15. 상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5})$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 15x + 7 & (x \le 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2) + g(2)$의 값은? [4점]

① 30　② 32　③ 34　④ 36　⑤ 38

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 15x + 7 & (x \le 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

미분가능 ⟶ 연속 + 미분가능

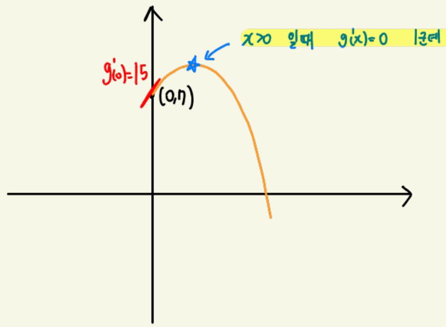
행동강령

구간별로 다르게 정의된 함수의 연속, 미분가능 조건

구간내부 $(x^3+ax^2+15x+7 \,/\, f(x))$ → 연속, 미분가능

경계값 $(x=0)$ 연속 → $7 = f(0)$ 미분가능 $15 = f'(0)$

$f(x) = px^2+15x+7$



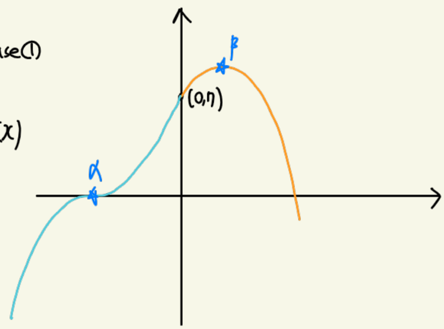
(나) x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g'(x)=0$ or $g'(x-4)=0$

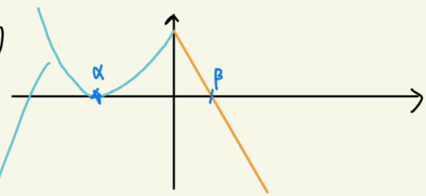
$g'(x)=0$ 의 한 근이 α ⟶ $g'(x-4)=0$의 한근이 $\alpha+4$

case①

$g(x)$



$g'(x)$



$g'(x) \times g'(x-4)=0 \longrightarrow x = \alpha, \beta, \alpha+4, \beta+4$

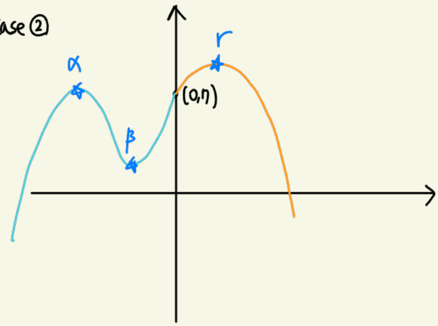
근 4개 $(\alpha+4 \neq \beta)$

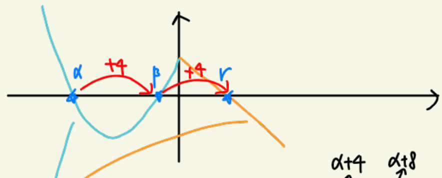
$3x^2+2ax+15=0$　$D/4 = a^2-45=0$

$a=-3\sqrt{5}\ (a<0) \rightarrow$ out!

상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5})$

case②





$g'(x) \times g'(x-4)=0 \rightarrow x = \alpha, \underset{\alpha+4}{\beta}, \underset{\beta+4}{r}, r+4$　근 4개

($\beta \to \alpha+8$, $r \to \alpha+8$, $r+4 \to \alpha+12$)

$3x^2+2ax+15=0 \rightarrow \alpha, \alpha+4$

$\alpha + (\alpha+4) = -\frac{2a}{3} \rightarrow -\frac{2a}{3} = -6$　$a=9$

$\alpha \times (\alpha+4) = 5 \rightarrow \alpha = -5, 1\ (\times)$　$(\because \alpha, \alpha+4<0, \alpha+8>0)$

$f(x) = px^2+15x+7$

$f'(x) = 2px+15$　$f'(\alpha+8) = f'(3) = 6p+15 = 0$

$p = -\frac{5}{2}$

$g(-2) = 5$　$g(2) = 27$　답: ② 32