제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $5^{-\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{3}{4}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{5}$ ③ 5 ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ 25

2. 함수 $f(x)=x^2+3x-1$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(k+3a_k)=27$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$ 의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<1) \\ x^2-ax+11 & (x \ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+2x)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

6. 1보다 큰 두 실수 a, b가

$$\log_{\sqrt{a}} b=6,\quad \log_4 a+\log_2 b=14$$

를 만족시킬 때, $\log_2 \frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

7. 함수 $f(x)=x^3+x^2+a$에 대하여

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{40}{3}+\int_0^{-2} f(x)\,dx$$

일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

8. $2\cos\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$ 이고 $\sin\theta < 0$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

9. 양수 t에 대하여 함수 $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 1$ 의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나도록 하는 t 의 값은? [4점]

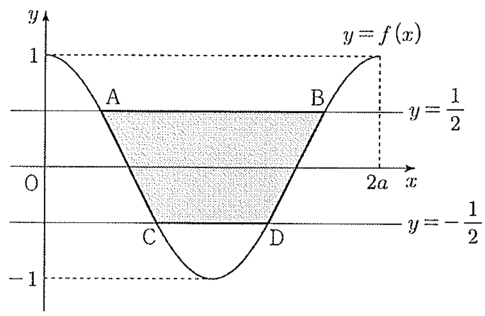
① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

10. 양수 a에 대하여 닫힌구간 $[0, 2a]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \cos\frac{\pi x}{a}$ 가 있다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자.

사각형 ACDB의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, $a \times \overline{AB}$ 의 값은?
(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고, 점 C의 x좌표는 점 D의 x좌표보다 작다.) [4점]

① 3 ② $\frac{19}{6}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{11}{3}$



$2a=3$ $a=\frac{3}{2}$ $2\cdot\frac{3}{2}=3$

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각이 $t\ (t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-6t+k$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $k=0$이면, 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 -2이다.
ㄴ. $k=2$이면, 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 점 P의 위치의 변화량과 같다.
ㄷ. $k=-9$이면, 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는 34이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

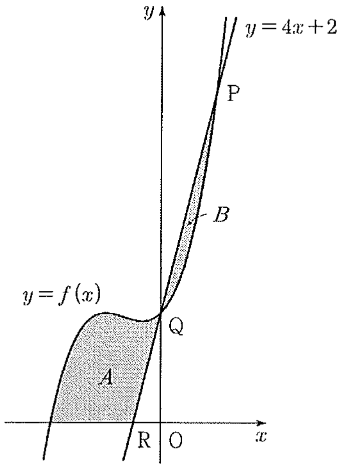
12. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_5 \times (a_6+a_7)=20a_{10},\quad S_4=65$$

일 때, a_2의 값은? [4점]

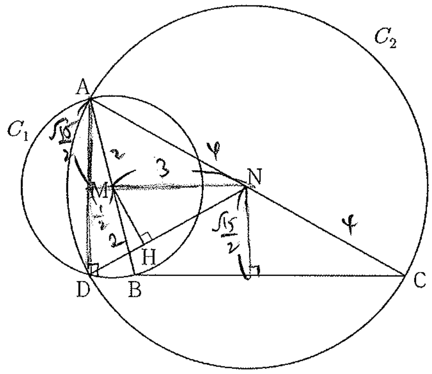
① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3+2x^2+x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+2$가 제 1 사분면에서 만나는 점을 P, y축 위에서 만나는 점을 Q라 하자.
직선 $y=4x+2$가 x축과 만나는 점을 R이라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 선분 RQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 QP로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A-B$의 값은? [4점]



① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=8$, $\angle CBA>\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{16\sqrt{15}}{15}$이다.
선분 AB의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 할 때, 두 점 M, N을 각각 중심으로 하고 점 A를 지나는 두 원 C_1, C_2가 있다. 두 원 C_1, C_2가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 점 M에서 선분 DN에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 MH의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{15}}{16}$ ② $\frac{11\sqrt{15}}{32}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{8}$ ④ $\frac{3\sqrt{15}}{8}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

$\frac{4}{\sin C}=\frac{32\sqrt{15}}{15}$ $\sin C=\frac{\sqrt{15}}{8}$ $MN=3$ $MH=\frac{3\sqrt{15}}{8}$

15. 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}ax^2+b,\quad g(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2$$

이 있다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)+|f(x)-g(x)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이고
> $x=\alpha$, $x=\beta\ (\alpha<\beta)$에서 극소이다.

