dx$$
$$=\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{\pi}}f(x)\,dx\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이때 부분적분법에 의하여
$$\int_0^{\sqrt{\pi}}f(x)\,dx$$
$$=\left[(x-\sqrt{\pi})f(x)\right]_0^{\sqrt{\pi}}-\int_0^{\sqrt{\pi}}(x-\sqrt{\pi})f'(x)\,dx$$
$$=\left[(x-\sqrt{\pi})f(x)\right]_0^{\sqrt{\pi}}-\int_0^{\sqrt{\pi}}(x-\sqrt{\pi})\sin\left((x-\sqrt{\pi})^2\right)dx$$
$$=\sqrt{\pi}f(0)-\int_0^{\sqrt{\pi}}(x-\sqrt{\pi})\sin\left((x-\sqrt{\pi})^2\right)dx$$
$f(0)=0$ 이므로

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}f(x)\,dx=-\int_0^{\sqrt{\pi}}(x-\sqrt{\pi})\sin\left((x-\sqrt{\pi})^2\right)dx$$

이때
$-\int_0^{\sqrt{\pi}}(x-\sqrt{\pi})\sin\left((x-\sqrt{\pi})^2\right)dx$ 에서
$(x-\sqrt{\pi})^2=t$라 하면
$x=0$일 때 $t=\pi$, $x=\sqrt{\pi}$일 때 $t=0$이고,
$2(x-\sqrt{\pi})=\frac{dt}{dx}$ 이므로
$$-\int_0^{\sqrt{\pi}}(x-\sqrt{\pi})\sin\left((x-\sqrt{\pi})^2\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}(-\sin t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos t\right]_{\pi}^{0}$$
$$=\frac{1}{2}(1-(-1))$$
$$=1$$

㉠에서 구하는 입체도형의 부피는
$\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$

27) [정답] ④ (출제자 : 26 김리나)

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OQ}=5$

$\overline{OR}=\overline{OA}-\overline{AR}=5-4=1$

$\angle RQO=\alpha$라 하자.

$\angle PQR=\angle QRO$이므로

삼각형 OQR에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{5}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\alpha}$

$5\sin\alpha=\sin\theta$ …… ㉠

$\theta=\frac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$5\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$5\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\theta}=\cos\theta$

$\frac{d\alpha}{d\theta}=\frac{\cos\theta}{5\cos\alpha}$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$이므로

$\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

따라서

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{d\alpha}{d\theta}$의 값은

$\frac{d\alpha}{d\theta}=\frac{1}{7}$

선분 OP와 선분 OQ를 그으면

삼각형 OPQ에서 $\angle OQP=\alpha+\theta$이다.

삼각형 OPQ가 이등변삼각형이므로

$f(\theta)=10\cos(\alpha+\theta)$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{df(\theta)}{d\theta}&=10\left(-\sin(\alpha+\theta)\frac{d\alpha}{d\theta}-\sin(\alpha+\theta)\right)\\&=-10\left(1+\frac{d\alpha}{d\theta}\right)\sin(\alpha+\theta)\ \cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

$\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta$

이 식에 $\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\theta)&=\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

따라서

$\theta=\frac{\pi}{4}$를 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{\pi}{4}\right)&=-10\times\left(1+\frac{1}{7}\right)\times\frac{4}{5}\\&=-\frac{64}{7}\end{aligned}$$

28) [정답] ② (출제자 : 26 문재연)

[출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

조건 (가)에서

로그의 진수 조건에 의하여 $|f(x)|>0$, 즉 $f(x)\neq0$이다.

$f\left(-\frac{3}{4}\right)=1$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. …… ㉠

따라서 $|f(x)|=f(x)$

㉠에 의하여 조건 (가)의 양변을 $f(x)$로 나누어 정리하면

$a\ln f(x)-bf(x)-\frac{1}{f(x)}=x$

$g(x)=a\ln x-bx-\frac{1}{x}$이라 하면

$g(f(x))=x$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$의 치역에 속하는 모든 실수 y에 대하여 $x=g(y)$의 값이 하나씩 대응된다.

따라서 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq0$ 또는 $g'(x)\leq0$이다. …… ㉡

이때 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(g(x))=x$가 성립하므로

함수 $f(x)$는 역함수 $g(x)$를 가진다.

