출제 의도

본 문항은 구간별로 정의된 로그함수의 그래프와 직선 $y = x$의 교점 구조를 종합적으로 분석하는 능력을 평가합니다. 함수가 $x = a$를 중심으로 대칭적인 구조를 가지므로, 좌우의 교점 조건이 동일한 방정식 $4\log_2 t - t = b$로 통합된다는 사실을 발견하는 것이 풀이의 출발점입니다. 이를 바탕으로 네 교점의 x좌표를 $a-q, a-p, a+p, a+q$의 대칭쌍으로 표현하고, 두 조건 $x_2 = b$와 $x_4 - x_1 = 2(x_3 - x_2)$를 p, q, a, b 사이의 관계식으로 번역해야 합니다. 특히 p와 q가 같은 방정식의 두 해라는 사실을 활용해야 모든 미지수가 결정되므로, 교점의 순서를 정확히 대응시키고 주어진 조건을 빠짐없이 사용하는 전략적 판단이 필요합니다.

문항

두 실수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \begin{cases} a - 4\log_2(a-x) + b & (x < a) \\ a + b & (x = a) \\ a + 4\log_2(x-a) - b & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$가 서로 다른 네 점에서 만나고, 그 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때,

$$x_2 = b, \qquad x_4 - x_1 = 2(x_3 - x_2)$$

이다. $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. [4점]

답: 80

해설

1. 좌우 교점 조건의 접힘

$x < a$에서

$$x = a - t \qquad (t > 0)$$

라 두면

$$a - t = a - 4\log_2 t + b$$

이므로

$$4\log_2 t - t = b$$

이다. 또 $x > a$에서

$$x = a + t \qquad (t > 0)$$

라 두면

$$a + t = a + 4\log_2 t - b$$

이므로 역시

$$4\log_2 t - t = b$$

이다. 따라서 $x = a$를 중심으로 좌우 두 교점 조건이 같은 방정식으로 접힌다.

---

2. 네 교점의 반사쌍 구조

함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$가 서로 다른 네 점에서 만나므로, 방정식

$$4\log_2 t - t = b$$

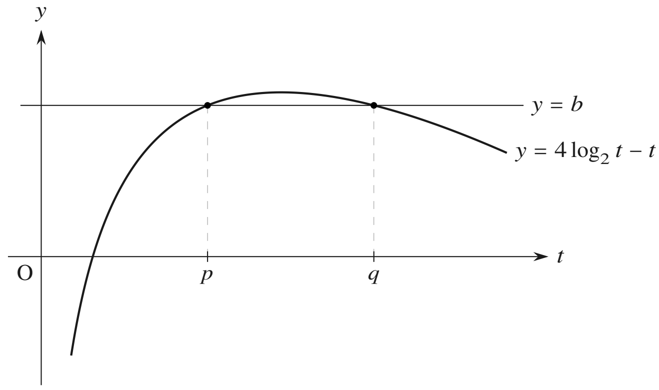
는 서로 다른 두 양수해를 갖는다. 두 해를 $p < q$라 하자. 그러면 네 교점의 x좌표는 작은 것부터

$$a - q, \quad a - p, \quad a + p, \quad a + q$$

이다. 즉

$$x_1 = a - q, \qquad x_2 = a - p, \qquad x_3 = a + p, \qquad x_4 = a + q$$

이다. 곡선 $y = 4\log_2 t - t$와 직선 $y = b$의 교점 구조는 아래 그림과 같다.



3. 두 조건의 번역

조건 $x_2 = b$

$x_2 = a - p$이므로

$$a - p = b$$

이다.

조건 $x_4 - x_1 = 2(x_3 - x_2)$

반사쌍 표현을 대입하면

$$(a + q) - (a - q) = 2\{(a + p) - (a - p)\}$$

이므로 $2q = 4p$이다.

$\therefore q = 2p, \qquad a - p = b$

4. p, q, a, b의 결정

한편 p, q는 같은 방정식 $4\log_2 t - t = b$의 두 해이므로

$$4\log_2 p - p = 4\log_2 q - q$$

이다. 여기에 $q = 2p$를 대입하면

$$4\log_2 p - p = 4\log_2(2p) - 2p$$

이고, $\log_2(2p) = 1 + \log_2 p$이므로

$$4\log_2 p - p = 4 + 4\log_2 p - 2p$$

이다. 양변을 정리하면 $p = 4$이고, 따라서 $q = 2p = 8$이다.

$\therefore p = 4, \qquad q = 8$

또 $p = 4$가 방정식 $4\log_2 t - t = b$의 해이므로

$$b = 4\log_2 4 - 4 = 8 - 4 = 4$$

이고, $a - p = b$에서 $a - 4 = 4$, 즉 $a = 8$이다.

$\therefore a = 8, \qquad b = 4$

5. 답 계산과 검산

따라서 구하는 값은

$$a^2 + b^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

이다.

실제로 $a = 8$, $b = 4$일 때

$$f(x) = \begin{cases} 12 - 4\log_2(8 - x) & (x < 8) \\ 12 & (x = 8) \\ 4 + 4\log_2(x - 8) & (x > 8) \end{cases}$$

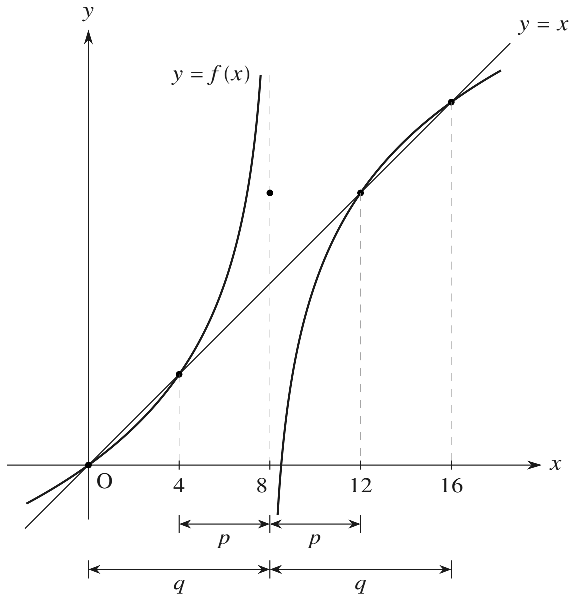
이고, 직접 대입하면

$$f(0) = 12 - 4\log_2 8 = 12 - 12 = 0, \qquad f(4) = 12 - 4\log_2 4 = 12 - 8 = 4,$$
$$f(12) = 4 + 4\log_2 4 = 4 + 8 = 12, \qquad f(16) = 4 + 4\log_2 8 = 4 + 12 = 16$$

이므로 네 교점의 x좌표는 0, 4, 12, 16이다. 이때

$$x_2 = 4 = b, \qquad x_4 - x_1 = 16 - 0 = 16 = 2(12 - 4) = 2(x_3 - x_2)$$

이므로 주어진 두 조건이 모두 성립한다. 또한 방정식 $4\log_2 t - t = 4$는 $t = 4, 8$을 해로 가지며, 로그함수 그래프와 직선의 교점 구조상 추가 양수해가 생기지 않으므로 교점은 정확히 네 개이다.



$\boxed{80}$