제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $5^{-\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{3}{4}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{5}$ ③ 5 ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ 25

$5^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=5$

2. 함수 $f(x)=x^2+3x-1$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$f'(x)=2x+3$

$f'(3)=9$

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(k+3a_k)=27$일 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$ 의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$15+3S=27$ $S=4$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<1) \\ x^2-ax+11 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a+2=1-a+11$

$2a=10$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+2x)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$g'(x)=(x^2+2x)'f(x)+(x^2+2x)f'(x)$

$g'(1)=3\underbrace{f'(1)}_{1}+4\underbrace{f(1)}_{2}=11$

6. 1보다 큰 두 실수 a, b가

$$\log_{\sqrt{a}} b=6,\quad \log_4 a+\log_2 b=14$$

를 만족시킬 때, $\log_2 \dfrac{b}{a}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$b=(\sqrt{a})^6=a^3$

$\frac{1}{2}\log_2 a+3\log_2 a=14$ $\frac{7}{2}\log_2 a=14$ $a=2^4$

$\log_2(a^2)=8$

7. 함수 $f(x)=x^3+x^2+a$에 대하여

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{40}{3}+\int_0^{-2} f(x)\,dx$$

일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$\int_{-2}^{2} f=\frac{40}{3}$

$\int_0^2 x^2+a=\frac{20}{3}$

$\left[\frac{1}{3}x^3+ax\right]_0^2=\frac{8}{3}+2a=\frac{20}{3}$ $a=2$

8. $2\cos\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=0$ 이고 $\sin\theta<0$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

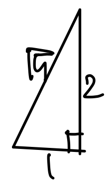
① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$2\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=0$

$2\cos\theta+\sin\theta=0$

$2\cos\theta=-\sin\theta$

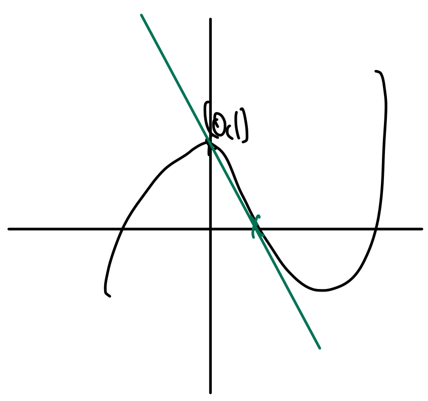
$\tan\theta=-2$ (4사분면)



$c=\frac{1}{\sqrt{5}}$

9. 양수 t 에 대하여 함수 $f(x)=2x^3-7x^2+1$ 의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나도록 하는 t 의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



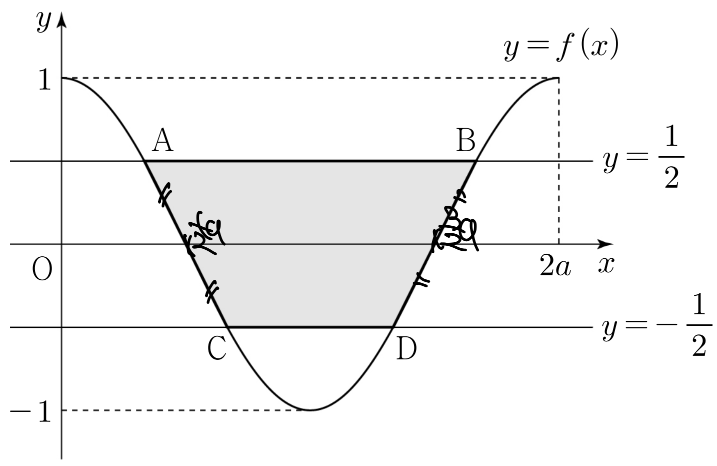
$t=\frac{7}{4}$

10. 양수 a 에 대하여 닫힌구간 $[0, 2a]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{a}$ 가 있다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$ 과 만나는 두 점을 각각 C, D 라 하자.