$h(\alpha)\geq h(\beta)$일 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{9}{4}$　③ 3　④ $\frac{15}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$

$f(x)-g(x)$ $x=-1$에서만 부호 바뀜

$f(-1)=g(-1)$　$f(x)-g(x)=-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}ax^2+b$　$b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$

let $p(x)=f(x)-g(x)=-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$

$p'(x)=-\frac{3}{2}x^2-ax$　$p'(-1)=-\frac{3}{2}+a\neq 0$　$a\neq\frac{3}{2}$

$p(x)=-\frac{1}{2}(x+1)(x^2+(a-1)x-(a-1))$

$a\neq\frac{3}{2}$ → -1은 X　$D=(a-1)^2+4(a-1)=(a-1)(a+3)$

$D>0$ → (가) X　$\therefore D\leq 0$　$-3\leq a\leq 1$

$h(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3+a-1 & (x\leq -1)\\ \frac{2}{3}x^3+ax^2 & (x>-1)\end{cases}$

$h'(x)=\begin{cases}-x^2 & (x<-1)\\ 2x^2+2ax & (x>-1)\end{cases}$　0 극대　$-a$ 극소

$\alpha=-1$, $\beta=-a$

$h(\alpha)=h(-1)=a-\frac{2}{3}$　$h(\beta)=h(-a)=\frac{1}{3}a^3$

$a-\frac{2}{3}\geq\frac{1}{3}a^3$　$(a-1)^2(a+2)\leq 0$　$a\leq -2$

$a+b=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}$　$-3\leq a\leq -2$

$\therefore -5\leq a+b\leq -\frac{7}{2}$　$M-m=\frac{3}{2}$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{n}+4$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점] 7

17. 함수 $f(x)=3x^2+4$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)+F(2)=14$일 때, $F(3)$의 값을 구하시오. [3점] 38

18. 부등식

$$\log_3(x+4) \le 3+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

12

19. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=x^3-12x+k$$

의 최댓값이 40일 때, 최솟값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

24

20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} 2(S_n-na_n) & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ (n-1)a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다.

다음은 $b_2=2$일 때, $\sum_{n=1}^{20} b_n$의 값을 구하는 과정이다.

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

자연수 n에 대하여 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ …… ㉠

(i) $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때,

㉠에 의하여

$$b_{2k-1}=2\times\left\{\frac{(2k-1)(a_1+a_{2k-1})}{2}-(2k-1)a_{2k-1}\right\}$$

$$=(\boxed{(가)})\times(a_1-a_{2k-1})$$

2k-1

(ii) $n=2k$ (k는 자연수)일 때,

$b_{2k}=(2k-1)a_{2k}$

(i), (ii)에 의하여

2k-1

$$b_{2k-1}+b_{2k}=(\boxed{(가)})\times(a_1-a_{2k-1})+(2k-1)a_{2k}$$

$$=\boxed{(나)} \quad\cdots\cdots ㉡$$

이다.

4k-2

㉡에 의하여

$$\sum_{n=1}^{20} b_n=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{19}+b_{20})$$

$$=\boxed{(다)}$$

이다.

200

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(2)+g(3)+p$의 값을 구하시오. [4점]

213

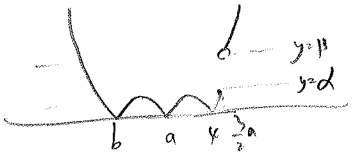
21. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)(x-4) & \left(a \le x \le \frac{3}{2}a\right)\\(x-a)(x-b) & \left(x<a \text{ 또는 } x>\frac{3}{2}a\right)\end{cases}$$

이다. 양의 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to 0+} g(t)=6$
>
> (나) 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=\beta\ (\alpha \ne \beta)$에서만 불연속이고, $\lim_{t\to\alpha+} g(t)=\lim_{t\to\beta-} g(t)=1$이다.

$f(0)=p+q\sqrt{2}$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점] 320



$a=\frac{b+4}{2}$ $b=2a-4$

$-f\left(\frac{a+4}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}a\right)$ $\frac{(a-4)^2}{4}=\frac{a(3a-8)}{4}$

$a^2-8a+16=3a^2-8a$ $a^2=8$ $a=2\sqrt{2}$

$f(0)=ab=2\sqrt{2}(4\sqrt{2}-4)=16-8\sqrt{2}$

$p^2+q^2=256+64=320$

22. 두 자연수 m, n에 대하여 곡선 $y=2^{x-m}+n$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)\ (a<b)$가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$인 원이 곡선 $y=\log_2(x-n+1)+m-7$과 만나는 두 점 중 x좌표가 작은 점을 C라 할 때, 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 AC와 직선 $y=\frac{1}{3}x$는 서로 수직이다.
>
> (나) 삼각형 AOB와 삼각형 ACB의 넓이의 비는 27 : 8이다.

