수학 영역

정답

1	③	2	②	3	①	4	⑤	5	④
6	③	7	②	8	④	9	⑤	10	①
11	③	12	①	13	②	14	④	15	①
16	7	17	38	18	12	19	24	20	213
21	320	22	26						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$5^{-\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}} \times (5^2)^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 5$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x) = 2x+3$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = f'(3) = 9$

3. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 계산하기

$\sum_{k=1}^{5}(k+3a_k) = \sum_{k=1}^{5}k + 3\sum_{k=1}^{5}a_k$

$= \frac{5 \times 6}{2} + 3\sum_{k=1}^{5}a_k = 27$

$3\sum_{k=1}^{5}a_k = 27-15 = 12$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}a_k = 4$

4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (2x+a) = 2+a$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2-ax+11) = 12-a$

$f(1) = 12-a$

$2+a = 12-a$, $2a = 10$

따라서 $a=5$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$g'(x) = (2x+2)f(x) + (x^2+2x)f'(x)$

$g'(1) = 4f(1)+3f'(1) = 4\times2+3\times1 = 11$

6. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_{\sqrt{a}} b = 6$에서 $b = (\sqrt{a})^6 = a^3$

$\log_4 a + \log_2 b = \log_4 a + \log_4 b^2$

$= \log_4 ab^2$

$= \log_4 a(a^3)^2$

$= \log_4 a^7$

$= 7\log_4 a = 14$

$\log_4 a = 2$, $a = 4^2 = 16$, $b = 16^3$

$\log_2 \frac{b}{a} = \log_2 \frac{16^3}{16} = \log_2 16^2 = \log_2 2^8 = 8$

7. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^{-2} f(x)\,dx$

$= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_{-2}^0 f(x)\,dx$

$= \int_{-2}^2 f(x)\,dx = \frac{40}{3}$

$\int_{-2}^2 (x^3+x^2+a)\,dx = 2\int_0^2 (x^2+a)\,dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}x^3+ax\right]_0^2$

$= \frac{16}{3}+4a$

$\frac{16}{3}+4a = \frac{40}{3}$, $4a = 8$

따라서 $a=2$

8. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$이므로

$2\cos\theta + \sin\theta = 0$

$2\cos\theta = -\sin\theta$ … ㉠

$4\cos^2\theta = \sin^2\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로

$4\cos^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

$\sin\theta < 0$이므로

㉠에 의하여 $\cos\theta > 0$

따라서 $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

9. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$f'(x) = 6x^2-14x$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의

점 $(t, f(t))$ $(t>0)$에서의 접선의 방정식은

$y = f'(t)(x-t)+f(t)$

$y = (6t^2-14t)(x-t)+2t^3-7t^2+1$

접선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1 = (6t^2-14t)(0-t)+2t^3-7t^2+1$

$1 = -4t^3+7t^2+1$

$4t^3-7t^2 = t^2(4t-7) = 0$

따라서 $t = \frac{7}{4}$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

함수 $y = \cos\frac{\pi x}{a}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = 2a$

$0 \le x \le 2a$에서 $\cos\frac{\pi x}{a} = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{a} = \frac{5\pi}{3}$이므로

$x = \frac{a}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}a$

점 A의 좌표는 $\left(\frac{a}{3}, \frac{1}{2}\right)$

점 B의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}a, \frac{1}{2}\right)$

$0 \le x \le 2a$에서 $\cos\frac{\pi x}{a} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{a} = \frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{a} = \frac{4\pi}{3}$이므로

$x = \frac{2}{3}a$ 또는 $x = \frac{4}{3}a$

점 C의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$

점 D의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$

$\overline{AB} = \frac{4}{3}a$, $\overline{CD} = \frac{2}{3}a$

사각형 ACDB는 사다리꼴이므로

사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}a\right)\times1 = a = \frac{3}{2}$

$\overline{AB} = \frac{4}{3}a = 2$

따라서 $a\times\overline{AB} = \frac{3}{2}\times2 = 3$

11. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 문제 해결하기

시각이 t $(t \ge 0)$일 때

점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 $x(0) = 0$

ㄱ. $k=0$이면, $v(t) = 3t^2-6t$

$x(1) = x(0) + \int_0^1 v(t)\,dt$

$= \int_0^1 (3t^2-6t)\,dt$

$= \left[t^3-3t^2\right]_0^1 = -2$ (참)

ㄴ. $k=2$이면, $v(t) = 3t^2-6t+2$

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리와 점 P의 위치의 변화량이 같아지려면

$0 \le t \le 3$인 모든 t에 대하여

$v(t) \ge 0$이어야 한다.

$v(1) = -1$이므로

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 점 P의 위치의 변화량과 같지 않다.

(거짓)

ㄷ. $k=-9$이면, $v(t) = 3t^2-6t-9$

$3t^2-6t-9 = 3(t+1)(t-3)$이므로

시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4 |v(t)|\,dt$

$= \int_0^3 (-3t^2+6t+9)\,dt + \int_3^4 (3t^2-6t-9)\,dt$

$= \left[-t^3+3t^2+9t\right]_0^3 + \left[t^3-3t^2-9t\right]_3^4$

$= 27+7 = 34$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

12. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$,
공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.
$a_n=ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)
$a_5\times(a_6+a_7)=20a_{10}$이므로

$ar^4\times(ar^5+ar^6)=20ar^9$
양변을 ar^9으로 나누면
$a(1+r)=20$
$a=\dfrac{20}{1+r}$ ⋯ ㉠
$r=1$인 경우 $a=10$, $S_4=40$
그러므로 $S_4=65$를 만족시키지 않는다.
공비 r은 1이 아닌 양수이므로

$$\begin{aligned}S_4&=\frac{a(r^4-1)}{r-1}\\&=\frac{20}{1+r}\times\frac{r^4-1}{r-1}\\&=\frac{20(r^2+1)(r^2-1)}{r^2-1}\\&=20(r^2+1)\\&=65\end{aligned}$$

$r^2+1=\dfrac{65}{20}=\dfrac{13}{4}$, $r^2=\dfrac{9}{4}$
$r>0$이므로 $r=\dfrac{3}{2}$
㉠에 의하여 $a=8$
따라서 $a_2=ar=8\times\dfrac{3}{2}=12$

13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1)$
이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는
점의 좌표는 $(-2,\,0)$
$g(x)=4x+2$라 하면
$f(x)=g(x)$에서
$x^3+2x^2+x+2=4x+2$
$x(x-1)(x+3)=0$
$x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이므로
점 P의 좌표는 $(1,\,6)$, 점 Q의 좌표는 $(0,\,2)$
$g(x)=0$에서
$4x+2=0$
$x=-\dfrac{1}{2}$이므로 점 R의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2},\,0\right)$

$$A=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}f(x)\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\big(f(x)-g(x)\big)dx$$

$$B=\int_{0}^{1}\big(g(x)-f(x)\big)dx$$

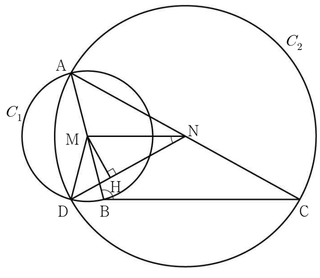
$A-B$

$$\begin{aligned}&=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\big(f(x)-g(x)\big)dx\\&\qquad-\int_{0}^{1}\big(g(x)-f(x)\big)dx\\&=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}f(x)\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\big(f(x)-g(x)\big)dx\\&\qquad+\int_{0}^{1}\big(f(x)-g(x)\big)dx\\&=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}f(x)\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\big(f(x)-g(x)\big)dx\\&=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}g(x)\,dx\\&=\int_{-2}^{1}(x^3+2x^2+x+2)\,dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(4x+2)\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}-\Big[2x^2+2x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{1}\\&=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

따라서 $A-B=\dfrac{9}{4}$

[참고]
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}g(x)\,dx$의 값은
삼각형 RHP의 넓이와 같다.
$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}g(x)\,dx=\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\times6=\frac{9}{2}$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기



$\angle\mathrm{CBA}=\theta$라 하자.
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta}=\dfrac{8}{\sin\theta}=2\times\dfrac{16\sqrt{15}}{15}$
$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$
$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$
$\overline{\mathrm{BC}}=a\,(a>0)$이라 하자.
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$
$-\dfrac{1}{4}=\dfrac{16+a^2-64}{2\times4\times a}$
$a^2+2a-48=0$, $(a-6)(a+8)=0$
$a=6$
두 점 M, N은 각각 선분 AB와 선분 AC의
중점이므로 $\overline{\mathrm{MN}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=3$
점 D는 원 C_1 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{MD}}=2$
점 D는 원 C_2 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{DN}}=4$
$\angle\mathrm{MND}=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하자.