사각형 ACDB 의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, $a\times\overline{AB}$ 의 값은?
(단, 점 A 의 x 좌표는 점 B 의 x 좌표보다 작고, 점 C 의 x 좌표는 점 D 의 x 좌표보다 작다.) [4점]

① 3 ② $\frac{19}{6}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{11}{3}$



$a\times 1=\frac{3}{2}$ $a=\frac{3}{2}$ $\overline{AB}=\frac{2}{3}a$ $=2$

11. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 가 있다. 실수 k 에 대하여 시각이 $t\,(t \geq 0)$ 일 때 점 P 의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t)=3t^2-6t+k$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

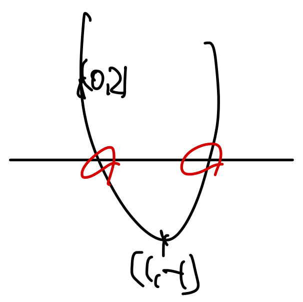
<보 기>

ㄱ. $k=0$ 이면, 시각 $t=1$ 일 때 점 P 의 위치는 -2 이다.
ㄴ. $k=2$ 이면, 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인 거리는 점 P 의 위치의 변화량과 같다.
ㄷ. $k=-9$ 이면, 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P 가 움직인 거리는 34 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

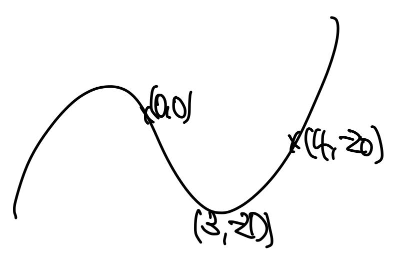
$x(t)=t^3-3t^2+kt$

ㄴ $v(t)$가 부호변화 없니? $v(t)=3t^2-6t+2$



부호변화 있음.

ㄷ $v(t)=3(t^2-2t-3)$
$x(t)=t^3-3t^2-9t$



27+7=34 (O)

12. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_5 \times (a_6+a_7)=20a_{10}, \quad S_4=65$$

일 때, a_2 의 값은? [4점]

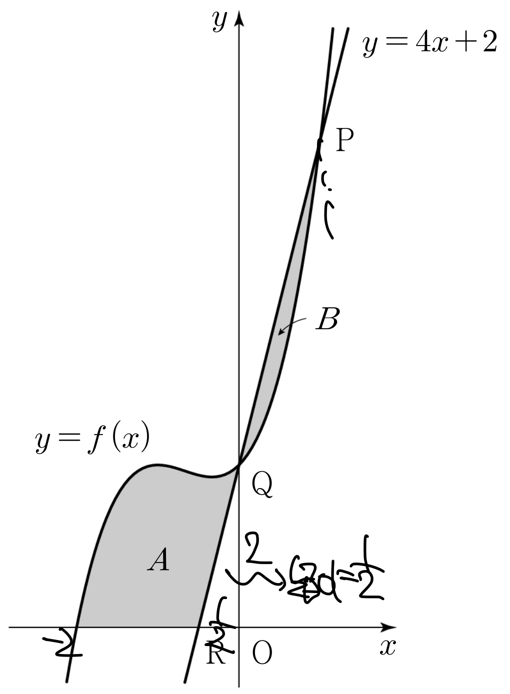
① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

$a_1+a_2=20$　$a_3+a_4=45$

$r^2=\frac{9}{4}$　$r=\frac{3}{2}$

$\frac{2}{3}a_2+a_2=20$　$\frac{5}{3}a_2=20$　$a_2=12$

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3+2x^2+x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+2$가 제1사분면에서 만나는 점을 P, y축 위에서 만나는 점을 Q라 하자. 직선 $y=4x+2$가 x축과 만나는 점을 R이라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 선분 RQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 QP로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A-B$의 값은? [4점]



① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

$A = \int_{-2}^{0} x^3+2x^2+x+2 \quad -\frac{1}{2} = \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{0}$

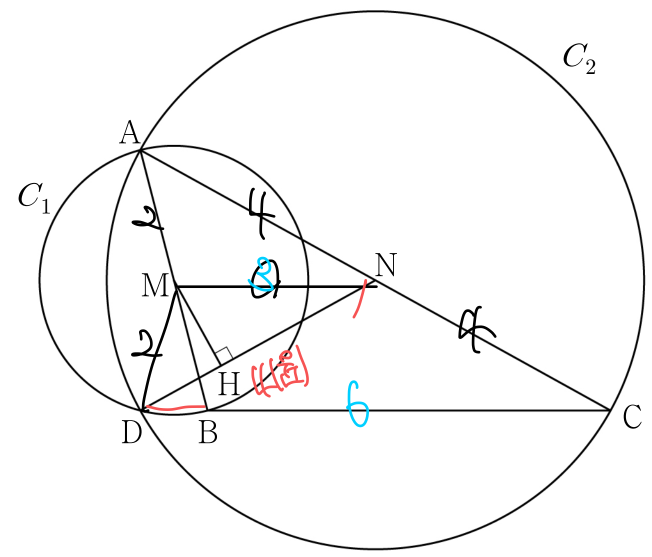
$-\left(4-\frac{16}{3}+2-4\right)=\frac{16}{3}-2-\frac{1}{2}=\frac{32-15}{6}=\frac{17}{6}$

