15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
>
> (나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (x>1 \text{ or } x<-1) \\ -f(x) & (-1\le x\le 1)\end{cases}$$

행동강령

구간별로 다르게 정의된 함수가 나오면 $+\infty$(맨 오른쪽)/$-\infty$(맨 왼쪽) 살펴라!

$+\infty$는 $(x>1)$ → $f(x)+k$ $-\infty$는 $(x<-1)$ → $f(x)+k$

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.

모든 실수 a에 대하여 $g'_+(a)\ge 0$

행동강령

$x=a$에서 미분가능 → $g'_+(a)=g'(a)$

$x=a$에서 미분불가능 → $g'_+(a)$ 그대로

행동강령

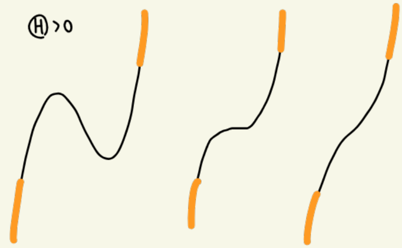
구간 내부 $f(x)+k$ / $-f(x)$ → 미분가능

경계값($x=-1, 1$)에서는 확인해 봐야함!

행동강령

특수한 지점 (극대/극소)을 우선적으로 살펴라!

Ⓗ>0



$+\infty$ / $-\infty$

$g(x)=f(x)+k$

$g'_+(a)=g'(a)=f'(a)>0$

out!

Ⓗ<0 $f'(0)=6$ 이므로 증가하는 구간 존재

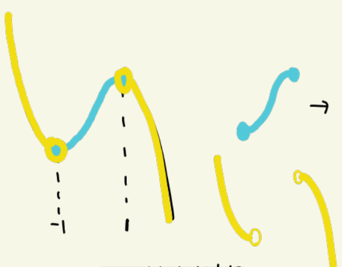
→ 극값을 갖는 개형

$+\infty$ / $-\infty$

$g(x)=f(x)+k$

$g'_+(a)=g'(a)<0$

ok!



→ $(-1\le x\le 1)$

$-f(x)$, 뒤집어야 $(-1<a<1)$에서 $g'(a)<0$

→ $(x>1$ or $x<-1)$

$f(x)+k$, 모양 그대로여야 $(a>1$ or $a<-1)$에서 $g'(a)<0$

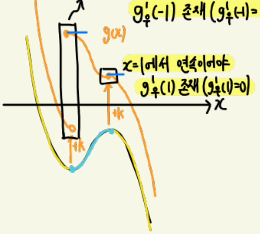
└ y축 방향 평행이동은 $g'(a)$값에 영향X

$x=-1$에서 불연속이어도

$g'_+(-1)$ 존재 $(g'_+(-1)=0)$

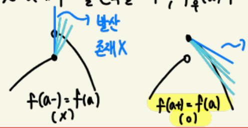
$x=1$에서 연속이어야

$g'_+(1)$ 존재 $(g'_+(1)=0)$



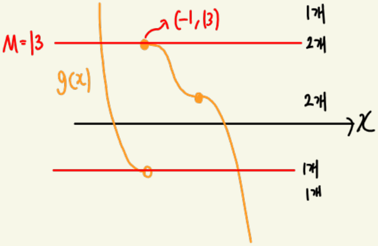
핵심 개념정리

$x=a$에서 불연속일 때, $f'_+(a)$가 존재하려면?



$x=1$에서 연속 → $-f(1)=f(1)+k$

(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.



행동 강령

y=t 와의 교점 개수 함수 g(t) 불연속 후보지점

① 극값 ② 불연속점 ③ 점근선

$g(-1) = -f(-1) = 13$, $f(-1) = -13$

$f(x) = px^3 + \cdots$

$f'(x) = 3p(x+1)(x-1)$ $f(0) = -3p = 6$ $p=-2$

$f'(x) = -6x^2+6$

$f(x) = -2x^3+6x+C$ $f(-1) = -4+C = -13$ $C=-9$

$f(x) = -2x^3+6x-9$

$f(1)+k = -f(1)$ ($\because$ $x=1$에서 연속)

$k = -2f(1) = 10$ $k+f(\frac{1}{2}) = 10 + (-\frac{25}{4}) = \boxed{\frac{15}{4}}$