삼각형 MDN에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\overline{\mathrm{MN}}^2+\overline{\mathrm{DN}}^2-\overline{\mathrm{MD}}^2}{2\times\overline{\mathrm{MN}}\times\overline{\mathrm{DN}}}\\&=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4}=\frac{7}{8}\end{aligned}$$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2=\dfrac{15}{64}$
$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$
따라서 직각삼각형 MHN에서
$\overline{\mathrm{MH}}=\overline{\mathrm{MN}}\times\sin\alpha=3\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{3\sqrt{15}}{8}$

[다른 풀이]
$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AN}}$,
$\angle\mathrm{MAN}$은 공통이므로
두 삼각형 ABC와 AMN은 서로 닮음이고
닮음비는 $2:1$, 넓이의 비는 $4:1$이다.
$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{DM}}$, $\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{DN}}$이고
선분 MN은 공통이므로
두 삼각형 AMN과 DMN은 서로 합동이다.
삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\theta&=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{\sqrt{15}}{4}\\&=3\sqrt{15}\end{aligned}$$

삼각형 DMN의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\times3\sqrt{15}&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DN}}\times\overline{\mathrm{MH}}\\&=\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{MH}}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{MH}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{15}}{4}=\dfrac{3\sqrt{15}}{8}$

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$p(x)=f(x)-g(x)$라 하자.
$h(x)=f(x)+|p(x)|$
함수 $h(x)$는 $p(x)\neq0$인 모든 실수 x에서
미분가능하다.
조건 (가)에 의하여 $p(-1)=0$, $p'(-1)\neq0$
$p(x)=-\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2+b$
$p(-1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}a+b=0$, $b=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}$
$p'(x)=-\dfrac{3}{2}x^2-ax$
$p'(-1)=-\dfrac{3}{2}+a\neq0$, $a\neq\dfrac{3}{2}$
$p(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)\{x^2+(a-1)x-(a-1)\}$에서
$a\neq\dfrac{3}{2}$이므로
x에 대한 방정식 $x^2+(a-1)x-(a-1)=0$은
-1을 근으로 갖지 않는다.
x에 대한 방정식 $x^2+(a-1)x-(a-1)=0$의
판별식을 D라 하면
$D=(a-1)^2+4(a-1)=(a-1)(a+3)$
$D>0$이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $D\leq0$, $-3\leq a\leq1$ ⋯ ㉠

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^3+a-1 & (x\le -1)\\[2mm] \dfrac{2}{3}x^3+ax^2 & (x>-1)\end{cases}$$

$$h'(x)=\begin{cases}-x^2 & (x<-1)\\[2mm] 2x^2+2ax & (x>-1)\end{cases}$$

조건 (나)에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이므로

$a<0$ ⋯ ㉡

함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=-a$에서 극소이므로

$\alpha=-1$, $\beta=-a$

$h(\alpha)=h(-1)=\dfrac{1}{3}+a-1=a-\dfrac{2}{3}$

$h(\beta)=h(-a)=\dfrac{1}{3}a^3$

$h(\alpha)\ge h(\beta)$, $a-\dfrac{2}{3}\ge\dfrac{1}{3}a^3$

$(a-1)^2(a+2)\le 0$

$a=1$ 또는 $a\le -2$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $-3\le a\le -2$

$b=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}$이므로

$a+b=\dfrac{3}{2}a-\dfrac{1}{2}$

$M=\dfrac{3}{2}\times(-2)-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{7}{2}$

$m=\dfrac{3}{2}\times(-3)-\dfrac{1}{2}=-5$

따라서 $M-m=-\dfrac{7}{2}-(-5)=\dfrac{3}{2}$

16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=2$

$a_2=\dfrac{a_1}{1}+4=6$

$a_3=\dfrac{a_2}{2}+4=7$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$

$\quad=\displaystyle\int(3x^2+4)\,dx$

$\quad=x^3+4x+C$ (단, C는 적분상수)

$F(0)+F(2)=C+(16+C)=14$

$C=-1$

$F(x)=x^3+4x-1$

따라서 $F(3)=27+12-1=38$

18. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

로그의 진수는 양수이므로

$x+4>0$, $x-2>0$

$x>2$ ⋯ ㉠

$\log_3(x+4)\le 3+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

$\log_3(x+4)-\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\le 3$

$\log_3(x+4)+\log_3(x-2)\le 3$

$\log_3(x+4)(x-2)\le \log_3 27$

로그의 밑이 1보다 크므로

$(x+4)(x-2)\le 27$

$x^2+2x-35\le 0$

$(x-5)(x+7)\le 0$

$-7\le x\le 5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$2<x\le 5$이므로

정수 x의 값은 3, 4, 5

따라서 구하는 모든 정수 x의 값의 합은 12

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	↘	$k-16$	↗	$k-9$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 k를 갖고,

$x=2$에서 극소이면서 최솟값 $k-16$을 갖는다.

$f(0)=k=40$이므로

$k=40$

따라서 닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=k-16=24$

20. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

자연수 n에 대하여 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ ⋯⋯ ㉠

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

(i) $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때,

㉠에 의하여

$$b_{2k-1}=2\times\left\{\frac{(2k-1)(a_1+a_{2k-1})}{2}-(2k-1)a_{2k-1}\right\}$$

$$=(2k-1)(a_1+a_{2k-1})-2(2k-1)a_{2k-1}$$

$$=(\boxed{2k-1})\times(a_1-a_{2k-1})$$

(ii) $n=2k$ (k는 자연수)일 때,

$b_{2k}=(2k-1)a_{2k}$

$b_2=(2-1)a_2=a_2=2$

(i), (ii)에 의하여

$b_{2k-1}+b_{2k}$

$=(\boxed{2k-1})\times(a_1-a_{2k-1})+(2k-1)a_{2k}$

$=(2k-1)\times\{a_1+(a_{2k}-a_{2k-1})\}$

$=(2k-1)\times(a_1+d)$

$=(2k-1)\times a_2$

$=\boxed{4k-2}$ ⋯⋯ ㉡

이다.

㉡에 의하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}b_n$

$=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{19}+b_{20})$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(b_{2k-1}+b_{2k})$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(4k-2)$

$=4\times\dfrac{10\times 11}{2}-2\times 10$

$=\boxed{200}$

이다.

$f(k)=2k-1$, $g(k)=4k-2$, $p=200$

따라서 $f(2)+g(3)+p=3+10+200=213$

21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

조건 (가)에서 $\displaystyle\lim_{t\to 0+}g(t)=6$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표는

$x=a$, $x=b$, $x=4$이어야 하므로

$a<4\le\dfrac{3}{2}a$, $b>\dfrac{3}{2}a$ 또는

$a<4\le\dfrac{3}{2}a$, $b<a$

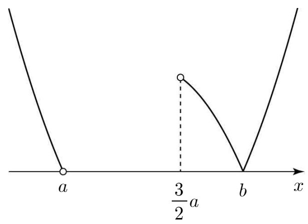
$4=\dfrac{3}{2}a$이면 $\displaystyle\lim_{t\to 0+}g(t)=5$이므로

$4<\dfrac{3}{2}a$이어야 한다.