$B = \int_{0}^{1} -x^3-2x^2+3x$

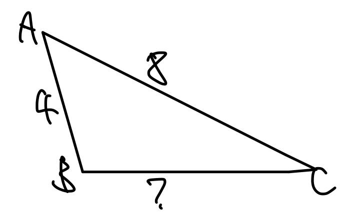
$= -\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{-3-8+18}{12}=\frac{7}{12}$

$\frac{34}{12}-\frac{7}{12}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=8$, $\angle CBA>\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{16\sqrt{15}}{15}$이다. 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 할 때, 두 점 M, N을 각각 중심으로 하고 점 A를 지나는 두 원 C_1, C_2가 있다. 두 원 C_1, C_2가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 점 M에서 선분 DN에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 MH의 길이는? [4점]



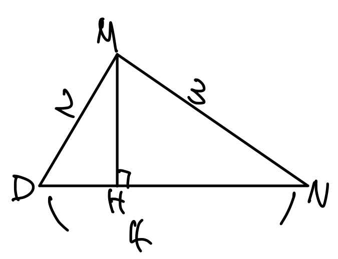
① $\frac{5\sqrt{15}}{16}$ ② $\frac{11\sqrt{15}}{32}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{8}$ ④ $\frac{3\sqrt{15}}{8}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

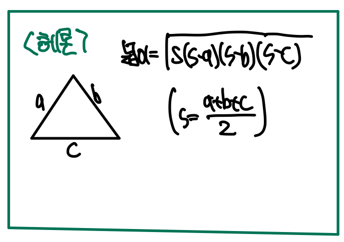


$\left(R=\frac{16}{\sqrt{15}}\right)$

$8 = 2\cdot\frac{16}{\sqrt{15}}\cdot\sin\angle B \quad \sin\angle B=\frac{\sqrt{15}}{4} \quad \cos\angle B=-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}=\frac{k^2+16-64}{2\cdot4\cdot k} \quad -2k=k^2-48 \quad k^2+2k-48=0 \quad k=6$





$\triangle MDN=\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}\times4\times\overline{MH}$

$\overline{MH}=\frac{3\sqrt{15}}{8}$

15. 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}ax^2+b,\quad g(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2$$

이 있다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)+|f(x)-g(x)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=\alpha$, $x=\beta\ (\alpha<\beta)$에서 극소이다.

$h(\alpha)\geq h(\beta)$일 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

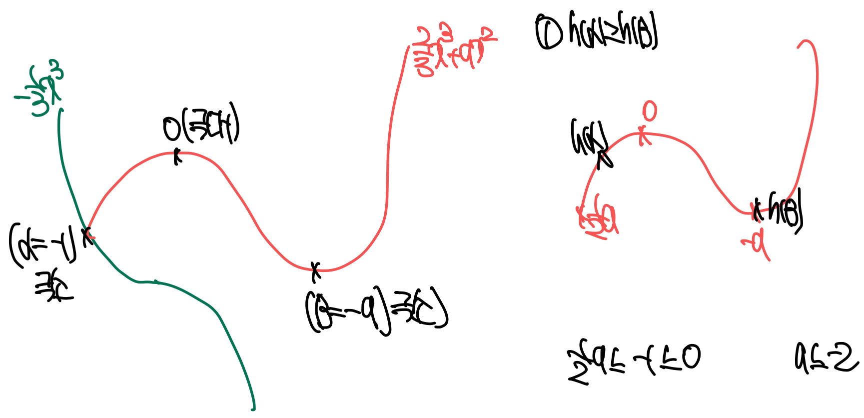
$h(x)=\begin{cases} 2f(x)-g(x) & f\geq g \\ g(x) & g>f \end{cases}$