$f\left(-\frac{3}{4}\right)=1$에서 $g(1)=-\frac{3}{4}$이므로

$-b-1=-\frac{3}{4}$

$b=-\frac{1}{4}$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=m$에서 미분가능하지 않다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(m)=\alpha$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to m}\frac{f(x)-f(m)}{x-m}&=\lim_{y\to\alpha}\frac{y-\alpha}{g(y)-g(\alpha)}\\&=\lim_{y\to\alpha}\frac{1}{\frac{g(y)-g(\alpha)}{y-\alpha}}\end{aligned}$$

이고, 함수 $g(y)$는 $y>0$인 모든 실수 y에 대하여 미분가능하므로

$\lim_{y\to\alpha}\frac{g(y)-g(\alpha)}{y-\alpha}=g'(\alpha)$

이다.

이때 함수 $f(x)$가 $x=m$에서 미분가능하지 않으려면

$g'(\alpha)=0$이고, $\lim_{x\to m}\left|\frac{f(x)-f(m)}{x-m}\right|=\infty$이어야 한다. …… ㉢

한편,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{a}{x}-b+\frac{1}{x^2}\\&=\frac{x^2+4ax+4}{4x^2}\end{aligned}$$

에서

$h(x)=x^2+4ax+4$라 할 때, $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $4x^2>0$이고 함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 ㉡에 의하여 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq0$, 즉 $h(x)\geq0$이어야 한다.

이때 ㉢에서 $h(\alpha)=0$이 성립하므로 방정식 $h(x)=0$은 $x=\alpha$를 중근으로 갖는다. 따라서 이차방정식 $h(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-1\times 4$
$=4a^2-4$
$=4(a+1)(a-1)$
$=0$
에서
$a=-1$ 또는 $a=1$

이때 $a=1$ 이면
$h(\alpha)=\alpha^2+4\alpha+4=0$
에서
$\alpha=f(m)=-2$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이라는 ㉠의 조건에 모순이다.

따라서 $a=-1$ 이므로
$h(\alpha)=\alpha^2-4\alpha+4=0$
에서
$\alpha=f(m)=2$ 이고
$m=g(2)$
$=-\ln 2+\frac{1}{4}\times 2-\frac{1}{2}$
$=-\ln 2$
이다.

$\int_{-\frac{3}{4}}^{m}f(x)\,dx=\int_{-\frac{3}{4}}^{-\ln 2}f(x)\,dx$ 에서 $x=g(t)$ 라 하면,
$x=-\frac{3}{4}$ 일 때 $t=1$, $x=-\ln 2$ 일 때 $t=2$ 이고, $\frac{dx}{dt}=g'(t)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{3}{4}}^{-\ln 2}f(x)\,dx&=\int_1^2 t\,g'(t)\,dt\\&=\int_1^2 t\times\frac{t^2-4t+4}{4t^2}\,dt\\&=\int_1^2\left(\frac{1}{4}t-1+\frac{1}{t}\right)dt\\&=\left[\frac{1}{8}t^2-t+\ln|t|\right]_1^2\\&=\left(\frac{1}{2}-2+\ln 2\right)-\left(\frac{1}{8}-1+0\right)\\&=-\frac{5}{8}+\ln 2\end{aligned}$$

따라서
$$\begin{aligned}m+\int_{-\frac{3}{4}}^{m}f(x)\,dx&=-\ln 2+\left(-\frac{5}{8}+\ln 2\right)\\&=-\frac{5}{8}\end{aligned}$$

[별해]
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 대칭성에 의하여
$$\int_{-\frac{3}{4}}^{-\ln 2}f(x)\,dx=-\ln 2\times 2-\left(-\frac{3}{4}\times 1\right)-\int_1^2 g(x)\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$
이때,
$$\begin{aligned}\int_1^2 g(x)\,dx&=\int_1^2\left(-\ln x+\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx\\&=\left[-x\ln|x|+x+\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right]_1^2\\&=\left(-2\ln 2+2+\frac{1}{2}-\ln 2\right)-\left(0+1+\frac{1}{8}-0\right)\\&=-3\ln 2+\frac{11}{8}\end{aligned}$$
이므로 ㉠에서
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{3}{4}}^{-\ln 2}f(x)\,dx&=-2\ln 2+\frac{3}{4}-\left(-3\ln 2+\frac{11}{8}\right)\\&=\ln 2-\frac{5}{8}\end{aligned}$$
따라서
$$\begin{aligned}m+\int_{-\frac{3}{4}}^{m}f(x)\,dx&=-\ln 2+\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)\\&=-\frac{5}{8}\end{aligned}$$

29) [정답] 178 (출제자 : 25 심준현)
[출제의도] 조건을 만족시키는 등비급수를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

[해설]
등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r 이라 하자.
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=27$ 이므로, $\frac{a}{1-r}=27$,
$a=27(1-r)$ 이고, r 은 $-1<r<1$ 인 유리수이다.