(Ⅰ) $a<4<\dfrac{3}{2}a$, $b>\dfrac{3}{2}a$인 경우

$x<a$ 또는 $x>\dfrac{3}{2}a$에서

함수 $y=|(x-a)(x-b)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 양의 실수 m에 대하여

$x<a$ 또는 $x>\dfrac{3}{2}a$에서

직선 $y=m$과

함수 $y=|(x-a)(x-b)|$의 그래프가

만나는 서로 다른 점의 개수는

2 이상이므로

$\displaystyle\lim_{t\to m+}g(t)\ge 2$이다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(Ⅱ) $a<4<\dfrac{3}{2}a$, $b<a$인 경우

$\left|f\left(\dfrac{3}{2}a\right)\right|=\left|\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{3}{2}a-4\right)\right|=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{3}{2}a-4\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}a+}|f(x)|=\left|\frac{a}{2}\left(\frac{3}{2}a-b\right)\right|$

$=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{3}{2}a-b\right)$

$b<4$이므로

$\left|f\left(\dfrac{3}{2}a\right)\right|<\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}a+}|f(x)|$이다.

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}a+} |f(x)| = k_1$이라 하면

$\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right| \ge k_1$ 또는

$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right| \ge k_1$일 때

모든 양의 실수 m에 대하여

$\lim\limits_{t \to m+} g(t) \ge 2$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right| < k_1$이고,

$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right| < k_1$이다.

$\lim\limits_{t \to k_1-} g(t) = 1$, $\lim\limits_{t \to k_1+} g(t) = 2$이므로

함수 $g(t)$는 $t = k_1$에서 불연속이다.

조건 (나)에 의하여 $\beta = k_1$이다.

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여

$b < a < 4 < \frac{3}{2}a$, $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right| < \beta$,

$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right| < \beta$, $\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right| < \beta$

함수 $g(t)$는 $t = \alpha$, $t = \beta$에서만 불연속이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right| \ne \left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$인 경우

함수 $g(t)$가

$t = \left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|$, $t = \left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$,

$t = \beta$에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right| \ne \left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$인 경우

함수 $g(t)$가

$t = \left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$, $t = \left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$,

$t = \beta$에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right| \ne \left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$인 경우

함수 $g(t)$가

$t = \left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|$, $t = \left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$,

$t = \beta$에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$인 경우

$\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right| = k_2$라 하면

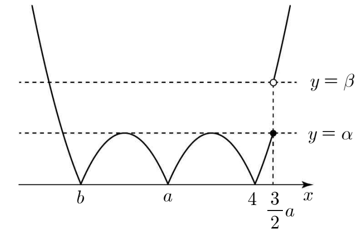
$\lim\limits_{t \to k_2-} g(t) = 6$, $\lim\limits_{t \to k_2+} g(t) = 1$이므로

함수 $g(t)$는 $t = k_2$, $t = \beta$에서만

불연속이다.

(ⅰ) ~ (ⅳ)에 의하여 $\alpha = k_2$이다.

함수 $y = |f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$이므로

$\frac{(a-4)^2}{4} = \frac{a(3a-8)}{4}$

$a^2 - 8a + 16 = 3a^2 - 8a$, $a^2 = 8$

$a > 0$이므로 $a = 2\sqrt{2}$

$\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$이므로

$\frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(4-a)^2}{4}$

$b < a < 4$이므로 $a - b = 4 - a$

$b = 2a - 4 = 4\sqrt{2} - 4$

$f(0) = ab = 2\sqrt{2}(4\sqrt{2} - 4) = 16 - 8\sqrt{2}$

$p = 16$, $q = -8$

따라서 $p^2 + q^2 = 256 + 64 = 320$

22. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

$f(x) = 2^{x-m} + n$,

$g(x) = \log_2(x - n + 1) + m - 7$이라 하자.

점 $\mathrm{A}(a, b)$는 제1사분면 위의 점이므로

$0 < a < b$

점 B는 점 A를 직선 $y = x$에 대하여

대칭이동한 점이므로 $\mathrm{B}(b, a)$이고,

곡선 $y = \log_2(x - n) + m$ 위의 점이다.

곡선 $y = g(x)$는 곡선 $y = \log_2(x - n) + m$을

x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로

-7만큼 평행이동한 곡선과 일치한다.

점 B를 x축의 방향으로 -1만큼,

y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 점을

$\mathrm{B}'(b-1, a-7)$이라 하면

점 B′은 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이다.

점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$인 원을 C라 하자.

$\overline{\mathrm{BB}'} = 5\sqrt{2}$이므로

점 B′은 원 C 위의 점이다.

원 C와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 두 점을

$\mathrm{C}(x_1, y_1)$, $\mathrm{D}(x_2, y_2)$라 하면 $x_1 < x_2$이고

함수 $g(x)$는 $x > n - 1$인 실수 전체의 집합에서 증가하므로 $y_1 < y_2$

점 B′은 원 C와 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로

점 B′은 점 C와 일치하거나 점 D와 일치한다.

점 B′이 점 D와 일치하는 경우

$x_1 < b - 1$, $y_1 < a - 7$

$b - x_1 > 1$, $a - y_1 > 7$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(b - x_1)^2 + (a - y_1)^2} > 5\sqrt{2}$이므로

점 C가 원 C 위의 점이라는 조건에 모순이다.

그러므로 점 B′은 점 C와 일치한다.

조건 (가)에 의하여

직선 AC의 기울기는

$\frac{a-7-b}{b-1-a} = -3$

$a - 7 - b = -3(b - 1 - a)$

$a - b = -5$ ⋯ ㉠

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y = -x + a + b$이므로

두 점 O, C와 직선 $x + y - a - b = 0$ 사이의 거리를 각각 h_1, h_2라 하면

$h_1 = \frac{|-a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$

$h_2 = \frac{|(b-1)+(a-7)-a-b|}{\sqrt{2}}$

$= \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times h_1$이고

삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times h_2$이므로

삼각형 AOB와 삼각형 ACB의 넓이의 비는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times h_1 : \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times h_2 = 27 : 8$

$8h_1 = 27h_2$

$8 \times \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} = 27 \times 4\sqrt{2}$

$a + b = 27$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a = 11$, $b = 16$

점 $\mathrm{A}(11, 16)$은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$2^{11-m} + n = 16$

위 식을 만족시키는

두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)은

$(8, 8)$, $(9, 12)$, $(10, 14)$, $(11, 15)$이다.

따라서 $m + n$의 최댓값은 $11 + 15 = 26$

확률과 통계 정답

23	⑤	24	④	25	①	26	③	27	②
28	⑤	29	41	30	725				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 독립사건의 확률 계산하기

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$

24. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수 이해하기

다항식 $(3x+1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r\times(3x)^{5-r}\times1^r={}_5\mathrm{C}_r\times3^{5-r}\times x^{5-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

x^2의 계수는 $r=3$일 때

${}_5\mathrm{C}_3\times3^2=10\times9=90$, $a=90$

x^3의 계수는 $r=2$일 때

${}_5\mathrm{C}_2\times3^3=10\times27=270$, $b=270$

따라서 $a+b=360$

25. [출제의도] 확률의 덧셈정리 이해하기

주머니에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2=21$

주머니에서 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수의 차가 2의 배수인 경우는 2, 4, 6으로 3가지이다.

(i) 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수의 차가 2인 경우

1과 3, 2와 4, 3과 5, 4와 6, 5와 7로 5가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{5}{21}$

(ii) 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수의 차가 4인 경우

1과 5, 2와 6, 3과 7로 3가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$

(iii) 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수의 차가 6인 경우

1과 7로 1가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{1}{21}$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{5}{21}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{21}=\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}$

[다른 풀이]

주머니에서 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수의 차가 2의 배수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수인 경우이다.