$=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3+2b & f\geq g \\ \frac{2}{3}x^3+ax^2 & g>f \end{cases}$ 이때, $-\infty$에서는 $f>g$ $+\infty$에서는 $g>f$

(가) → $x=-1$은 $h(x)$의 첨점: $f(-1)=g(-1)$

$-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}a+b=-\frac{2}{3}+a$ $b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$

(나) → 개형을 추론하면 $-\infty$에서 $h=-\frac{1}{3}x^3\sim$, $+\infty$에서 $h=\frac{2}{3}x^3+ax^2$



① $h(\alpha)\geq h(\beta)$

$\frac{1}{2}a\leq -1\leq 0$ $a\leq -2$

② $x=-1$에서 부호변화

$g-f=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}ax^2-b$

$=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$

$(x^3+ax^2-a+1)=(x+1)(\underbrace{x^2+(a-1)x-a+1}_{D\leq 0})$

$a^2-2a+1-4(-a+1)=a^2+2a-3\leq 0$ $-3\leq a\leq 1$

종합하면, $-3\leq a\leq -2$. $\left(\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\right)$ Max-Min은 $\frac{3}{2}$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{n}+4$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$a_2=a_1+4=6$

$a_3=\frac{a_2}{2}+4=7$

17. 함수 $f(x)=3x^2+4$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)+F(2)=14$일 때, $F(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$F(x)=x^3+4x+C$

$C+8+8+C=14$ $C=-1$

$F(3)=27+12-1=38$

18. 부등식

$$\log_3(x+4) \le 3+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\log_3(x+4)+\log_3(x-2) \le 3$

$\log_3(x^2+2x-8) \le 3$

$x^2+2x-8 \le 27$

$x^2+2x-35 \le 0$

$-7 \le x \le 5$, $x>2$

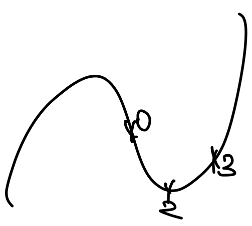
3, 4, 5   12

19. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=x^3-12x+k$$

의 최댓값이 40일 때, 최솟값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

$f'(x)=3x^2-12$



$k=40$

min: $f(2)=k-16=24$

20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} 2(S_n-na_n) & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ (n-1)a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $b_2=a_2=2$

다음은 $b_2=2$일 때, $\sum_{n=1}^{20} b_n$의 값을 구하는 과정이다.

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

자연수 n에 대하여 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ …… ㉠

(i) $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때,

㉠에 의하여

$$b_{2k-1}=\cancel{2}\times\left\{\frac{(2k-1)(a_1+a_{2k-1})}{\cancel{2}}-\cancel{(2k-1)}\,a_{2k-1}\right\}$$
$4k-2$

$$=(\boxed{2k-1})\times(a_1-a_{2k-1})$$

$(2k-1)a_1-(2k-1)a_{2k-1}$

(ii) $n=2k$ (k는 자연수)일 때,

$$b_{2k}=(2k-1)a_{2k}$$

(i), (ii)에 의하여

$$b_{2k-1}+b_{2k}=(\boxed{2k-1})\times(a_1-a_{2k-1})+(2k-1)a_{2k}$$
$$=\boxed{4k-2} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이다.

$(2k-1)(a_1-a_{2k-1}+a_{2k})=(2k-1)(a_1+d)=(2k-1)(a_2)=4k-2$

㉡에 의하여

$$\sum_{n=1}^{20} b_n=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{19}+b_{20})$$
$$=\boxed{200}$$

$\sum_{k=1}^{10} (4k-2)=220-20=200$

이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(2)+g(3)+p$의 값을 구하시오. [4점]

3 10 200

213

21. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)(x-4) & \left(a\le x\le \frac{3}{2}a\right)\\ (x-a)(x-b) & \left(x<a \text{ 또는 } x>\frac{3}{2}a\right)\end{cases}$$

이다. 양의 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to 0+} g(t)=6$
>
> (나) 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=\beta\,(\alpha\ne\beta)$에서만 불연속이고, $\lim_{t\to\alpha+} g(t)=\lim_{t\to\beta-} g(t)=1$이다.

$f(0)=p+q\sqrt{2}$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

(가) ⇒ $f(x)=0$이 최대한 많이 필요 ① $a\le 4\le \frac{3}{2}a$ ② $a\le b\le \frac{3}{2}a$가 어렵.