$m+n$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] 26

$A(a,b)$ $B(b,a) \in y=\log_2(x-n)+m$

평행이동 ⇒ $B'(b-1, a-7)$ ⇒ $C(b-1, a-7)$

AC 기울기 -3 $\frac{a-7-b}{b-1-a}=-3$ $a-b=-5$

직선 AB $y=-x+a+b$

O와의 거리 $\frac{|-a-b|}{\sqrt{2}}$ C와의 거리 $\frac{|b-1+a-7-a-b|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

$\therefore a+b=27$ $a=11, b=16$ $2^{11-m}+n=16$

$(m,n)=(8,8)\ (9,12)\ (10,14)\ (11,15)$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 6x}{e^{2x}-1}$ 의 값은? [2점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

3

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+2x+2)=3-\sin \pi x$$

를 만족시킬 때, $f'(5)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{\pi}{10}$　　② $\dfrac{\pi}{5}$　　③ $\dfrac{3\pi}{10}$　　④ $\dfrac{2\pi}{5}$　　⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

$f'(x^3+2x+2)\cdot(3x^2+2) = -\cos\pi x \cdot \pi$

$f'(5)\cdot 5 = \pi$　　$f'(5) = \frac{\pi}{5}$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+n^2}{2n^2+4}=2$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a_n+3n}-\sqrt{a_n+n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

let $a_n = 3n^2$ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n+3n}+\sqrt{a_n+n}}{2n} = \sqrt{3}$

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$과 두 직선 $y=t$, $y=t+2$가 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 차를 $f(t)$라 하자. $\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{f(t)}{t^2}dt$의 값은? [3점]

① $-1+3\ln 2$ ② $-1+4\ln 2$ ③ $4\ln 2$
④ $1+3\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

$f(t) = \ln(t+2) - \ln t$

$\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{\ln(t+2)-\ln t}{t^2}dt = \int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{1}{t^2}\ln(1+\frac{2}{t})dt$

let $u = 1+\frac{2}{t}$ $\frac{du}{dt} = -\frac{2}{t^2}$ $= \int_4^2 (-\frac{1}{2}\ln u)du$

$= \frac{1}{2}\int_2^4 \ln u\, du = \frac{1}{2}[u\ln u - u]_2^4 = 3\ln 2 - 1$

27. 매개변수 $t\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$로 나타내어진 곡선

$$x = \cos t + t\sin t,\quad y = \sin t - t\cos t$$

에 대하여 $t = k$일 때, 곡선 위의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하자. 곡선 위의 점 P에서의 접선과 직선 $y = \frac{1}{2}x$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta = \frac{1}{2}$이다. $3a + 4b + \tan k$의 값은? (단, k는 $0 < k < \frac{\pi}{2}$인 상수이다.) [3점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{22}{3}$

$\frac{dx}{dt} = t\cos t$ $\frac{dy}{dt} = t\sin t$ $\frac{dy}{dx} = \tan t$

$\tan\theta = \left|\frac{\tan k - \frac{1}{2}}{1 + \tan k \cdot \frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2}$ $\therefore \tan k = \frac{4}{3}$

$\sin k = \frac{4}{5}$ $\cos k = \frac{3}{5}$ $a = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}k$ $b = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}k$

$3a + 4b + \tan k = 5 + \frac{4}{3} = \frac{19}{3}$

28. 함수 $f(x) = x - \frac{1}{e^x + 1}$의 역함수 $f^{-1}(x)$와 $x > 0$에서 정의된 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^{e^x} f^{-1}(g(t))\,dt = (x-1)e^x + k \ \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 $\int_{f(0)}^{f(k)} \left(f^{-1}(x) + g^{-1}(x)\right)dx$의 값은? [4점]

① e ② $\frac{3}{2}e$ ③ $2e$ ④ $\frac{5}{2}e$ ⑤ $3e$

$x=0 \Rightarrow k=1$ $f^{-1}(g(e^x))\cdot e^x = xe^x$

$f^{-1}(g(e^x)) = x$ $\therefore g(e^x) = f(x)$ $g^{-1}(f(x)) = e^x$

let $f^{-1}(x) = u$ $x = f(u)$ $1 = f'(u)\frac{du}{dx}$

$\int_{f(0)}^{f(1)} \{f^{-1}(x) + g^{-1}(x)\}dx = \int_0^1 \{u + g^{-1}(f(u))\} f'(u)\,du$