(i) 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수가 모두 짝수인 경우

숫자 2, 4, 6이 적힌 카드 3장 중 2장을 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$이므로 구하는 확률은 $\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$

(ii) 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수가 모두 홀수인 경우

숫자 1, 3, 5, 7이 적힌 카드 4장 중 2장을 꺼내는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이므로 구하는 확률은 $\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{3}{7}$

26. [출제의도] 정규분포의 표준화 이해하기

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때

$\mathrm{P}(m\le X\le 2m)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{m}{\sigma}\right)=0.4772$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{m}{\sigma}=2$, $m=2\sigma$

$\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{2-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{2-2\sigma}{\sigma}\right)=0.8413$

그러므로 $\dfrac{2-2\sigma}{\sigma}<0$

$\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}\left(\dfrac{2-2\sigma}{\sigma}\le Z\le 0\right)+0.5$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2\sigma-2}{\sigma}\right)+0.5$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2\sigma-2}{\sigma}\right)=0.3413$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{2\sigma-2}{\sigma}=1$에서

$\sigma=2$, $m=4$

$\mathrm{P}(0\le X\le 5)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0.5)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.4772+0.1915$

$=0.6687$

27. [출제의도] 원순열 이해하기

원 모양의 탁자에 남학생 4명이 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

자신과 이웃한 두 학생이 모두 남학생인 여학생 1명을 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

자신과 이웃한 두 학생이 모두 남학생인 여학생이 앉는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

자신과 이웃한 두 학생이 모두 남학생인 여학생의 수가 1이므로 다른 두 여학생은 서로 이웃해야 한다.

서로 이웃한 2명의 여학생이 앉는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times2!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times3\times4\times6=432$

[다른 풀이]

원 모양의 탁자에 7명의 학생이 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

자신과 이웃한 두 학생이 모두 남학생인 여학생의 수가 1이 되도록 하는 사건의 여사건은 3명의 여학생이 모두 이웃하거나 3명의 여학생 중 어느 2명도 서로 이웃하지 않는 사건이다.

(i) 3명의 여학생이 모두 이웃하는 경우

3명의 여학생을 한 명으로 보고 원 모양의 탁자에 남학생 4명을 포함한 5명의 학생이 모두 둘러앉는 경우의 수는

$3!\times(5-1)!=3!\times4!=144$

(ii) 3명의 여학생 중 어느 2명도 서로 이웃하지 않는 경우

원 모양의 탁자에 남학생 4명이 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

3명의 여학생이 앉는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3\times3!=24$

구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$720-(144+144)=432$

28. [출제의도] 중복조합의 수를 활용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 빈 상자 4개에 검은 공 4개를 남김없이 나누어 넣는 경우는

상자 1개에 4개 모두 넣는 경우,

상자 2개에 각각 3개, 1개 넣는 경우,

상자 2개에 2개씩 넣는 경우이다.

(i) 검은 공 4개를 상자 1개에 모두 넣는 경우

검은 공을 넣을 상자 1개를 고르는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

① 검은 공이 들어 있는 상자에 흰 공을 넣지 않고 빈 상자 3개에 흰 공 6개를 남김없이 넣는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$

② 검은 공이 들어 있는 상자에 흰 공 1개를 넣는 경우의 수는

${}_1\mathrm{C}_1=1$

남은 흰 공 5개를 빈 상자 3개에 남김없이 넣는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

①, ②에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4\times(28+1\times21)=196$

(ii) 검은 공 4개를 상자 2개에 각각 3개, 1개 넣는 경우

검은 공 3개를 넣을 상자 1개, 검은 공 1개를 넣을 상자 1개를 고르는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=12$

① 검은 공이 들어 있는 상자 2개에 모두 흰 공을 넣지 않고 빈 상자 2개에 흰 공 6개를 남김없이 넣는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_6={}_7\mathrm{C}_6=7$

② 검은 공이 들어 있는 상자 2개 중 상자 1개에만 흰 공 1개를 넣는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

남은 흰 공 5개를 빈 상자 2개에 남김없이 넣는 경우의 수는

$_2\mathrm{H}_5 = {}_6\mathrm{C}_5 = 6$

③ 검은 공이 들어 있는 상자 2개에 각각 흰 공을 1개씩 넣는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_2 = 1$

남은 흰 공 4개를 빈 상자 2개에 남김없이 넣는 경우의 수는

$_2\mathrm{H}_4 = {}_5\mathrm{C}_4 = 5$

①, ②, ③에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$12\times(7+2\times6+1\times5)=288$

(iii) 검은 공 4개를 상자 2개에 2개씩 넣는 경우

검은 공을 넣을 상자 2개를 고르는 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_2 = 6$

① 검은 공이 들어 있는 상자 2개에 모두 흰 공을 넣지 않고 빈 상자 2개에 흰 공 6개를 남김없이 넣는 경우의 수는

$_2\mathrm{H}_6 = {}_7\mathrm{C}_6 = 7$

② 검은 공이 들어 있는 상자 2개 중 상자 1개에만 흰 공 1개를 넣는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_1 = 2$

남은 흰 공 5개를 빈 상자 2개에 남김없이 넣는 경우의 수는

$_2\mathrm{H}_5 = {}_6\mathrm{C}_5 = 6$

③ 검은 공이 들어 있는 상자 2개에 각각 흰 공을 1개씩 넣는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_2 = 1$

남은 흰 공 4개를 빈 상자 2개에 남김없이 넣는 경우의 수는

$_2\mathrm{H}_4 = {}_5\mathrm{C}_4 = 5$

①, ②, ③에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6\times(7+2\times6+1\times5)=144$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$196+288+144=628$

29. [출제의도] 이산확률변수의 확률분포를 활용하여 문제 해결하기

확률변수 X가 가질 수 있는 값은

$0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2n$이고

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n}{2n+1}$

$1\le i\le n$인 모든 자연수 i에 대하여

$\mathrm{P}(X=2i)=\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_{n+1}\mathrm{C}_1}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n+1}{n(2n+1)}$

그러므로

$\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=4)=\ \cdots\ =\mathrm{P}(X=2n)$

$\mathrm{E}(X)$

$=0\times\mathrm{P}(X=0)+2\times\mathrm{P}(X=2)$

$\quad+4\times\mathrm{P}(X=4)+\ \cdots\ +2n\times\mathrm{P}(X=2n)$

$=(2+4+\ \cdots\ +2n)\times\mathrm{P}(X=2)$

$=2(1+2+\cdots+n)\times\dfrac{n+1}{n(2n+1)}$

$=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}\times\dfrac{n+1}{n(2n+1)}=\dfrac{(n+1)^2}{2n+1}$

$\mathrm{E}(X^2)$

$=0^2\times\mathrm{P}(X=0)+2^2\times\mathrm{P}(X=2)$

$\quad+4^2\times\mathrm{P}(X=4)+\cdots+(2n)^2\times\mathrm{P}(X=2n)$

$=\{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2\}\times\mathrm{P}(X=2)$

$=4(1^2+2^2+\cdots+n^2)\times\dfrac{n+1}{n(2n+1)}$

$=4\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\dfrac{n+1}{n(2n+1)}$

$=\dfrac{2}{3}(n+1)^2$

$\mathrm{E}(X^2)=14\mathrm{E}(X)$이므로

$\dfrac{2}{3}(n+1)^2=14\times\dfrac{(n+1)^2}{2n+1}$에서

$2n+1=21$이므로 $n=10$

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{(n+1)^2}{2n+1}=\dfrac{121}{21}$

따라서

$\mathrm{E}\left(7X+\dfrac{2}{3}\right)=7\mathrm{E}(X)+\dfrac{2}{3}=7\times\dfrac{121}{21}+\dfrac{2}{3}=41$