(나) ⇒ 어디선 그려보며 어디서 1이 나오는지 찾자...

(가)에서(나)는 $x<a$에서 모든 양수 t와 1번 이상 만남

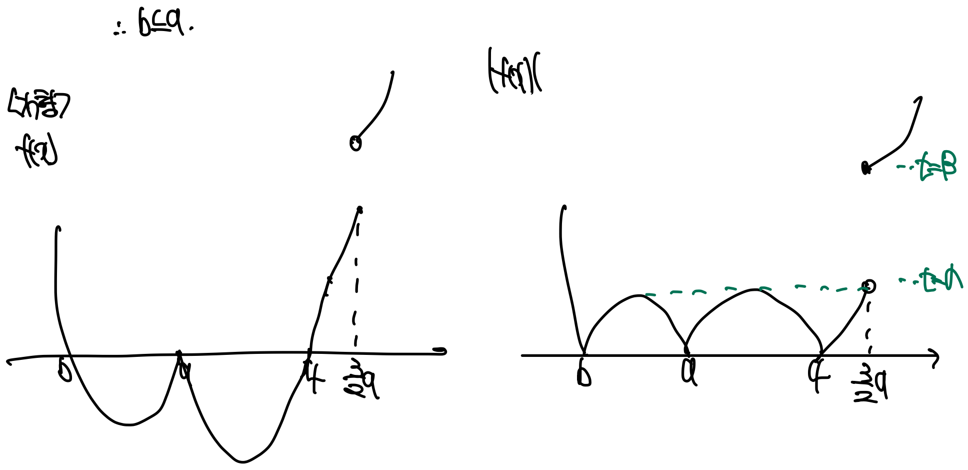
⇓

$\frac{3}{2}a$ 부분에서는 교점이 없어야...

(가)의 ②에서 $b\le\frac{3}{2}a$이면 (가)(나)는 $x>\frac{3}{2}a$에서 모든 양수 t와 1번 이상 만남.

∴ 최종 2회 이상, $g(t)\ne 1$

∴ $b\le a$.



이상에서. ① $b, a, 4$는 등차수열

② $(x-a)(x-4)\Big|_{x=\frac{3}{2}a}+(x-a)(x-b)\Big|_{x=\frac{3}{2}a}=0$

② → $\left(-\frac{1}{2}a+2\right)\left(\frac{1}{2}a-2\right)+\frac{1}{2}a\left(\frac{3}{2}a-4\right)=0$

$-(a-4)^2+a(3a-8)=0$

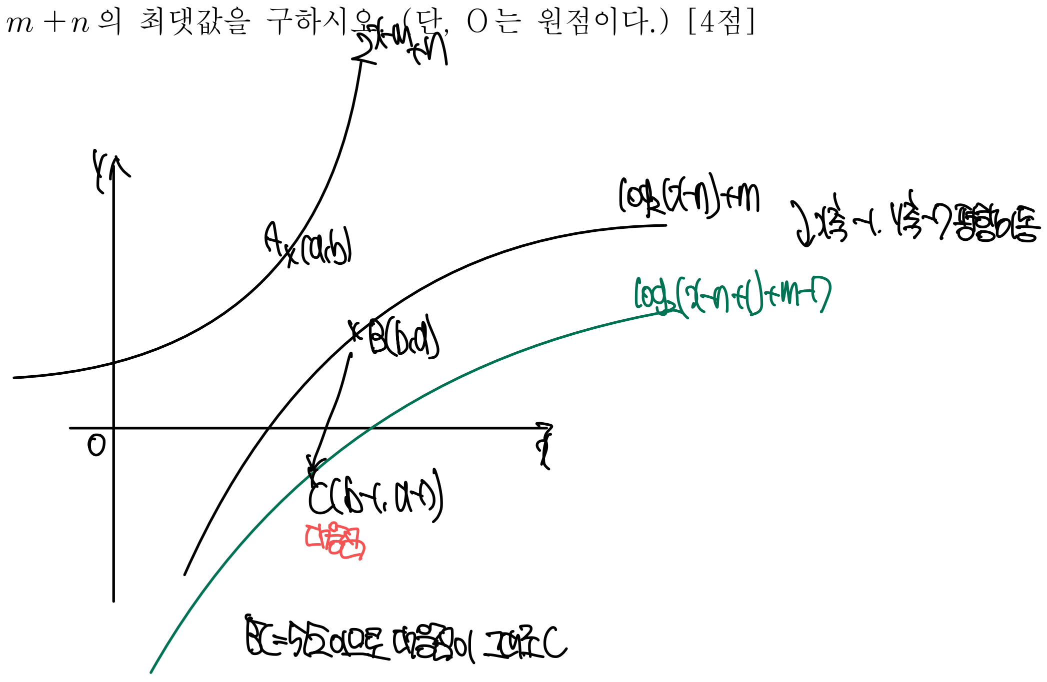
$2a^2=16$ $a=2\sqrt{2}$. ① → $2a=b+4$ $b=2a-4=4\sqrt{2}-4$