$0<r<1$ 인 경우
a 는 자연수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n>0$ 이다.
이때
$$b_n=\begin{cases}2a_n & (a_n\text{ 이 정수인 경우})\\ 0 & (a_n\text{ 이 정수가 아닌 경우})\end{cases}$$
이고

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\le\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=54$ 이므로 모순이고
$-1<r<0$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 자연수, 공비가 $-1<r<0$ 인 유리수이므로

$a_{2n-1}>0$, $a_{2n}<0$ 이고
$$b_{2n-1}=\begin{cases}2a_{2n-1} & (a_{2n-1}\text{ 이 정수인 경우})\\ 0 & (a_{2n-1}\text{ 이 정수가 아닌 경우})\end{cases}$$
$$b_{2n}=\begin{cases}0 & (a_{2n}\text{ 이 정수인 경우})\\ 2a_{2n} & (a_{2n}\text{ 이 정수가 아닌 경우})\end{cases}$$
이다.

$a=27-27r$ 에서 a 는 자연수이므로
$r=-\frac{\alpha}{27}$ (α 는 $0<\alpha<27$ 인 정수)라 하자.
$a=27+\alpha$

α 가 9 의 배수가 아닌 경우
$a_2=27\left(1+\frac{\alpha}{27}\right)\times\left(-\frac{\alpha}{27}\right)=-\alpha-\frac{\alpha^2}{27}$ 는 정수가 아니다.

$a_{2n-1}>0$, $a_{2n}<0$ 이므로
$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2a_1+\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}$

$$= 2a + \frac{2ar}{1-r^2}$$

$a = 27 - 27r$ 를 대입하면

$54 - \frac{54r^2}{1+r} > 78$

$\frac{r^2}{1+r} < -\frac{4}{9}$

$r^2 > 0$, $1+r > 0$ 이므로 모순이다.

따라서 α 는 9의 배수이다.

$\alpha = 9$ 일 때

$r = -\frac{1}{3}$, $a = 36$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2a_1 + 0 + 2a_3 + (2a_4 + 2a_6 + \cdots)$

$= 72 + 0 + 8 - \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{1}{9}} = 77 < 78$ 이므로

조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $\alpha = 18$ 이고

$r = -\frac{2}{3}$, $a = 45$

$a_n = 45 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$a_1 = 45$, $a_2 = -30$, $a_3 = 20$, $a_4 = -\frac{40}{3}$ 이므로

등비수열 $\{a_n\}$ 은 $n < 4$ 일 때 정수이고, $n \geq 4$ 일 때 정수가 아니다.

모든 자연수 n 에 대하여

$a_{2n-1} > 0$, $a_{2n} < 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = 2a_1 + 2a_3 - (2a_4 + 2a_6 + \cdots)$

$= 90 + 40 + \frac{80}{3} + \frac{320}{27} + \cdots$

$= 130 + \frac{\frac{80}{3}}{1-\frac{4}{9}} = 130 + 48 = 178$

30) [정답] 17 (출제자 : 25 이성연)

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수를 완성하고 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $h(x) = f(|g(x)| - a)$ 에서 $t = |g(x)|$ 라 하면

모든 실수 x 에 대하여 $|g(x)| \geq 0$ 이므로

함수 $h(x) = f(t-a)$ 의 정의역은 $\{t \mid t \geq 0\}$ 이다.

이때 $f(t-a) = e^{-2(t-a)}(t^2 - at + b)$ 이고

$e^{-2(t-a)} \geq 0$ 이므로

조건 (가)에 의하여

$t^2 - at + b \leq 0$ 을 만족시키는 음이 아닌 실수 t 에 대하여

x 에 대한 방정식 $t = |g(x)|$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이다. …… ㉠

이때 $a > 0$ 이므로 방정식 $t^2 - at + b = 0$ 이

서로 다른 두 실근을 가지거나 실근을 가지지 않으면 ㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 방정식 $t^2 - at + b = 0$ 은 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 4b = 0$

$a^2 = 4b$ …… ㉡

$f(t-a) = e^{-2(t-a)}\left(t - \frac{a}{2}\right)^2$ 에서

$f'(t-a) = -2e^{-2(t-a)}\left(t - \frac{a}{2}\right)\left(t - \frac{a}{2} - 1\right)$ 이므로

함수 $f(t-a)$ 는 $t = \frac{a}{2}$ 에서 극소, $t = \frac{a}{2} + 1$ 에서 극대이다. …… ㉢

㉢에 의하여 방정식 $|g(x)| = \frac{a}{2}$ 의 실근에서 함수 $h(x)$ 가 극소이다.