30. [출제의도] 조건부 확률을 활용하여 문제 해결하기

시행을 7번 반복할 때

$a_1=0$이고 $a_7=1$인 사건을 X,

집합 $\{a_m\,|\,m$은 7 이하의 자연수$\}$의 원소 중 가장 큰 값이 2인 사건을 Y라 하자.

k가 1일 확률은 $\dfrac{1}{6}$,

k가 2일 확률은 $\dfrac{1}{6}$,

k가 3 이상일 확률은 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$이므로

(i) 7번 시행 후 $a_1=0$이고 $a_7=1$인 경우는

① 1의 눈이 1번, 3 이상의 눈이 6번 나오는 경우

구하는 확률은

$\dfrac{2}{3}\times\left\{6\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5\right\}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^6$

② 1의 눈이 2번, 2의 눈이 1번, 3 이상의 눈이 4번 나오는 경우

구하는 확률은

$\dfrac{2}{3}\times\left\{\dfrac{6!}{2!\times3!}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right\}$

$=40\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^6$

③ 1의 눈이 3번, 2의 눈이 2번, 3 이상의 눈이 2번 나오는 경우

구하는 확률은

$\dfrac{2}{3}\times\left\{\dfrac{6!}{3!\times2!}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\right\}$

$=5\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^6$

①, ②, ③에 의하여

$\mathrm{P}(X)=(128+80+5)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^6$

$=71\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$

(ii) 7번 시행 후 $a_1=0$이고 $a_7=1$이므로 집합 $\{a_m\,|\,m$은 7 이하의 자연수$\}$의 원소 중 가장 큰 값이 2인 경우는

① 1의 눈이 1번, 3 이상의 눈이 6번 나오는 경우

집합의 원소의 가장 큰 값이 1이므로 구하는 확률은 0

② 1의 눈이 2번, 2의 눈이 1번, 3 이상의 눈이 4번 나오는 경우

첫 번째 시행에서 3 이상의 눈이 나오고 1의 눈이 2번 모두 2의 눈보다 먼저 나와야 하므로

구하는 확률은

$\dfrac{2}{3}\times\left\{\dfrac{6!}{3!\times3!}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right\}$

$=40\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^7$

③ 1의 눈이 3번, 2의 눈이 2번, 3 이상의 눈이 2번 나오는 경우

첫 번째 시행에서 3 이상의 눈이 나오고

1의 눈과 2의 눈은

1, 1, 2, 1, 2 또는

1, 1, 2, 2, 1 또는

1, 2, 1, 1, 2 또는

2, 1, 1, 1, 2

의 순서로 나와야 하고 각각에 대하여 3 이상의 눈이 1번 나와야 하므로

구하는 확률은

$\dfrac{2}{3}\times\left\{4\times6\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\right\}$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^6$

①, ②, ③에 의하여

$\mathrm{P}(X\cap Y)=43\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^7$

(i), (ii)에 의하여

$\mathrm{P}(Y\,|\,X)=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$

$=\dfrac{43\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^7}{71\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^5}=\dfrac{86}{639}$

$p=639,\ q=86$

따라서 $p+q=725$

미적분 정답

23	③	24	②	25	⑤	26	①	27	④
28	①	29	30	30	59				

미적분 해설

23. [출제의도] 지수함수와 삼각함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\tan 6x}{6x}\times 6}{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times 2}=3$$

24. [출제의도] 합성함수의 미분법 이해하기

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x^3+2x+2)\times(3x^2+2)=-\pi\cos\pi x$ ⋯ ㉠

방정식 $x^3+2x+2=5$에서

$(x-1)(x^2+x+3)=0$이므로 $x=1$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f'(5)\times(3\times1^2+2)=-\pi\cos\pi=\pi$

따라서 $f'(5)=\dfrac{\pi}{5}$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+n^2}{2n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_n}{n^2}+1}{2+\dfrac{4}{n^2}}=2$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}=0$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3$

따라서

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a_n+3n}-\sqrt{a_n+n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_n+3n}-\sqrt{a_n+n}}\times\frac{\sqrt{a_n+3n}+\sqrt{a_n+n}}{\sqrt{a_n+3n}+\sqrt{a_n+n}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n+3n}+\sqrt{a_n+n}}{(a_n+3n)-(a_n+n)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n+3n}+\sqrt{a_n+n}}{2n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{a_n}{n^2}+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{\dfrac{a_n}{n^2}+\dfrac{1}{n}}}{2}\\
&=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}\\
&=\sqrt{3}
\end{aligned}$$

26. [출제의도] 치환적분법 이해하기

두 점 P, Q의 x좌표를 구하면

$e^x=t$에서 $x=\ln t$

$e^x=t+2$에서 $x=\ln(t+2)$

$f(t)=\ln(t+2)-\ln t$이므로

$$\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{\ln(t+2)-\ln t}{t^2}dt=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{1}{t^2}\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)dt$$

$1+\dfrac{2}{t}=u$라 하면 $-\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{du}{dt}$

$t=\dfrac{2}{3}$일 때 $u=4$

$t=2$일 때 $u=2$

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{1}{t^2}\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)dt\\
&=\int_4^2\left(-\frac{1}{2}\ln u\right)du\\
&=\frac{1}{2}\int_2^4\ln u\,du\\
&=\frac{1}{2}\Big[u\ln u-u\Big]_2^4\\
&=\frac{1}{2}\{(4\ln4-4)-(2\ln2-2)\}\\
&=\frac{1}{2}\{(8\ln2-4)-(2\ln2-2)\}\\
&=\frac{1}{2}(6\ln2-2)=3\ln2-1
\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{f(t)}{t^2}dt=-1+3\ln2$

27. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$x=\cos t+t\sin t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=t\cos t$

$y=\sin t-t\cos t$에서 $\dfrac{dy}{dt}=t\sin t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t$$

$t=k$일 때,

곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$\tan k$이므로 곡선 위의 점 P에서의 접선이

x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기는 k이다.

직선 $y=\dfrac{1}{2}x$가 x축의 양의 방향과 이루는

예각의 크기를 α라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$

$|\tan(k-\alpha)|=\tan\theta=\dfrac{1}{2}$에서

$$|\tan(k-\alpha)|=\left|\frac{\tan k-\tan\alpha}{1+\tan k\times\tan\alpha}\right|=\left|\frac{\tan k-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}\times\tan k}\right|=\frac{1}{2}$$
이므로

$\tan k=0$ 또는 $\tan k=\dfrac{4}{3}$

$0<k<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\tan k=\dfrac{4}{3}$

$\sin k=\dfrac{4}{5}$, $\cos k=\dfrac{3}{5}$

$a=\cos k+k\sin k=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}k$

$b=\sin k-k\cos k=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}k$

따라서

$$\begin{aligned}
3a+4b+\tan k&=\frac{9}{5}+\frac{12}{5}k+\frac{16}{5}-\frac{12}{5}k+\frac{4}{3}\\
&=\frac{19}{3}
\end{aligned}$$

28. [출제의도] 부분적분법을 활용하여 문제 해결하기

$\displaystyle\int_1^{e^x}f^{-1}(g(t))dt=(x-1)e^x+k$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-1+k$, $k=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f^{-1}(g(e^x))\times e^x=xe^x$이고