$f(0)=ab$
$=2\sqrt{2}(4\sqrt{2}-4)$
$=16-8\sqrt{2}$
$p=16$ $q=-8$ $p^2+q^2=320$

22. 두 자연수 m, n에 대하여 곡선 $y=2^{x-m}+n$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)\,(a<b)$가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$인 원이 곡선 $y=\log_2(x-n+1)+m-7$과 만나는 두 점 중 x좌표가 작은 점을 C라 할 때, 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 AC와 직선 $y=\frac{1}{3}x$는 서로 수직이다.
>
> (나) 삼각형 AOB와 삼각형 ACB의 넓이의 비는 $27:8$이다.

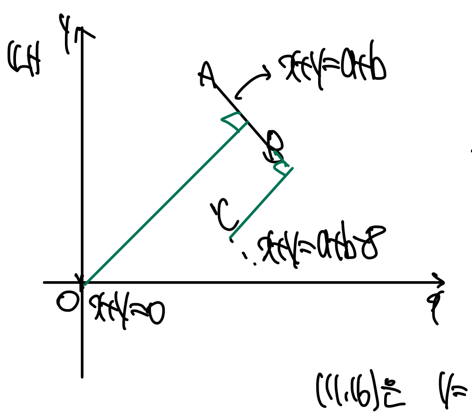
$m+n$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



BC=$5\sqrt{2}$이므로 대응점이 그대로 C

(가) → $\frac{b-a+7}{a-b+1}=-3$ $b-a+7=-3a+3b-3$

$-2a-2b=-10$ $a-b=-5$ ①



두 삼각형의 넓이는 $x+y=\sim$가 얼마나 떨어져 있는지에 비례

△ACB는 $x+y=8$만큼 떨어짐 8

△AOB는 $x+y=a+b$만큼 떨어짐 27

→ $a+b=27$ ②

①, ②에서 $a=11$, $b=16$

$(11, 16)$은 $y=2^{x-m}+n$ 위의 점, $16=2^{11-m}+n$을 만족시키는 자연수 m, n

$(11, 15)$

⋮ 최대 $=26$

$(8, 8)$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 6x}{e^{2x}-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f\left(x^3+2x+2\right)=3-\sin \pi x$$

를 만족시킬 때, $f'(5)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{\pi}{10}$ ② $\dfrac{\pi}{5}$ ③ $\dfrac{3\pi}{10}$ ④ $\dfrac{2\pi}{5}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

$(3x^2+2)f'(x^3+2x+2)=-\pi\cos\pi x$

$x=1$ $5f'(5)=\pi$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+n^2}{2n^2+4}=2$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{a_n+3n}-\sqrt{a_n+n}}$ 의 값은? [3점]

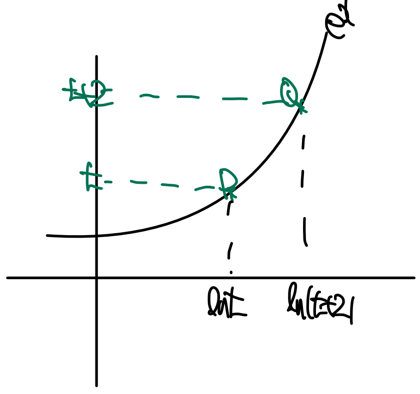
① $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

$a_n \to 3n^2$

$$\frac{2\sqrt{3}n}{(\sqrt{3n^2+3n}-\sqrt{3n^2+n})(\sqrt{3n^2+3n}+\sqrt{3n^2+n})} = \frac{2\sqrt{3}n}{2n} = \sqrt{3}$$