$= \int_0^1 (u + e^u) f'(u)\,du = \left[(u+e^u)f(u)\right]_0^1 - \int_0^1 (1+e^u) f(u)\,du$

$= \left[(u+e^u)f(u)\right]_0^1 - \int_0^1 (u + ue^u - 1)\,du$

$= (1+e)\cdot\left(1 - \frac{1}{e+1}\right) + \frac{1}{2} - \int_0^1 (u-1)\,du - \int_0^1 ue^u\,du$

$= e + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}u^2 - u\right]_0^1 - \left(\left[ue^u\right]_0^1 - \int_0^1 e^u\,du\right)$

$= e + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - e + e - 1 = e$

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -a_n & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_{2n} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n b_n < 0$이다.
> (나) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = 63$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$의 값을 구하시오. [4점] 30

$-1 < r < 0$

i) $a<0$ 일 때

$n=2m-1$ $\quad a_{2m-1} < 0 < a_{2m}$ $\quad b_{2m-1} = -a_{2m-1}$

$n=2m$ $\quad a_{2m+1} < 0 < a_{2m}$ $\quad b_{2m} = a_{4m} > 0$

$a_{2m} b_{2m} = a_{2m} a_{4m} > 0$ (X) $\quad \therefore a>0$

ii) $a>0$ 일 때

$n=2m-1$ $\quad a_{2m} < 0 < a_{2m-1}$ $\quad b_{2m-1} = a_{4m-2} < 0$

$n=2m$ $\quad a_{2m} < 0 < a_{2m+1}$ $\quad b_{2m} = -a_{2m}$ (O)

$\left(\frac{a}{1+r}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{1-r^2}$ $\quad 2(1+r)^2 = 1-r^2$

$2(1+r) = 1-r$ $\quad r = -\frac{1}{3}$

$a_n + b_n = \begin{cases} a_n + a_{2n} & (n=2m-1) \\ 0 & (n=2m) \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{4n-2})$

$= \frac{a}{1-r^2} + \frac{ar}{1-r^4} = \frac{63}{80}a = 63$ $\quad \therefore a = 80$

$a_n = 80 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\quad b_{2n} = -a_{2n} = \frac{80}{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{\frac{80}{3}}{1-\frac{1}{9}} = 30$

30. $a>0$, $b>0$인 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$(f(x))^3 + f(x) = \frac{a}{x^2+12} - bx - \frac{16}{3}b$$
> 이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고, $f'(k) = 0$인 실수 k가 존재한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-bx$가 만나는 서로 다른 모든 점의 x좌표의 합이 $k+8$일 때, $a \times b = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 59 [4점]

$f'(x) \ge 0$ or $f'(x) \le 0$

$\{3(f(x))^2+1\} f'(x) = \frac{-2ax}{(x^2+12)^2} - b$ $\quad x=0$ 대입

$\{3(f(0))^2+1\} f'(0) = -b < 0$ $\quad \therefore f'(0) < 0$ $\quad f'(x) \le 0$

let $g(x) = \frac{-2ax}{(x^2+12)^2} - b$ $\quad g(x) = \{3(f(x))^2+1\} f'(x) \le 0$

$g(k) = 0$ $\quad \therefore x=k$에서 $g(x)$는 최댓값 0 가짐

$g'(x) = \frac{6a(x+2)(x-2)}{(x^2+12)^3}$

$\therefore k=-2$ $\quad g(-2) = \frac{a}{64} - b = 0$ $\quad$ 서로 다른 모든 x좌표 합 6

$a = 64b$ $\quad f(x)$와 $y=-bx$ 교점 x좌표를 t라 하면

$(f(t))^3 + f(t) = \frac{64b}{t^2+12} - bt - \frac{16}{3}b$ $\quad f(t) = -bt$

$0 = b^3t^3 + \frac{64b}{t^2+12} - \frac{16}{3}b$ $\quad \frac{t^2(3b^2t^3 + 36b^2t - 16)}{3(t^2+12)} = 0$

let $h(t) = 3b^2t^3 + 36b^2t - 16$ $\quad h'(t) = 9b^2t^2 + 36b^2 > 0$

$\therefore t = 0, 6$ $\quad h(6) = 648b^2 + 216b^2 - 16 = 0$ $\quad b^2 = \frac{1}{54}$

$\therefore ab = 64b^2 = \frac{32}{27}$ $\quad 32+27 = 59$

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.