$e^x>0$이므로 $f^{-1}(g(e^x))=x$

그러므로 $g(e^x)=f(x)$

$g^{-1}(f(x))=e^x$

$f^{-1}(x)=u$라 하면

$x=f(u)$이고 $1=f'(u)\dfrac{du}{dx}$

$x=f(0)$일 때 $u=0$,

$x=f(k)=f(1)$일 때 $u=1$

$$\begin{aligned}
&\int_{f(0)}^{f(k)}\left(f^{-1}(x)+g^{-1}(x)\right)dx\\
&=\int_0^1\left\{u+g^{-1}(f(u))\right\}f'(u)du\\
&=\int_0^1(u+e^u)f'(u)du\\
&=\Big[(u+e^u)f(u)\Big]_0^1-\int_0^1(1+e^u)f(u)du\\
&=\Big[(u+e^u)f(u)\Big]_0^1-\int_0^1(1+e^u)\left(u-\frac{1}{e^u+1}\right)du\\
&=\left\{(1+e)\times\left(1-\frac{1}{e+1}\right)-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\\
&\qquad-\int_0^1(u+ue^u-1)du\\
&=\left(e+\frac{1}{2}\right)-\int_0^1(u-1)du-\int_0^1ue^u du\\
&=e+\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}u^2-u\right]_0^1-\left(\Big[ue^u\Big]_0^1-\int_0^1e^u du\right)\\
&=e+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-1\right)-\{(e-0)-(e-1)\}\\
&=e
\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(k)}\left(f^{-1}(x)+g^{-1}(x)\right)dx=e$

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a,

공비를 r이라 하면

$a_n=a\times r^{n-1}$ (단, n은 자연수)

조건 (가)에 의하여 $a\neq0$, $r\neq0$

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

(ⅰ) $0<r<1$인 경우

① $a<0$이면 모든 자연수 n에 대하여

$a_n<a_{n+1}$이므로 $b_n=-a_n$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서

$\left(\dfrac{-a}{1-r}\right)^2=2\times\dfrac{a^2}{1-r^2}$

$2(1-r)^2=1-r^2$

$2(1-r)=1+r$이므로

$r = \dfrac{1}{3}$

㉠에 의하여

모든 자연수 n에 대하여 $a_n + b_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = 63$ 을 만족시키지 않는다.

② $a > 0$ 이면 모든 자연수 n에 대하여

$a_n > a_{n+1}$ 이므로 $b_n = a_{2n} > 0$

$a_n b_n = a_n a_{2n} > 0$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $-1 < r < 0$ 인 경우

① $a < 0$ 이면 모든 자연수 n에 대하여

$n = 2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$a_{2m-1} < 0 < a_{2m}$ 이므로

$b_{2m-1} = -a_{2m-1}$

$a_n b_n = -a_{2m-1}a_{2m-1} = -(a_{2m-1})^2 < 0$

$n = 2m$ (m은 자연수)일 때,

$a_{2m+1} < 0 < a_{2m}$ 이므로

$b_{2m} = a_{4m} > 0$

$a_n b_n = a_{2m}a_{4m} > 0$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a > 0$ 이면 모든 자연수 n에 대하여

$n = 2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$a_{2m} < 0 < a_{2m-1}$ 이므로

$b_{2m-1} = a_{4m-2} < 0$

$a_n b_n = a_{2m-1}a_{4m-2} < 0$

$n = 2m$ (m은 자연수)일 때,

$a_{2m} < 0 < a_{2m+1}$ 이므로

$b_{2m} = -a_{2m}$

$a_n b_n = -a_{2m}a_{2m} = -(a_{2m})^2 < 0$ 이므로

조건 (가)를 만족시킨다.

조건 (나)에서

$\left(\dfrac{a}{1+r}\right)^2 = 2 \times \dfrac{a^2}{1-r^2}$

$2(1+r)^2 = 1 - r^2$

$2(1+r) = 1 - r$ 이므로

$r = -\dfrac{1}{3}$

$$a_n + b_n = \begin{cases} a_n + a_{2n} & (n = 2m-1) \\ 0 & (n = 2m) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{4n-2}) \\ &= \frac{a}{1-r^2} + \frac{ar}{1-r^4} \\ &= \frac{63}{80}a = 63\end{aligned}$$

그러므로 $a = 80$

(i), (ii)에 의하여

$a_n = 80 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$b_{2n} = -a_{2n} = \dfrac{80}{3} \times \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{\frac{80}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = 30$

30. [출제의도] 함수의 그래프 추론하기

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 또는

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$

$(f(x))^3 + f(x) = \dfrac{a}{x^2+12} - bx - \dfrac{16}{3}b$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\left\{3(f(x))^2 + 1\right\}f'(x) = \dfrac{-2ax}{(x^2+12)^2} - b$

양변에 $x = 0$을 대입하면

$\left\{3(f(0))^2 + 1\right\}f'(0) = -b$

$3(f(0))^2 + 1 > 0$ 이고 $b > 0$ 이므로 $f'(0) < 0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여

$f'(x) \leq 0$ … ㉠

$g(x) = \dfrac{-2ax}{(x^2+12)^2} - b$ 라 하면

$g(x) = \left\{3(f(x))^2 + 1\right\}f'(x)$ 이고

㉠에 의하여 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq 0$

조건 (나)에 의하여

$g(k) = \left\{3(f(k))^2 + 1\right\}f'(k) = 0$ 이므로

함수 $g(x)$는 $x = k$에서 최댓값 0을 갖는다.

$g'(x) = \dfrac{6a(x+2)(x-2)}{(x^2+12)^3}$

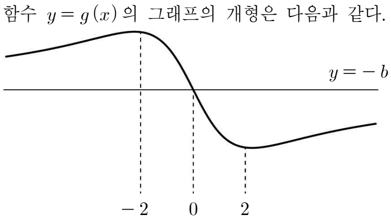
$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -b$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = -b$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{a}{64} - b$	$\searrow$	$-\dfrac{a}{64} - b$	$\nearrow$

함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y = g(x)$의 최댓값은

$x = -2$일 때뿐이므로 $k = -2$

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -bx$가 만나는

서로 다른 모든 점의 x좌표의 합은

$k + 8 = 6$ 이다.

$f'(-2) = 0$ 이므로 $g(-2) = \dfrac{a}{64} - b = 0$ 에서

$a = 64b$

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -bx$가 만나는 점의

x좌표를 t라 하면

$(f(t))^3 + f(t) = \dfrac{64b}{t^2+12} - bt - \dfrac{16}{3}b$ 이고

$f(t) = -bt$ 이므로

$(-bt)^3 - bt = \dfrac{64b}{t^2+12} - bt - \dfrac{16}{3}b$

$0 = b^3t^3 + \dfrac{64b}{t^2+12} - \dfrac{16}{3}b$

$0 = b^2t^3 + \dfrac{64}{t^2+12} - \dfrac{16}{3}$

$0 = \dfrac{3b^2t^3(t^2+12) + 192 - 16(t^2+12)}{3(t^2+12)}$

$0 = \dfrac{t^2(3b^2t^3 + 36b^2t - 16)}{3(t^2+12)}$

그러므로 방정식 $f(t) = -bt$의 한 실근은 $t = 0$

$h(t) = 3b^2t^3 + 36b^2t - 16$ 이라 하면

$h'(t) = 9b^2t^2 + 36b^2$

모든 실수 t에 대하여 $h'(t) > 0$ 이므로

삼차함수 $h(t)$는 실수 전체의 집합에서

증가한다.

방정식 $h(t) = 0$의 실근의 개수는 1이고

그 실근을 $t = t_1$ $(t_1 \neq 0)$ 이라 하자.