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$과 두 직선 $y=t$, $y=t+2$가 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 차를 $f(t)$라 하자. $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{f(t)}{t^2}\,dt$ 의 값은? [3점]

① $-1+3\ln 2$ ② $-1+4\ln 2$ ③ $4\ln 2$
④ $1+3\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$



$$\int_{\frac23}^{2}\frac{\ln(t+2)-\ln t}{t^2}$$

$$\left[(\ln(t+2)-\ln t)\cdot\left(-\frac1t\right)\right]_{\frac23}^{2}-\int_{\frac23}^{2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac1t\right)\left(-\frac1t\right)$$

$$=(\ln2)\left(-\frac12\right)-\left(\ln\frac83-\ln\frac23\right)\left(-\frac32\right)+\int_{\frac23}^{2}\frac{1}{t(t+2)}-\int_{\frac23}^{2}\frac{1}{t^2}$$

$-\frac12\ln2-(2\ln2)\left(-\frac32\right)$

$=\frac52\ln2$

$+\int_{\frac23}^{2}\frac12\left(\frac1t-\frac{1}{t+2}\right)$

$\left[-\frac1t\right]_{\frac23}^{2}=-\frac12+\frac32=1$

$=\frac12\left[\ln t-\ln(t+2)\right]_{\frac23}^{2}$

$=\frac12\left(\ln2-\ln4-\ln\frac23+\ln\frac83\right)$

$=\frac12(\ln2)$

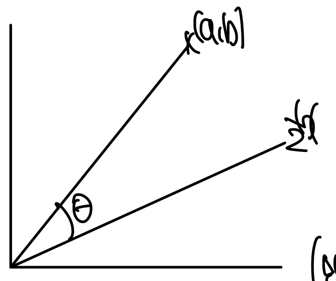
$S=3\ln2-1$

27. 매개변수 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$로 나타내어진 곡선

$$x=\cos t+t\sin t,\quad y=\sin t-t\cos t$$

에 대하여 $t=k$일 때, 곡선 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\, b)$라 하자. 곡선 위의 점 P에서의 접선과 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이다.
$3a+4b+\tan k$의 값은? (단, k는 $0<k<\frac{\pi}{2}$인 상수이다.) [3점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{22}{3}$



(원점 이라면 $b=0$, $\sin t = t\cos t$, $\underbrace{\tan t = t}$ 교점이 없음.)

(기울기 $\frac{1}{2}$)와 이루는 각 $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$

접선기울기. $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{-\sin t+\sin t+t\cos t}=\tan t$

$\tan k=\frac{4}{3}$ ~> $\cos k=\frac{3}{5}$, $\sin k=\frac{4}{5}$

$a=\cos k+k\sin k$ $b=\sin k-k\cos k$

$3a+4b=3\cos k+4\sin k+k(\cancel{3\sin k-4\cos k})$

$=5$

$5+\frac{4}{3}=\frac{19}{3}$

28. 함수 $f(x)=x-\frac{1}{e^x+1}$의 역함수 $f^{-1}(x)$와 $x>0$에서 정의된 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^{e^x} f^{-1}(g(t))\,dt=(x-1)e^x+k\ \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여
$\int_{f(0)}^{f(k)}\left(f^{-1}(x)+g^{-1}(x)\right)dx$의 값은? [4점]

① e ② $\frac{3}{2}e$ ③ $2e$ ④ $\frac{5}{2}e$ ⑤ $3e$

$x\to0$ 이면 $0=-1+k$ $k=1$

1st 주어진 식 조작

$\int_1^{e^x}\underbrace{f^{-1}(g(t))}_{h(t)}dt=(x-1)e^x+1$

⇒ $t=g^{-1}(t)$는 $g^{-1}(t)$에 대한 정보X

⇒ 도함수 $h(t)$

$H(e^x)-H(1)=(x-1)e^x+1$

$e^x h(e^x)=xe^x$ $h(e^x)=x$

2nd 구할 값

$\int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(x)+g^{-1}(x)\,dx=\int_0^1 \{t f'(t)+\underbrace{g^{-1}(f(t))}_{e^t}f'(t)\}\,dt$