이때 조건 (나)에서 함수 $h(x)$ 가 $x = 2$ 에서 극소이고 문제의 조건에서 $g'(2) < 0$ 이므로 $x = 2$ 에서 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

따라서 $|g(2)| = \frac{a}{2}$ 이고

조건 (나)에 의하여 $h(2) = f\left(\frac{a}{2} - a\right) = f(-1)$ 이다.

이때 방정식 $f(t-a) = 0$ 의 실근은 $t = \frac{a}{2}$ 뿐이므로

$-\frac{a}{2} = -1$

$a = 2$

따라서 $|g(2)| = 1$ 이고 ㉡에서 $b = 1$ 이다.

또한, ㉠에 의하여 방정식 $|g(x)| = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이다.

(i) 곡선 $y = g(x)$ 가 직선 $y = 1$ 과 한 점에서 만나고 직선 $y = -1$ 과 두 점에서 만나는 경우

문제의 조건에서 $g(5) = 1$ 이므로 $g(2) = -1$ 이다.

함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이면

$g'(2) > 0$ 이므로 모순이다.

함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이면

$g(2) > 1$ 이므로 $g(2) = -1$ 이라는 조건에 모순이다.

(ii) 곡선 $y = g(x)$ 가 직선 $y = 1$ 과 두 점에서 만나고 직선 $y = -1$ 과 한 점에서 만나는 경우

(ii-ⓐ) 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수인 경우

$g(2) = 1$ 이면 $g'(2) = 0$ 이므로

$g'(2) < 0$ 이라는 조건에 모순이다.

$g(2) = -1$ 이면 $g'(2) > 0$ 이므로

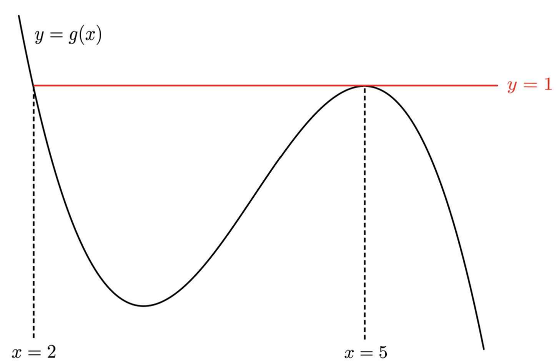
$g'(2) < 0$ 이라는 조건에 모순이다.

(ii-ⓑ) 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수인 경우

$g(2) = 1$ 이고 문제의 조건에서 $g(5) = 1$ 이다.

이때 $g'(2) < 0$ 이므로 $g'(5) = 0$ 이다.

따라서 $g(x) = k(x-2)(x-5)^2 + 1$ $(k < 0)$ 라 하자.



한편, ㉢에 의하여 방정식 $|g(x)| = \frac{a}{2} + 1 = 2$ 의 실근에서 함수 $h(x)$ 가 극대이다.

이때 조건 (나)에서 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 극대이고
그림에서 $g'(1)<0$이므로 $x=1$에서 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
따라서 $|g(1)|=2$이고, 그림에서 $g(1)>1$이므로
$g(1)=2$이다.
$g(x)=k(x-2)(x-5)^2+1$ $(k<0)$에서
$g(1)=k(1-2)(1-5)^2+1=2$이므로
$k=-\dfrac{1}{16}$이다.

(i), (ii)에 의하여
$g(x)=-\dfrac{1}{16}(x-2)(x-5)^2+1$이다.
$h(x)=f(|g(x)|-2)$에서
$$\begin{aligned} h(9) &= f(|g(9)|-2) \\ &= f(|-6|-2) \\ &= f(4) \\ &= e^{-2\times 4}\times(4^2+2\times 4+1) \\ &= 25e^{-8} \end{aligned}$$
따라서 $p=25$, $q=-8$이므로
구하는 값은 $p+q=25+(-8)=17$