방정식 $f(t) = -bt$는 서로 다른 두 실근을 갖고

두 실근은 $t = 0$과 $t = t_1$

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -bx$가 만나는

서로 다른 모든 점의 x좌표의 합은

$0 + t_1 = 6$ 이므로 $t_1 = 6$

$h(6) = 648b^2 + 216b^2 - 16 = 0$

$b^2 = \dfrac{1}{54}$ 이므로

$a \times b = 64b \times b = 64 \times b^2 = \dfrac{32}{27}$

$p = 27$, $q = 32$

따라서 $p + q = 59$

기하 정답

23	①	24	②	25	⑤	26	④	27	③
28	⑤	29	216	30	52				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 합 계산하기

$\vec{a}=(3,\,1)$, $\vec{b}=(-2,\,1)$에 대하여
$\vec{a}+\vec{b}=(3,\,1)+(-2,\,1)=(1,\,2)$이므로
모든 성분의 합은 3

24. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기

점 $(a,\,4)$가 포물선 $y^2=4(x-3)$ 위의
점이므로 $4^2=4(a-3)$, $a=7$
포물선 $y^2=4(x-3)$은 포물선 $y^2=4x$를
x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로
준선의 방정식은 $x=-1+3=2$
따라서 점 $(7,\,4)$와 준선 사이의 거리는
$|7-2|=5$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

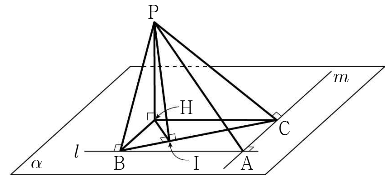
점 $(3\sqrt{2}\,,\,0)$을 지나고 방향벡터가
$\vec{u}=(1,\,2\sqrt{2})$인 직선의 방정식은
$\dfrac{x-3\sqrt{2}}{1}=\dfrac{y}{2\sqrt{2}}$이므로
$2\sqrt{2}\,x-y-12=0$
원점 O와 직선 $2\sqrt{2}\,x-y-12=0$ 사이의
거리는
$\dfrac{|-12|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=\dfrac{12}{3}=4$이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\geq 4$
따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값은 4

26. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 위의 점 $\mathrm{P}(6,\,b)\;(b>0)$에서의
접선의 방정식은
$\dfrac{6x}{48}+\dfrac{by}{4b^2}=1$, $y=-\dfrac{b}{2}x+4b$
점 A의 좌표는 $(8,\,0)$, 점 B의 좌표는 $(0,\,4b)$
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{8^2+(4b)^2}=\sqrt{64+16b^2}$이고
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$이므로
$64+16b^2=192$, $b=2\sqrt{2}$
$c^2=48-4b^2$이므로 $c=4$
따라서 $b^2\times c=(2\sqrt{2})^2\times 4=32$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기

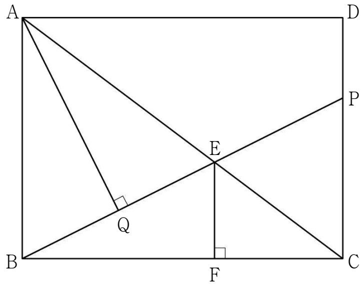
점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PB}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HB}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$
$\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PC}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HC}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$
$\overline{\mathrm{HB}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{HC}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$이므로
사각형 ACHB는 직사각형이다.
$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$
$\overline{\mathrm{AH}}=4$이고 $\overline{\mathrm{PA}}=5$이므로
삼각형 PHA에서
$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$
점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하자.



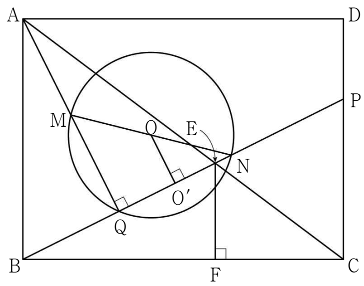
삼각형 HBC에서
$\dfrac{1}{2}\times 4\times\overline{\mathrm{HI}}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2$이므로 $\overline{\mathrm{HI}}=\sqrt{3}$
삼각형 PHI에서
$\overline{\mathrm{PI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HI}}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$
$\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{HI}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PI}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$
$\overline{\mathrm{PI}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{HI}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로
평면 α와 평면 PBC가 이루는 각의 크기는
두 직선 HI와 PI가 이루는 각의 크기와 같다.
$\cos(\angle\mathrm{PIH})=\dfrac{\overline{\mathrm{HI}}}{\overline{\mathrm{PI}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$
삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$
따라서 삼각형 ABC의 평면 PBC 위로의
정사영의 넓이는
$2\sqrt{3}\times\cos(\angle\mathrm{PIH})=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$

28. [출제의도] 벡터의 내적을 활용하여 문제 해결하기

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$에서
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 이루는 각의 크기를
$t\;(0\leq t\leq\pi)$라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\times\cos t=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$
이므로 $\angle\mathrm{PQA}=\dfrac{\pi}{2}$ … ㉠
$10\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{BA}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$이므로
$10\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{BA}}+3\overrightarrow{\mathrm{BC}}$
$2\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{BA}}+3\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{5}$
선분 AC를 $3:2$로 내분하는 점을 E라 하면
$2\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}$이므로
점 Q는 선분 BE의 중점이다.
$\overline{\mathrm{AC}}=10$이고 $\overline{\mathrm{AE}}=6$이므로
삼각형 ABE는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}$인 이등변삼각형이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{AQ}}\perp\overline{\mathrm{BQ}}$



㉠에 의하여 세 점 B, Q, P는 한 직선 위에 있다.
점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 F라 하면
두 삼각형 ABC와 EFC는 서로 닮음이고
닮음비가 $5:2$이므로
$\overline{\mathrm{EF}}=\dfrac{2}{5}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{12}{5}$
$\overline{\mathrm{FC}}=\dfrac{2}{5}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{16}{5}$
$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{FC}}=\dfrac{24}{5}$
$\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BF}}^2+\overline{\mathrm{EF}}^2}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$이므로
$\overline{\mathrm{BQ}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$
두 삼각형 BFE와 BCP는 서로 닮음이고
닮음비가 $3:5$이므로
$\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{5}{3}\times\overline{\mathrm{BE}}=4\sqrt{5}$
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{BP}}-\overline{\mathrm{BQ}}=4\sqrt{5}-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}=\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$
$(\overrightarrow{\mathrm{AR}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}})=0$에서
$\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AR}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}}{2}\right)=0$이므로
선분 AQ의 중점을 M,
선분 PQ의 중점을 N이라 하면
점 R은 두 점 M과 N을 지름의 양 끝점으로
하는 원 위의 점이다.
이 원의 중심을 O, 점 O에서 선분 BP에 내린
수선의 발을 O′이라 하자.



$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}$
$\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=|\overrightarrow{\mathrm{BO'}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$
$\overline{\mathrm{BO'}}=\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QO'}}=\overline{\mathrm{BQ}}+\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{NQ}}$
$\overline{\mathrm{NQ}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$
$\overline{\mathrm{BO'}}=\overline{\mathrm{BQ}}+\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{NQ}}$
$=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}+\dfrac{7\sqrt{5}}{10}=\dfrac{19\sqrt{5}}{10}$
$\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=|\overrightarrow{\mathrm{BO'}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$
$=\dfrac{19\sqrt{5}}{10}\times\dfrac{14\sqrt{5}}{5}=\dfrac{133}{5}$ … ㉡
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$가 이루는 각의 크기를
$\theta\;(0\leq\theta\leq\pi)$라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|\times\cos\theta$
$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MN}}$
삼각형 AQB에서
$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BQ}}^2}$

$= \sqrt{6^2 - \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{MQ}} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AQ}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

삼각형 MQN 에서

$\overline{\mathrm{MN}} = \sqrt{\overline{\mathrm{MQ}}^2 + \overline{\mathrm{NQ}}^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{17}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{MN}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{QP}}| \times \cos\theta$

$= \frac{\sqrt{17}}{2} \times \frac{14\sqrt{5}}{5} \times \cos\theta$

$= \frac{7\sqrt{85}}{5} \cos\theta$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 의 최댓값은

$\theta = 0$ 일 때, $\frac{7\sqrt{85}}{5}$ ⋯ ㉢

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 의 최솟값은

$\theta = \pi$ 일 때, $-\frac{7\sqrt{85}}{5}$ ⋯ ㉣

㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{BR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은