치환 $x=f(t)$

$f^{-1}(g(e^x))=x$ $f(x)=g(e^x)$ $g^{-1}(f(x))=e^x$

$=\int_0^1 (e^t+t)f'(t)\,dt$

$=[(e^t+t)f(t)]_0^1-\int_0^1(e^t+1)f(t)$

$=(e+1)\underbrace{f(1)}_{\frac{e}{e+1}}-\underbrace{f(0)}_{-\frac{1}{2}}-\int_0^1 te^t+t-1$

$=e+\frac{1}{2}-[(t-1)e^t]_0^1+\frac{1}{2}$

$=e+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}=e$

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -a_n & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_{2n} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

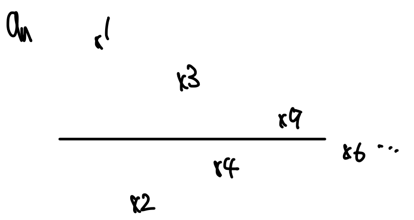
(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n b_n < 0$이다.
(나) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert\right)^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = 63$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

수렴하는 등비 a_n

$r>0$이면 $a_n > a_{n+1}$ $b_n = a_{2n}$ $a_n a_{2n} < 0$ 모순

$r<0$, $\sum(a_n + b_n)$ 700므로 $\sum a_n > 0$, 첫째항 양수



$b_n = \begin{cases} -a_n & (n이 짝수) \\ a_{2n} & (n이 홀수) \end{cases}$ (가) 만족

(나) → 첫째항 a, 공비 r $\left(\frac{a}{1-r}\right)^2 = 2\cdot\frac{a^2}{1-r^2}$

$2(1-r) = 1+r^2$... $3r^2+4r+1=0$ $r=-\frac{1}{3}$

$\sum(a_n+b_n) = (a_1+a_2+a_3+a_6+a_5+a_{10}\cdots)$

$= \frac{a}{1-r^2} + \frac{ar}{1-r^4} = 63$

$\frac{9}{8}a - \frac{3}{80}\cdot 9a$ ...

$= \frac{63}{80}a = 63$ $a=80$

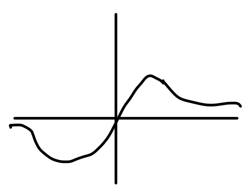
$\sum b_{2n} = -a_2 - a_4 \cdots = \frac{-80(-\frac{1}{3})}{1-r^2} = \frac{80}{3}\times\frac{9}{8} = 30$

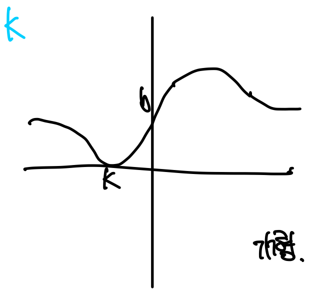
30. $a>0$, $b>0$인 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

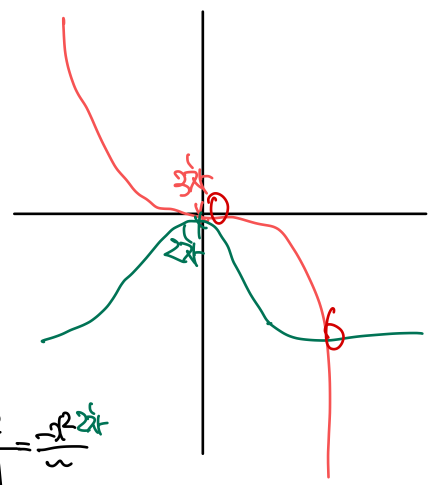
(가) 모든 실수 x에 대하여 $\left(f(x)\right)^3 + f(x) = \frac{a}{x^2+12} - bx - \frac{16}{3}b$ 이다.
(나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고, $f'(k)=0$인 실수 k가 존재한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-bx$가 만나는 서로 다른 모든 점의 x좌표의 합이 $k+8$일 때, $a \times b = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

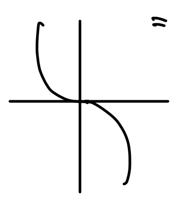
(나) → $f(x)$는 극값 없음, 변곡점 하나

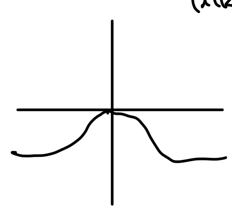






$f(x) - bx$의 x좌표합 : 6





$x=6$에서 접함.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.