$M = \frac{133 + 7\sqrt{85}}{5}$, $m = \frac{133 - 7\sqrt{85}}{5}$

따라서

$M + m = \frac{133 + 7\sqrt{85}}{5} + \frac{133 - 7\sqrt{85}}{5} = \frac{266}{5}$

29. [출제의도] 포물선과 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제 해결하기

포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ 이므로

포물선 위의 점 P 의 좌표를 (m, n)

$(m > 0, n > 0)$ 이라 하면 $n^2 = 4pm$

점 P 에서 직선 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 P$'$ 이라 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PP'}} = \overline{\mathrm{PF}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PF}} = p + m$

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 S 라 하면

$\overline{\mathrm{SF}} = p - m$

$\cos(\angle \mathrm{PFF'}) = \frac{1}{5}$ 이므로

$\frac{\overline{\mathrm{SF}}}{\overline{\mathrm{PF}}} = \frac{p-m}{p+m} = \frac{1}{5}$, $m = \frac{2}{3}p$

$\overline{\mathrm{SF}} = \frac{p}{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PS}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{SF}}^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}p$

$\overline{\mathrm{F'S}} = \frac{5}{3}p$ 이므로

$\overline{\mathrm{PF'}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PS}}^2 + \overline{\mathrm{F'S}}^2} = \frac{7}{3}p$

$\overline{\mathrm{F'P}} : \overline{\mathrm{F'R}} = \overline{\mathrm{F'F}} : \overline{\mathrm{F'O}} = 2 : 1$ 이므로

두 삼각형 PF$'$F 와 RF$'$O 는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{RF'}} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PF'}} = \frac{7}{6}p$

쌍곡선의 주축의 길이를 $2a$ 라 하면

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{RF'}} - \overline{\mathrm{RO}} = \overline{\mathrm{QO}} - \overline{\mathrm{QF'}} = 2a$

삼각형 QOR 의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{RQ}} + \overline{\mathrm{QO}} + \overline{\mathrm{RO}} = (\overline{\mathrm{RF'}} - \overline{\mathrm{QF'}}) + \overline{\mathrm{QO}} + \overline{\mathrm{RO}}$

$= \overline{\mathrm{RF'}} + (\overline{\mathrm{QO}} - \overline{\mathrm{QF'}}) + \overline{\mathrm{RO}}$

$= \overline{\mathrm{RF'}} + (\overline{\mathrm{RF'}} - \overline{\mathrm{RO}}) + \overline{\mathrm{RO}}$

$= 2\overline{\mathrm{RF'}} = 14$ 이므로

$\overline{\mathrm{RF'}} = 7$

그러므로 $\frac{7}{6}p = 7$, $p = 6$

$\overline{\mathrm{F'O}} = p = 6$, $\overline{\mathrm{PS}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}p = 4\sqrt{6}$ 이고

삼각형 PRO 의 넓이는

삼각형 PF$'$O 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{F'O}} \times \overline{\mathrm{PS}}\right) = 6\sqrt{6}$

따라서 $S^2 = 216$

30. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여 추론하기

$\angle \mathrm{ADB} = \frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{AB}} = 10\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AD}} = 10$ 이므로

$\overline{\mathrm{BD}} = 20$

점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

조건 (가)에 의하여 네 점 P, D, H, B 는

한 평면 위에 있다.

$\overline{\mathrm{PH}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{BD}} \perp \overline{\mathrm{AD}}$ 이므로

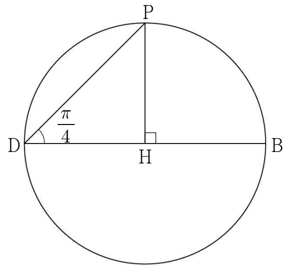
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PD}} \perp \overline{\mathrm{AD}}$

구 S 와 평면 PBD 가 만나는 교선은

선분 BD 가 지름인 원이고

조건 (나)에 의하여 $\angle \mathrm{PDH} = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{BH}} = 10$ 이고 $\overline{\mathrm{PB}} = 10\sqrt{2}$

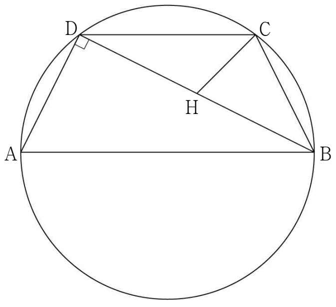


삼각형 BDA 는 직각삼각형이므로

$\cos(\angle \mathrm{DAB}) = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

사각형 ABCD 가 등변사다리꼴이므로

$\overline{\mathrm{CD}} = 10\sqrt{5} - 2 \times \overline{\mathrm{AD}} \times \cos(\angle \mathrm{DAB}) = 6\sqrt{5}$



$\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{ABD}$ 이므로

$\cos(\angle \mathrm{BDC}) = \cos(\angle \mathrm{ABD}) = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 DHC 에서

$\overline{\mathrm{CH}}^2$

$= \overline{\mathrm{DH}}^2 + \overline{\mathrm{DC}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{DH}} \times \overline{\mathrm{DC}} \times \cos(\angle \mathrm{HDC})$

$= 10^2 + (6\sqrt{5})^2 - 2 \times 10 \times 6\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 40$

$\overline{\mathrm{CH}} = 2\sqrt{10}$

삼각형 PHC 에서

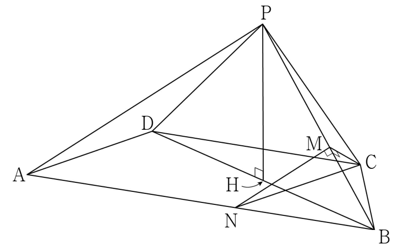
$\overline{\mathrm{PC}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2 + \overline{\mathrm{CH}}^2}$

$= \sqrt{10^2 + (2\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{35}$

점 C 에서 선분 PB 에 내린 수선의 발을 M,

점 M 을 지나고 선분 PB 에 수직인 직선이

선분 AB 와 만나는 점을 N 이라 하자.



평면 PAB 와 평면 PBC 가 이루는 각의 크기는

두 직선 MN 과 MC 가 이루는 각의 크기와

같다.

삼각형 PBC 에서

$\overline{\mathrm{PC}}^2 - (\overline{\mathrm{PB}} - \overline{\mathrm{MB}})^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 - \overline{\mathrm{MB}}^2$

$(2\sqrt{35})^2 - (10\sqrt{2} - \overline{\mathrm{MB}})^2 = 10^2 - \overline{\mathrm{MB}}^2$

$\overline{\mathrm{MB}} = 4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CM}} = \sqrt{\overline{\mathrm{BC}}^2 - \overline{\mathrm{MB}}^2}$

$= \sqrt{10^2 - (4\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{17}$

점 P 가 구 S 위의 점이므로 $\angle \mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}$

두 삼각형 BPA 와 BMN 은

서로 닮음이고 닮음비가 $5 : 2$ 이다.

$\overline{\mathrm{NB}} = \frac{2}{5} \times \overline{\mathrm{AB}} = 4\sqrt{5}$ 이고 $\overline{\mathrm{AN}} = 6\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2}$

$= \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{NM}} = \frac{2}{5} \times \overline{\mathrm{AP}} = 4\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AN}} = \overline{\mathrm{CD}} = 6\sqrt{5}$ 이므로

사각형 ANCD 는 평행사변형이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{CN}} = \overline{\mathrm{AD}} = 10$

삼각형 CMN 에서

$\cos(\angle \mathrm{NMC}) = \frac{\overline{\mathrm{NM}}^2 + \overline{\mathrm{CM}}^2 - \overline{\mathrm{CN}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{NM}} \times \overline{\mathrm{CM}}}$

$= \frac{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{17})^2 - 10^2}{2 \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{17}}$

$= \frac{\sqrt{51}}{51}$

$\cos^2\theta = \cos^2(\angle \mathrm{NMC}) = \frac{1}{51}$

$p = 51$, $q = 1$

따라서 $p + q = 52$